

# Traitement d'images avec un système non linéaire

Savério MORFU<sup>1</sup>, Patrick MARQUIÉ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire LE2i, FRE2005, CNRS, Arts et Métiers,  
Université de Bourgogne Franche-Comté, F-21000 Dijon, France.  
smorfu@u-bourgogne.fr, marquie@u-bourgogne.fr

**Résumé** – Cette communication porte sur la présentation d'un outil de traitement d'images s'inspirant des processus de réaction-diffusion. Cet outil s'appuie sur des équations différentielles non linéaires et tire plus particulièrement profit des propriétés de multistabilité liées à la non linéarité de ces processus de diffusion. Certaines caractéristiques d'une image peuvent ainsi être extraites.

**Abstract** – Nonlinear differential equations are used to extract some features of an image. The proposed processing tool is based on the properties of multistability inherited from the nonlinearity of the considered reaction-diffusion equations.

## 1 Introduction

Depuis l'introduction de la notion de Réseau Cellulaire non Linéaire par L.O. Chua, un certain nombre de tâches de traitement d'images ont pu être mises en place avec ces réseaux dans des contextes assez variés [1, 2, 3, 4]. Ces systèmes, dont la particularité est de pouvoir être intégrés électroniquement, tirent profit des propriétés des équations différentielles non linéaires qui régissent leur fonctionnement. Parmi les équations différentielles les plus utilisées à des fins de traitement d'images, on peut citer les équations de réaction-diffusion qui ont permis, par exemple, d'améliorer le contraste d'images ou de réduire leur bruit [5, 6].

On se propose dans un premier temps d'analyser les propriétés d'un système d'équations différentielles non linéaires de ré-

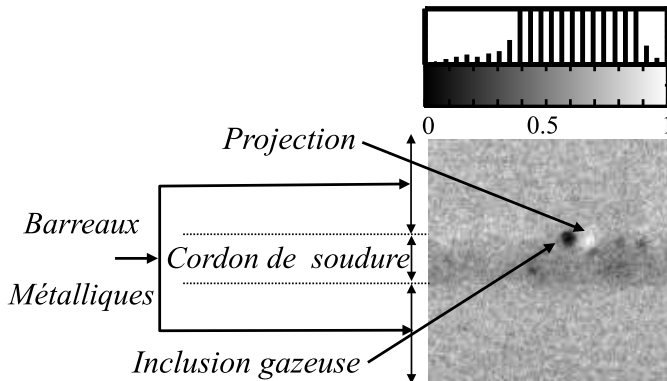


FIGURE 1 – Image à traiter et son histogramme fournis par le Laboratoire LCND, CEA Valduc. La radiographie présente une projection de matière en blanc, une inclusion gazeuse en gris foncé, le cordon de soudure en gris clair et les 2 barreaux métalliques soudés qui constituent le fond de l'image.

action-diffusion afin de mettre en évidence ses propriétés de multistabilité. Une fois cette analyse effectuée, on se propose de tirer profit de cette propriété de multistabilité pour extraire certaines caractéristiques d'une image, qui sont détaillées à la figure 1. Pour cette radiographie représentant la soudure de deux barreaux métalliques, il s'agit d'extraire les zones d'intérêts suivantes :

- Le cordon de soudure, zone de contact entre les deux barreaux métalliques
- L'inclusion gazeuse qui a eu lieu lors de la soudure.
- Une projection de matière qui a eu lieu lors de la soudure.
- Les deux barreaux métalliques.

## 2 Le système d'équations différentielles non linéaires considéré

D'un point de vu physique, le système d'équations considéré modélise le comportement d'un réseau de particules de masse  $m$  couplées par des ressorts de raideur  $D$  et soumises à une force non linéaire  $f(X_{i,j})$  dérivant d'un potentiel  $\Phi(X_{i,j})$ . Ce système ainsi que les deux cas de potentiels qui seront considérés dans cette communication sont représentés à la figure 2 où  $X_{i,j}$  représente le déplacement de la particule de coordonnées  $(i, j)$  et  $X_{i,j}^0$  sa position initiale (à  $t = 0$ ).

Le principe fondamentale de la dynamique, appliqué au réseau de la figure 2, permet d'exprimer le déplacement  $X_{i,j}$  de la particule de coordonnée  $(i, j)$ . En régime suramorti, (c'est à dire quand l'inertie est négligeable devant les frottements), on obtient le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{dX_{i,j}}{dt} = -\frac{d\Phi(X_{i,j})}{dX_{i,j}} + D \sum_{(k,l) \in Nr} (X_{k,l}(t) - X_{i,j}(t))$$

avec  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M.$  (1)

$Nr$  représente le voisinage soit  $Nr = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}$ .

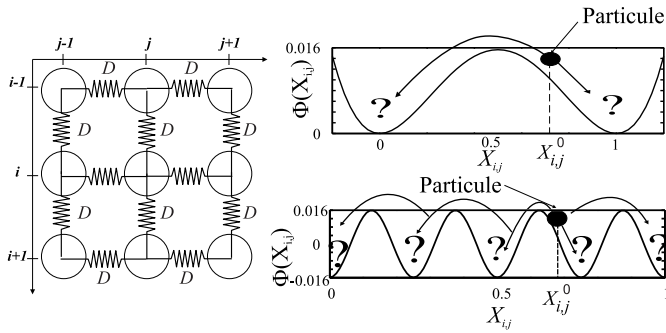


FIGURE 2 – A gauche, représentation du réseau à 2 dimensions de particules de masse  $m$ .  $D$  représente la raideur des ressorts couplant les différentes masses. A droite, les deux cas de potentiel envisagés auxquels est soumise chaque particule : en haut cas bistable, en bas cas multistable.

1),  $(i, j - 1)$  dans le cas de 4 voisins, sauf pour les bords et les 4 coins du réseau où respectivement 3 et 2 voisins directs sont considérés. Enfin, deux cas de potentiels  $\Phi$  dérivant de la force  $f$  seront envisagés :

- Le premier cas, qui correspond au potentiel bistable de la figure 2, est défini par la force

$$f(X) = -\frac{d\Phi(X)}{dX} = -X(X - \alpha)(X - 1), \quad (2)$$

où le paramètre  $\alpha$  sera choisi égal à 0.5.

- En ce qui concerne le potentiel multistable de la Fig. 2, il s'obtiendra avec la force  $f$  telle que

$$f(X) = -\frac{d\Phi(X)}{dX} = -\beta(n - 1) \sin [2\pi(n - 1)X], \quad (3)$$

$n$  étant un entier fixant le nombre de minima du sinus sur l'intervalle  $[0; 1]$  et  $\beta$  ajustant la valeur des extrema du sinus. Ils seront fixés à  $n = 5$  et  $\beta = 9.82 \times 10^{-2}$ .

Enfin, la position  $X_{i,j}^0$  de chaque particule à l'instant  $t = 0$  définit les conditions initiales du système (1), soient

$$X_{i,j}(t = 0) = X_{i,j}^0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N \text{ et } j = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

A noter que pour effectuer du traitement d'images avec le système d'équations (1),  $X_{i,j}^0$  correspondra au niveau de gris du pixel  $i, j$  de l'image à traiter tandis que  $X_{i,j}(t)$  correspondra au niveau de gris de ce pixel après un temps de traitement  $t$ . L'image traitée s'obtiendra donc en résolvant le système (1) avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et de pas d'intégration  $dt = 0.01$  en appliquant l'image à traiter comme condition initiale.

### 3 Analyse de la stabilité du système : cas non couplé $D = 0$

#### 3.1 Définition des états stables et instables

Les zéros de la force  $f$  fournissent les états stables et instables du système que l'on notera  $X^*$ . L'analyse de stabilité

du système (1) s'effectue dans le cas où les particules ne sont pas couplées les unes aux autres ( $D = 0$ ) de telle sorte qu'elles sont soumises uniquement à la force  $f$  dérivant du potentiel  $\Phi$ . Pour déterminer si un état est stable ou non, il s'agit donc de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = f(X). \quad (5)$$

Il suffit ensuite d'analyser si  $X$  tend à converger vers une valeur (état stable) ou à s'en éloigner (état instable). Si on remplace la force non linéaire par sa version linéarisée autour du point  $X^*$ , qui sera stable ou instable, nous sommes amenés à résoudre

$$\frac{dX}{dt} = f_X(X^*)(X - X^*) + f(X^*), \quad (6)$$

où  $f_X$  représente la dérivée de la force  $f$  par rapport à  $X$ .

A la constante d'intégration  $C$  près, les solutions de cette équation sont [6]

$$X(t) = X^* + Ce^{f_X(X^*)t} - \frac{f(X^*)}{f_X(X^*)}, \quad (7)$$

Du fait de la fonction exponentielle, le signe de la dérivée  $f_X$  indique si  $X(t)$  converge ou s'écarte de la valeur  $X^*$  quand  $t \mapsto \infty$ . Par conséquent, si  $f_X(X^*) > 0$ ,  $X^*$  est instable tandis que si  $f_X(X^*) < 0$ ,  $X^*$  est stable.

Pour le potentiel de la figure 2 dérivant de la force cubique  $f$ , nous pouvons donc déduire que les états stables sont 0 et 1 et qu'ils correspondent aux positions des fonds de puits de potentiel. Au contraire,  $\alpha = 0.5$  est instable et ajuste la position du maximum local du potentiel.

En ce qui concerne le potentiel de la figure 2 dérivant de la force sinusoïdale  $f$ , les états instables seront notés  $X_{th,k}^*$  et sont définis par

$$X_{th,k}^* = (2k + 1)/(2(n - 1)) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

tandis que les états stables, noté  $X_k^*$ , s'exprime sous la forme

$$X_k^* = k/(n - 1) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Pour  $n = 5$ , si on se restreint à l'intervalle  $[0, 1]$ , correspondant à l'échelle de gris de l'image à traiter de la figure 1, nous obtenons les 4 états instables suivants :

$$X_{th,1}^* = \frac{1}{8}, X_{th,2}^* = \frac{3}{8}, X_{th,3}^* = \frac{5}{8} \text{ et } X_{th,4}^* = \frac{7}{8}.$$

Enfin, les états stables sur l'intervalle  $[0; 1]$  sont définis par :

$$X_0^* = 0, X_1^* = \frac{1}{4}, X_2^* = \frac{1}{2}, X_3^* = \frac{3}{4} \text{ et } X_4^* = 1.$$

#### 3.2 Evolution d'une condition initiale

Une fois les états stables et instables définis pour chacune des deux forces envisagées, nous pouvons analyser comment évolue une condition initiale  $X(t = 0) = X^0$  appliquée au système dans le cas non couplé. Il suffit de résoudre l'équation (5) avec différentes conditions initiales  $X^0 = X(t = 0)$ .

Dans le cas de la force cubique  $f$ , le déplacement  $X(t)$  d'une particule avec la condition initiale  $X^0$  est donné par [6] :

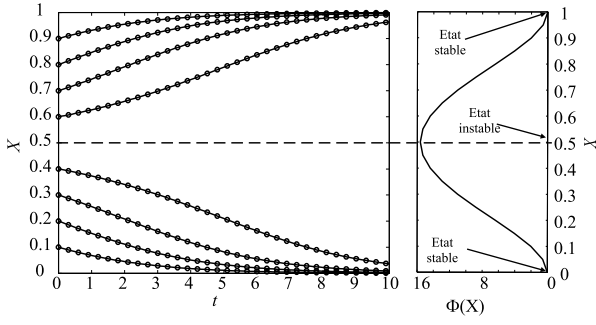


FIGURE 3 – Evolution du déplacement  $X(t)$  pour 8 conditions initiales comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Le potentiel bistable représenté à droite indique que les états stables 0 et 1 correspondent aux positions des fonds de puits et que l'état instable  $\alpha = 0.5$  définit la position du maximum local du potentiel.

$$X(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{X^0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{(X^0 - \frac{1}{2})^2 - X^0(X^0 - 1)} e^{-\frac{1}{2}t}} \right). \quad (10)$$

Cette relation est tracée en trait plein à la figure 3 pour 8 valeurs différentes de condition initiale  $X^0$  (ordonnée à l'origine de chaque courbe). Si la condition initiale excède l'état instable  $\alpha = 0.5$ , représenté à l'horizontal en pointillés, alors le système converge vers l'état stable 1. Dans le cas contraire, le système converge vers l'autre état stable 0. Ce résultat théorique est confirmé à la figure 3 par les symboles circulaires provenant d'une résolution de l'équation différentielle (5) avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

En ce qui concerne la force sinusoïdale  $f$ , si on note  $k$  le plus proche entier de  $(n - 1)X^0$ , le déplacement  $X(t)$  obéit à [6] :

$$X(t) = \frac{\arctan \left[ e^{-\beta(n-1)^2 2\pi t} \tan(\pi(n-1)X^0) \right]}{\pi(n-1)} + \frac{k}{n-1} \quad (11)$$

avec  $\beta = 9.82 \times 10^{-2}$  et  $n = 5$ .

A la figure 4, nous avons comparé cette relation (en trait plein) aux simulations numériques (cercle) pour différentes valeurs de

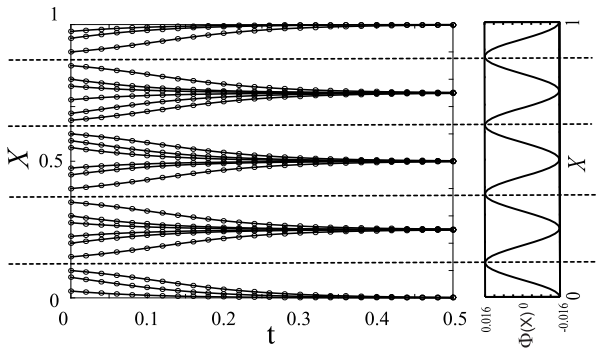


FIGURE 4 – Evolution du déplacement  $X(t)$  pour différentes conditions initiales comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Le potentiel multistable représenté à droite indique que les états stables sont définis par les fonds de puits et les états instables par les maxima du potentiel.  $\beta = 9.82 \times 10^{-2}$  et  $n = 5$ .

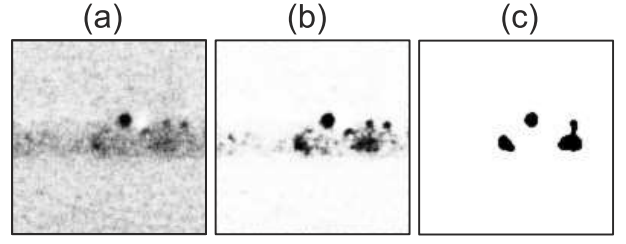


FIGURE 5 – Images traitées avec le système bistable pour les temps de traitement  $t = 4$  (a),  $t = 10$  (b) et  $t = 3000$  (c).  $\alpha = 0.5$   $D = 0.05$ .

conditions initiales. D'après cette figure, nous pouvons donc conclure que dans le cas non couplé ( $D = 0$ ), le système agit également comme un dispositif à seuil. En effet, les états instables  $X_{th,k}^*$  constituent les seuils et les états stables  $X_k^*$  les valeurs finales après seuillage (quand  $t \mapsto \infty$ ).

## 4 Cas $D \neq 0$ : Traitement d'images

Une fois les états stables et instables définis, nous pouvons maintenant considérer le cas couplé  $D \neq 0$ , c'est-à-dire l'équation (1) avec la force  $f$  qui pourra être soit cubique dans le cas bistable, soit sinusoïdale dans le cas multistable.

La particule de coordonnées  $i, j$  est toujours soumise à la force non linéaire  $f$  dérivant du potentiel  $\phi$  qui a tendance à l'attirer vers les états stables, mais également à la résultante des forces de rappel des ressorts exercées par les particules voisines : le système n'agit donc plus simplement comme un dispositif à seuil. Afin de réaliser du traitement d'image, le niveau de gris de chaque pixel de l'image à traiter est inséré comme condition initiale  $X_{i,j}^0$ . L'image traitée à l'instant  $t$  s'obtient en résolvant le système d'équations jusqu'à l'instant  $t$  où l'on relève la position de chaque particule qui correspond au niveau de gris de l'image traitée.

Nous avons relevé pour chacun des deux potentiels, les images traitées à différents instants  $t$  à la figure 5 dans le cas bistable et à la figure 6 dans le cas multistable. Dans le cas du réseau avec potentiel bistable, on s'aperçoit que les zones d'intérêt de l'image disparaissent progressivement en raison du caractère bistable du système qui attire l'image vers les états stables du

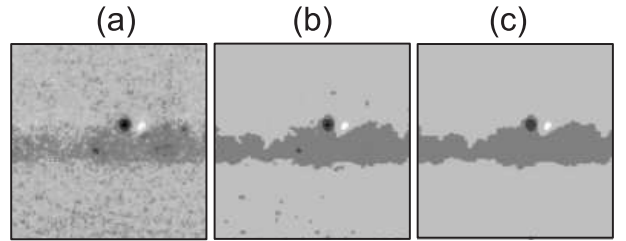


FIGURE 6 – Images traitées avec le système multistable pour les temps de traitement  $t = 0.2$  (a),  $t = 2$  (b) et  $t = 5000$  (c).  $D = 1.6$ ,  $\beta = 9.82 \times 10^{-2}$  et  $n = 5$ .

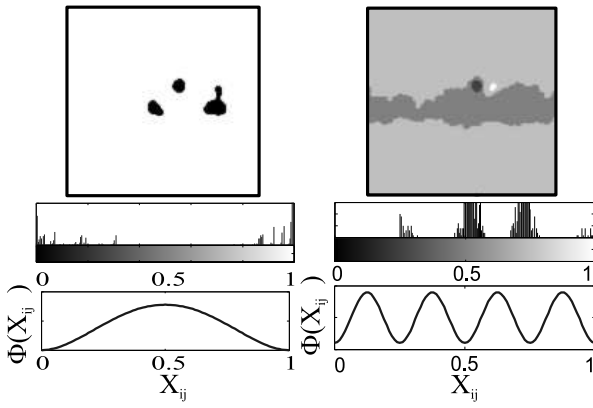


FIGURE 7 – Comparaison des traitements bistable et multistable obtenus avec les patterns des figures 5.(c) et 6.(c). L’histogramme de l’image traitée permet de visualiser la répartition des niveaux de gris dans chacun des potentiels et confirme qu’il ne s’agit pas d’une simple opération de seuillage.

système, c’est-à-dire les niveaux de gris 0 (noir) et 1 (blanc). Au contraire, comme le montre la figure 6, la multistabilité permet de donner plus de latitude au pattern qui finit par émerger à l’instant  $t = 5000$  avec les différentes zones d’intérêt de la radiographie de la figure 1.

La figure 7 permet de comparer les pattern finaux qui sont obtenus dans les cas bistable et multistable. En effet, en dessous de chaque pattern, nous avons analysé via l’histogramme, comment les niveaux de gris de l’image se répartissent dans chacun des potentiels. Il apparaît alors clairement que le processus de traitement n’est pas un simple seuillage et que les niveaux de gris ont tendance à se regrouper vers les minima du potentiel, c’est-à-dire vers les points de stabilité du système. Pour finir, il est intéressant de représenter le niveau de gris de chaque pixel de l’image traitée en fonction de celui de l’image de départ. Cette représentation, disponible à la figure 8 pour le système multistable, montre qu’il est possible de séparer 4 populations de pixels via des règles de seuillage définies par les points d’instabilité. Ainsi, si on utilise les points d’instabilité pour seuiller l’image traitée, nous obtenons les masques de la figure 9 qui permettent de délimiter les 4 zones d’intérêt de l’image, à savoir l’inclusion gazeuse, le cordon de soudure, les

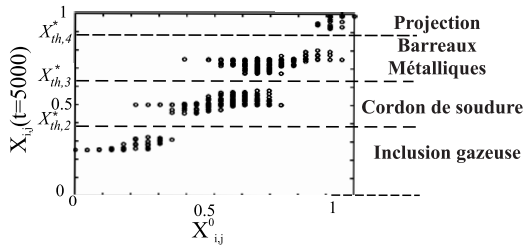


FIGURE 8 – Représentation des niveaux de gris  $X_{i,j}$  des pixels de l’image traitée de la figure 6.(c) en fonction de leur valeur initiale  $X_{i,j}^0$ .  $\beta = 9.82 \times 10^{-2}$ ,  $D = 1.6$ ,  $n = 5$   $t = 5000$ .

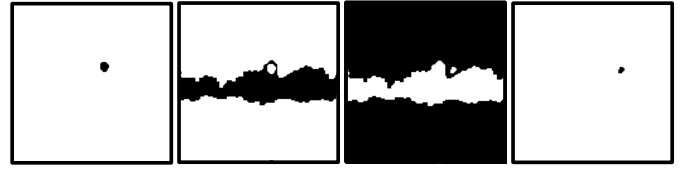


FIGURE 9 – Extraction des zones d’intérêt de l’image de la figure 1. L’image de la figure 6.(c), obtenue avec le système multistable, a subi des opérations de seuillage pour obtenir les différents masques donnant les régions d’intérêt de l’image.

deux barreaux métalliques et la projection de matière.

## 5 Conclusion

Nous avons pu mettre en évidence les propriétés de multistabilité d’un système non linéaire d’équations de réaction-diffusion. Du fait de la présence d’attracteurs multiples, il est possible de faire émerger des pattern stationnaires qui permettent d’isoler certaines caractéristiques d’une image. La mise en œuvre de cette propriété dans le contexte du traitement des images ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine des applications des réseaux cellulaires non linéaires. De plus, comparé aux approches de segmentation d’images classiques, comme celles basées sur la décomposition-fusion, ou sur la LPE, notre technique ne nécessite pas de filtrage intermédiaire et pourrait par conséquent être encore plus optimisée.

## Références

- [1] L.O. Chua, *CNN : A Paradigm for Complexity*, (World Scientific), singapore (1998).
- [2] P. Arena, A. Basile, M. Bucolo and L. Fortuna, *An Object Oriented Segmentation on Analog CNN Chip*, *IEEE Trans. on Circuits. and Syst.*, **50** (2003) 837–846.
- [3] C. Teuscher and A. Adamatzky, *Proc. of the 2005 Workshop on Unconventional Computing From cellular Automata to Wetware*, (Luniver Press Beckington), (2005).
- [4] G. Grassi, E. Di Sciascio, L.A. Grieco and P. Vecchio, *New Object-oriented segmentation algorithm based on the CNN paradigm*, *IEEE Trans. on Circ. and Syst.II : Express Brief*, **53** (2006) 259–263.
- [5] P. Perona and J. Malik, *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **12** (1990) 629–639.
- [6] S. Morfu, P. Marquié, B. Nofiélé and D. Ginjac, *Nonlinear systems for image processing*, *Advances in Imaging and Electron. Physics*, **152** (2008) 79-151.
- [7] S. Morfu, B. Nofiélé, and P. Marquié, *On the use of multistability for image processing*, *Phys. Lett. A*, **367** (2007) 192–198.