

# Histoire de la transformée de Mellin

Jean-Marie NICOLAS<sup>1</sup>, Roland BADEAU<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>LTCI, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 75013, Paris, France

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

**Résumé** – La transformée de Mellin est probablement la transformation intégrale la plus méconnue mais aussi une des plus fondamentales dans de nombreux domaines. Sa genèse a été fort longue, et il est difficile de donner une référence précise de son introduction dans les ouvrages scientifiques. Longtemps réduite à jouer un rôle secondaire vis à vis des transformées de Fourier et de Laplace, il est peut être temps de lui redonner la place qu’elle mérite dans les outils de traitement de signal “modernes”.

**Abstract** – The Mellin transform probably is the most unknown but also one of the most fundamental integral transforms in many domains. Its genesis has been very long, and it is difficult to provide a specific reference of its introduction in the scientific literature. Long reduced to playing a secondary role compared with the Fourier and Laplace transforms, it may be time to give it back the place it deserves in the “modern” signal processing toolbox.

## 1 Introduction

A l’heure actuelle, la transformée de Mellin fait partie des outils élémentaires de l’analyse moderne. Même s’il n’existe aucune monographie stricto sensu (la transformée de Mellin partage avec la transformée de Laplace le titre de [14], et avec la transformée de Hankel celui de [13]), un certain nombre de bons auteurs la définissent et l’utilisent. Pour toute fonction  $f(x)$ , définie pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on associe la fonction  $\phi(s)$  avec  $s \in \mathbb{C}$ , que l’on appellera transformée de Mellin [13, 20] :

$$\phi(s) = \mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \quad (1)$$

Généralement, cette intégrale (1) ne converge que pour des valeurs de  $s$  situées à l’intérieur d’une bande délimitée par deux parallèles à l’axe imaginaire, i.e.

$$s = s_R + i\omega \quad s_R \in ]s_{R_1}; s_{R_2}[ \quad (2)$$

et on montre que  $\phi(s)$  est holomorphe à l’intérieur de cette bande qui porte souvent le nom de **bande de définition**. Mieux, si l’on exprime  $s$  sous la forme  $s = c + i\omega$ , la convergence de l’intégrale (1) est vérifiée dès lors que cette intégrale existe pour  $s = c$  [20]. On dispose aussi d’une “version Mellin” du théorème de Paley-Wiener montrant si une fonction  $\phi(s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  est une transformée de Mellin [20]. Une fois posés les fondements mathématiques de cette catégorie de fonctions analytiques, si  $\phi(s)$  est la transformée de Mellin d’une fonction  $f(x)$  et que son domaine de définition est la bande du plan complexe  $s_R \in ]s_{R_1}; s_{R_2}[$ , pour tout  $c \in ]s_{R_1}; s_{R_2}[$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds \quad (3)$$

Posées sur la base de deux relations assez limpides pour un mathématicien actuel connaissant tant soit peu les arcanes des

fonctions analytiques [12], les transformées de Mellin et de Mellin Inverse semblent se placer dans la droite ligne des transformées de Fourier et de Laplace, au même titre que d’autres transformations beaucoup moins connues comme la transformée de Hankel, les transformées  $K$  et  $Y$  ou la transformée de Stieltjes (voir par exemple [6]). Et de même que la convolution est associée à la transformée de Fourier, la convolution de Mellin  $\hat{\star}$  se rattache à la transformée de Mellin  $\mathcal{M}$  par la définition :

$$\begin{aligned} r(x) = p(x) \hat{\star} q(x) &= \int_0^\infty p\left(\frac{x}{y}\right) q(y) \frac{dy}{y} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}(r) &= \mathcal{M}(p) \mathcal{M}(q) \end{aligned} \quad (4)$$

Néanmoins deux points étranges subsistent. Le premier réside dans la difficulté de trouver dans les articles de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle l’origine exacte de la paternité de Mellin à la transformation définie par les relations 1 et 3. Le second réside dans le sempiternel second rôle que cette transformation joue face aux incontournables transformées de Laplace et de Fourier : or, comme le souligne Butzer [11], il est temps de faire jouer un rôle totalement indépendant à la transformée de Mellin, sans la ramener de force à une transformée de Fourier ou de Laplace par changement de variable. Et pour montrer certains aspects fondamentaux de la transformée de Mellin, rappelons qu’une fonction  $K(x)$  est un **noyau de Fourier** si elle vérifie [13] :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_0^\infty K(yz) f(y) dy \\ \Leftrightarrow f(y) &= \int_0^\infty K(yz) \phi(z) dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Dans ce cas, la transformée de Mellin de ce noyau,  $\kappa(s)$ , vérifie :  $\kappa(s) \kappa(1-s) = 1$ , . C’est le cas des transformées en cosinus, en sinus, de Hankel . . .

L’objectif de cet article est donc d’analyser la genèse de la transformée de Mellin, et de tenter –partiellement du moins– de voir quelques domaines d’application dans lesquels elle est devenue incontournable.

## 2 Les travaux de Mellin

### 2.1 La fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et les fonctions hypergéométriques

A la mort de Mellin (1933), Lindelöf, ancien doctorant de Mellin, publie sa nécrologie dans “Acta Mathematica” [24] en donnant une trentaine de références sur les articles de Mellin. Ces articles ont été publiés principalement dans “Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica”, d’abord en suédois, puis en allemand, ainsi que dans “Acta mathematica”. Or l’article de Lindelöf s’avère parsemé d’inexactitude dans ses références précises : ce sont les références de Lindelöf que l’on retrouve ensuite dans quasiment toutes les publications citant Mellin, avec les mêmes erreurs. Grâce à la numérisation systématique des références, dont fort heureusement les “Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica” [1], il est possible –avec un peu de patience– de retrouver les bonnes références, et ainsi se faire une idée plus précise de la démarche de Mellin.

Les premiers articles de Mellin sont parus dans “Acta Mathematica” en 1883 [25, 26]. Ils témoignent chez ce scientifique d’une grande maîtrise dans les liens entre produits infinis et fonctions Gamma. Ce thème va très vite conduire Mellin à s’intéresser aux fonctions hypergéométriques (la référence [27] a été incontournable dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle pour tout article traitant des fonctions hypergéométriques). Intégrant dans ses travaux la fonction  $\zeta$  de Riemann, Mellin semble trouver une certaine plénitude en développant les concepts d’intégrales dans le plan complexe<sup>1</sup> et en associant –enfin– les deux relations définissant la transformée que la postérité a associé à son nom. Ces deux relations se trouvent effectivement dans l’article [27], –mais curieusement à quelques pages d’intervalle–, dans le cas particulier de la fonction

$$F(z) = \frac{\Gamma(z - a_1) \dots \Gamma(z - a_p)}{\Gamma(z - a_1) \dots \Gamma(z - a_q)} \quad (6)$$

à partir de laquelle Mellin, s’inspirant des travaux de Pincherle, définit une fonction  $y(x)$  :

$$y = = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(z - a_1) \dots \Gamma(z - a_p)}{\Gamma(z - a_1) \dots \Gamma(z - a_q)} x^{-z} dz \quad (7)$$

qui est une fonction hypergéométrique (un scientifique du XXI<sup>ème</sup> siècle y verrait simplement un cas particulier de fonction de Meijer [6]). Un autre point incontournable de cet article est la généralisation de cette transformation à des fonctions de deux variables.

Il est curieux de noter que jamais Mellin ne semble avoir écrit un article détaillant dans le cas le plus général “sa” transformation C’est Hardy qui, dans son article *On Mellin’s inversion formula* de 1917 [21] et citant [27], attribue pour la postérité la paternité de la paire de relations 1 et 3 à Mellin. On peut remarquer qu’à cette époque Hardy travaillait en collaboration avec Ramanujan, et que, au final, le théorème maître

de Ramanujan s’exprime finalement assez clairement grâce à la transformée de Mellin :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k!} (-x)^k \Leftrightarrow \mathcal{M}(f) = \Gamma(s)\phi(s) \quad (8)$$

Mais, très curieusement, c’est la physique théorique qui s’est emparée la première de cet article et de ce nouvel outil avec Fowler [19] en 1921.

### 2.2 La transformée de Mellin dans la littérature du XX<sup>ème</sup> siècle

Il faut attendre le milieu des années 30 pour voir apparaître la transformée de Mellin dans les ouvrages d’analyse [35].

En 1936, Meijer généralise les travaux de Mellin sur les fonctions hypergéométriques aux fonctions dites de Meijer, qui, hommage à Mellin, ne sont définies qu’implicitement par transformée de Mellin inverse de produits et rapports de fonctions Gamma [6]. A la fin des années 40, Erdélyi lança le “Bateman Manuscript Project”, principalement fondé sur les notes du célèbre mathématicien Harry Bateman (1882-1946) [15] et qui déboucha sur 5 volumes incontournables (tables d’un certain nombre de transformations, définition des fonctions transcendentes, . . .). C’est dans un de ces ouvrages [5] que la communauté scientifique trouve pour la première fois des tables de transformées de Mellin (directe et inverse).

La France se distingue en publiant en 1959 un ouvrage partiellement dédié à la transformée de Mellin [13] –mais faisant la part belle à la transformée de Laplace-Abel comme passerelle vers la transformée de Mellin– et, en 1972, des tables bien plus fournies que celles du Bateman [14].

Il faudra attendre 1974 pour trouver la publication d’une table complète (Oberhettinger [32]) et ce ne sera finalement qu’en 1997 que Butzer [11] –c’est à dire un siècle après les articles fondateurs de Mellin– montre qu’il faut voir la transformée de Mellin comme une transformée à part entière, et non comme une simple variante d’une autre transformée.

## 3 Les applications de la transformée de Mellin

Il n’est bien évidemment pas possible dans cet article de citer toutes les applications dans lesquelles la transformée de Mellin joue un rôle majeur : en particulier ne seront pas abordées ses utilisations en physique théorique, domaine pourtant pionnier en la matière, ni en mathématiques (comme son rôle dans les sommes harmoniques, Flajolet [18]). Les exemples donnés dans ce paragraphe –qui se cantonnent aux domaines liés au traitement du signal et des images– ne sont qu’illustratifs et montrent d’une certaine manière que le rôle de la transformée de Mellin se place le plus souvent comme une transformée classique (Fourier) ramenée en échelle logarithmique au lieu de lui laisser sa place spécifique.

<sup>1</sup>nécessitant alors l’utilisation de la fonction Gamma définie sur  $\mathbb{C}$ .

### 3.1 Traitement du signal et des images

Certains signaux sont naturellement associés à une transformation logarithmique. Sur des signaux de type biologique, Altes utilise donc la transformation de Mellin [2] et, dans un cadre temps-échelle, Escudié [17] utilise une convolution de Mellin. Bertrand et al. [7] unifie la démarche pour les distributions temps-fréquence affines.

Les signaux 2-D sont aussi un vaste domaine d'application de la transformée de Mellin. Suite aux travaux visionnaires de Brouil et Smith [10] qui ont introduit probablement les premiers la transformée de Fourier-Mellin en 1967, c'est peut être Johnson ([22], 1980) qui a été l'un des premiers à l'utiliser en traitement radar. Cette transformation est maintenant un opérateur classique du traitement des images.

Enfin notons les travaux de Brienne [9] dans le domaine de l'automatique puisque la transformée de Mellin a un lien naturel avec l'opérateur  $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ .

### 3.2 Modélisation physique

A côté des signaux biologiques, d'autres domaines de modélisation physique peuvent bénéficier d'une approche "à la Mellin". En tissant les liens entre transformée de Mellin et transformée de Lamperti, Borgnat [8] a ouvert de nouvelles voies en turbulence. Et on peut aussi noter que l'atténuation dans les tissus biologiques [3] s'associe à une convolution de Mellin, ce qui permet, par déconvolution de Mellin, d'éliminer les effets de l'atténuation dans les milieux homogènes.

### 3.3 Modélisation des lois définies sur $\mathbb{R}^+$

En 1947, Epstein jette les bases d'une approche extrêmement prometteuse dédiée aux lois de probabilités définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Il montre que deux lois opérant de manière multiplicative donnent naissance à une loi qui est simplement la convolution de Mellin des deux lois initiales. Cette idée va mener Springer [33] à développer, à l'aide de logiciels de calcul formel très innovants à l'époque, des outils d'estimation de paramètres de lois de probabilité manifestement très utiles dans son domaine (cet article s'appuie sur un rapport de recherche des *General Motors Defense Research Laboratories* de 1964) et peut être trop visionnaires pour l'époque. Dans le même temps (1959), Paul Lévy [23] propose une esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires, et qui fut malheureusement sans suite.

Il fallut attendre la fin des années 90 et les travaux de Badeau [4] et Nicolas [29] pour que la convolution de Mellin reprenne une place majeure dans l'étude des lois de probabilités définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Le concept des "statistiques de Mellin" (appelées aussi statistiques de deuxième espèce) allait pouvoir d'imposer : le remplacement de la transformée de Fourier par la transformée de Mellin pour définir la "fonction caractéristique de deuxième espèce" a permis un cadre théorique [30] solide et riche d'applications. Par exemple, la notion de "log-cumulants" permet de nos jours une technique d'estimation de paramètres de lois beaucoup plus

efficace que la traditionnelle méthode des moments, bien adaptée pour des lois définies sur  $\mathbb{R}$ , mais moins pour des lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Notons qu'en économie, et dans une démarche totalement parallèle aux travaux sus-cités, Tagliani [34] s'est fortement appuyé sur la transformée de Mellin dans ses modélisations statistiques, mais sans proposer une définition des "statistiques de Mellin".

En intégrant à ce cadre les fonctions de Meijer [31], les log-statistiques ouvrent définitivement une approche innovante sur les lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ , en particulier dû au fait qu'une primitive d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer (ce qui permet d'avoir une expression analytique de la fonction de répartition) et au fait que des plateformes comme Python ont des outils calculant les fonctions de Meijer.

## 4 Conclusions

L'histoire de la transformée de Mellin montre comment une approche fondée sur l'étude des fonctions hypergéométriques a pu déboucher sur des techniques innovantes d'analyse et de traitement dans de nombreux domaines scientifiques. Le fait de pouvoir disposer de documents numériques ouvre des portes à des études historiques permettant d'analyser l'évolution des travaux de scientifiques célèbres, mais aussi à découvrir les cloisons qui peuvent encore exister entre certains domaines. Ce serait un challenge pour le XXI<sup>ème</sup> siècle que de proposer une unification de tous ces travaux et de donner enfin à Mellin un rôle de premier plan dans nos fondamentaux mathématiques.

## References

- [1] <http://www.biodiversitylibrary.org>
- [2] R.A. Altes. *The Fourier-Mellin transform and mammalian hearing*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 63, pp.174-183(1978)
- [3] M. Auphan, J.M. Nicolas. *Tissue ultrasonic attenuation well modeled by a Mellin convolution*. Acoustical Imaging 12, pp 413-422, 1982, Springer
- [4] R.Badeau. *Transformation de Mellin : aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives*. Rapport ENST99D009
- [5] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi *Bateman manuscript project. Tables of Integral Transforms, Vol 1*. McGraw-Hill - 1954
- [6] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi *Bateman manuscript project. Higher transcendental functions : volume I and II*. McGraw-Hill, 1953.
- [7] J. Bertrand, P. Bertrand, and J. P. Ovarlez. *The Mellin transform*. The Transforms and Applications Handbook, A. D. Poularikas, Ed. CRC & IEEE Presses, 2000, ch. 11

- [8] P. Borgnat. *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées: variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence*. Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002
- [9] J.P. Brienne, D. Dubois, L. Povy, H. Baussart. *The Mellin transform to control system described by an implicit derivative transmittance*. UKACC International Conference on control, 1998
- [10] J. K. Brousil and D. R. Smith. *A Threshold Logic Network for Shape Invariance*. IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-16, Vol. 6, 1967
- [11] Paul L. Butzer, S. Jansche. *A direct approach to the Mellin transform*. The journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 3, N° 4, 1997
- [12] H. Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* Hermann, 1961
- [13] S. Colombo. *Les transformations de Mellin et de Hankel*. Centre National de la Recherche Scientifique, 1959.
- [14] S. Colombo, J. Lavoine. *Transformations de Laplace et de Mellin, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 169*. Gauthier-Villars, 1972.
- [15] A. Erdélyi *Obituary notices of fellows of the royal society, N° 15, février 1947, vol. 5*.
- [16] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics* Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379
- [17] B. Escudié, A. Grossman. *Une représentation bilinéaire en temps et en échelle*. GRETSI'91, 1991, pp 33-35.
- [18] P. Flajolet, X. Gourdon, P. Dumas. *Mellin Transforms and Asymptotics: Harmonic Sums*. Theor. Comput. Sci. 144 (1&2): 3-58 (1995)
- [19] R.H. Fowler. *A simple extension of Fourier's integral theorem and some physical applications, in particular to the theory of quanta*. Proc. R. Soc. Lond. A, Vol 99 (1921), pp 462-471
- [20] R. Godement. *Analyse mathématique III : Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann*. Springer Verlag, 2002.
- [21] G.H. Hardy. *Notes on some points in the integral calculus : On Mellin's inversion formula* Messenger of Mathematics, vol. 47, pp 178-184, 1917-1918
- [22] Lyle H. Johnson. *The Shift and Scale Invariant Fourier-Mellin Transform for Radar Applications* Massachusetts inst of tech Lexington Lincoln lab., 1980
- [23] P. Lévy. *Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires*. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 76 (1959), pp 59-82
- [24] E. Lindelöf. *Robert Hjalmar Mellin*. Acta Mathematica, Vol. 61, N° 1, pp 1–4, 1933, Springer
- [25] H.R Mellin. *Eine Verallgemeinerung der Gleichung  $\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$*  Acta Mathematica, Vol. 3, 1883, pp 102–104, Springer
- [26] H.R Mellin. *Über Gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte*. Acta Mathematica, Vol. 3, 1883, pp 322–324, Springer
- [27] H.R Mellin. *Om definitiva integraler, hvilka för obegränsadt växande värden af vissa heltaliga parametrar hafva till gränser hypergeometrisk funktioner af särskilda ordningar* Annales AcademiæScientiarum FennicæMathematica, t 20, 1895
- [28] H.R Mellin. *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die theorien der Gamma und hypergeometrischen Functionen*. Annales AcademiæScientiarum FennicæMathematica, t 21, 1896
- [29] JM Nicolas, A. Maruani, R. Badeau. *Les moments d'ordre inférieur : Principes et application au filtrage des images RSO*. RFIA2000, Paris, janvier 2000
- [30] J-M Nicolas, *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l'analyse des lois d'images radar*, Traitement du signal, vol 19, No 3, pp 139–167, 2002.
- [31] J. M. Nicolas, Guillaume Quin, Béatrice Pinel-Puysségur. *Application des lois de Meijer à l'imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) : Calcul d'images "multi-vues géométriques"* GRETSI 2013, Brest, France, Septembre 2013.
- [32] F. Oberhettinger. *Tables of Mellin Transform*. Springer Verlag, 1974
- [33] M.D. Springer, W.E. Thompson *The distribution of products of independent random variables* J. SIAM Appl. Math., vol. 14, no 3, pp 511-526, Mai 1966
- [34] A. Tagliani *Recovering a probability density function from its Mellin transform* Applied Mathematics and Computation 118 (2001) pp 151-159
- [35] E.C. Titchmarsh *Introduction to the theory of Fourier Integrals* Clarendon Press, Oxford, 1937
- [36] Zwicke, P.E. and I. Kiss, Jr. *A new implementation of the Mellin transform and its application to radar classification of ships*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 5 (1983), number 2, pp. 191-199.