

Analyse comparative des codes de mélange du convertisseur comprimé MWC

Marguerite MARNAT¹, Michaël PELISSIER¹, Olivier MICHEL², Laurent ROS²

¹Univ. Grenoble Alpes, F-38000 Grenoble, France
CEA, LETI, MINATEC Campus, F-38054 Grenoble, France

²Univ. Grenoble Alpes, F-38000 Grenoble, France
GIPSA-Lab, F-38402 Saint-Martin-d'Hères, France
marguerite.marnat@cea.fr

Résumé – Le convertisseur MWC (Modulated Wideband Converter) est une architecture prometteuse pour l'échantillonnage sous la cadence de Nyquist de signaux multibandes analogiques. Son point délicat réside dans le choix des codes pseudo-aléatoires qui forment la matrice d'acquisition. Notre contribution consiste en une étude détaillée de l'influence de la sélection des lignes dans une famille de codes donnée. Tout d'abord nous investiguons la métrique de cohérence, primordiale pour réduire le nombre de branches parallèles du MWC. En outre une évaluation des propriétés isométriques, cruciales pour la robustesse par rapport au bruit, est proposée. Nous avons ensuite validé ces résultats théoriques à l'aide de simulations. L'étude met particulièrement en avant l'intérêt des codes circulants basés sur des séquences de Zadoff-Chu.

Abstract – The Modulated Wideband Converter (MWC) is a promising compressive sensing architecture for the sub-Nyquist sampling of analog multiband signals. Its bottleneck are the pseudorandom code sequences yielding the sensing matrix. Our contribution is a study of the influence of code families and of row selection based on different criteria. First the coherence, vital to limit the number of parallel branches, is investigated. Additionally, an approach that focuses on evaluating isometric properties, essential to noise robustness, is established. Third, the relevance of previous high-level metrics is validated thanks to a simulation platform. The study highlights the interest of circulant Zadoff-Chu codes.

1 Introduction

Le concept d'acquisition comprimée [1] permet de passer outre le compromis usuel entre bande passante, figure de bruit et consommation des Convertisseurs Analogique Numérique. Supposons qu'il existe une base dans laquelle peu de coefficients suffisent pour bien représenter le signal, l'idée est de mesurer juste l'information nécessaire au lieu d'acquérir des informations redondantes en échantillonnant à la fréquence de Nyquist. Il est alors possible de reconstruire le signal si les différentes mesures ont créé assez de diversité. Parmi ces 'Convertisseurs Analogique-Information' les modulateurs aléatoires se distinguent, et en particulier le Modulated Wideband Converter (MWC) introduit par Mishali [2]. Le principe du MWC, illustré Fig. 1, est de multiplier un signal K -parcimonieux (au sens ici de K sous-bandes fréquentielles actives) dans chacune des M branches parallèles avec des fonctions basées sur des séquences pseudoaléatoires. Pour chacune des branches $i \in \{1, \dots, M\}$, la fonction de mélange T_p -périodique $p_i(t)$ consiste au sein de chaque période en un code de N éléments mis en forme par des impulsions rectangulaire, et telle que $N \cdot f_p = \frac{N}{T_p} = 2 \cdot f_{max}$ où f_{max} est la borne supérieure de la plage de fréquence considérée. Ainsi le spectre est convolué avec un peigne de Dirac de paramètre f_p . Chaque bande, pondérée par le coefficient de Fourier du code correspondant, se trouve repliée en bande de

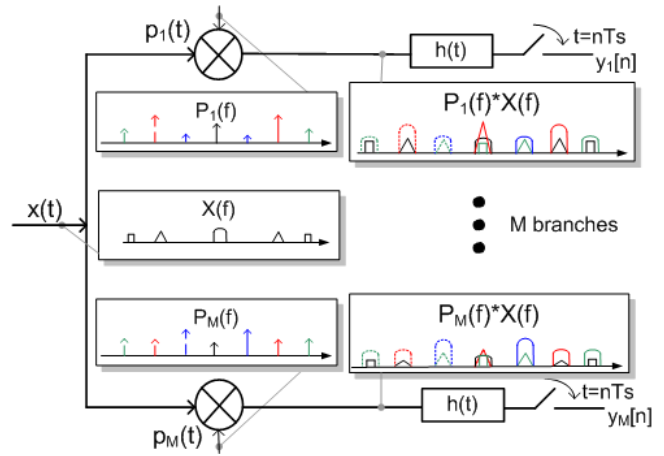


FIGURE 1: Processus d'acquisition du MWC

base. L'étape finale de filtrage passe-bas à fréquence de coupure $f_c = \frac{f_s}{2}$ (par défaut $f_s = f_p$) suivi d'un échantillonnage uniforme à f_s permet de n'acquérir que les échantillons en bande de base :

$$Y_i(e^{j2\pi f T_s}) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} c_{il} X(f - l \cdot f_p) \quad (1)$$

où $c_{il} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p_i(t) e^{-j2\pi l t / T_p} dt$, et $N = 2 \cdot L_0 + 1$

Les auteurs de [2] introduisent la matrice d'acquisition $\mathbf{A} = \mathbf{R}_T \cdot \Phi \cdot \Psi$ où \mathbf{R}_T est un opérateur sélectionnant M lignes parmi N , Φ décrit le processus de mesure et Ψ est la base dans laquelle le signal est parcimonieux. \mathbf{A} peut s'exprimer comme $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{D}$ où les lignes de \mathbf{C} sont les codes de chaque branche, $\tilde{\mathbf{F}}$ est un sous-ensemble réindexé de la matrice de DFT \mathbf{F} et \mathbf{D} est une matrice diagonale. Typiquement les codes implémentés sont des codes aléatoires générés par des processus indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), comme Bernoulli dans [2] nécessitant $M \cdot N$ bascules, ou des codes structurés, comme les codes de Gold [3] de taille $N = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Les éléments du code commutent à la fréquence de Nyquist, donc représentent la majorité de la consommation du MWC [4]. Limiter le nombre de branches M permet de minimiser la consommation et la surface du circuit, mais cela engendre des contraintes sur d'autres paramètres comme le degré de parcimonie K maximum qui peut être résolu. Des architectures sérialisées [5] ou réduites [2] sont proposées pour pallier ce problème. Les matrices circulantes \mathbf{C} sont particulièrement pertinentes car leur génération est facile et elles existent pour tout M . On peut les définir, voir (2), par un décalage du premier code dans le domaine temporel associé à $p_1(t)$ ou par la diagonale $\sigma_{k \in \{1, \dots, N\}}$ dans le domaine fréquentiel [6] :

code temporel dans la première branche

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} c_N & c_{N-1} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_N & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \dots & c_N \end{matrix} \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_N \end{pmatrix} \mathbf{F}, \quad (2)$$

où \mathbf{F} est la matrice de transformée de Fourier (DFT). Le premier code \mathbf{c} est alors l'IDFT de la séquence σ [7].

[8] est une étude comparative du choix des codes : matrices aléatoires ou matrices circulantes à phase aléatoire, et sélecteurs de lignes \mathbf{R}_T aléatoires ou déterministes. Aucune stratégie ne se distingue pour des signaux parcimonieux dans les bases usuelles, suggérant qu'un moindre caractère aléatoire suffit. En outre, les auteurs de [7] ont étudié les matrices déterministes échantillonnées aléatoirement générées à l'aide de l'IDFT d'une séquence σ telle que $|\sigma| = 1$, et $E[\sigma_{i \dots N} \sigma_{i+\tau \dots N+\tau}] \simeq \delta(\tau)$ (autocorrélation cyclique presque parfaite, condition C0). Pour des signaux parcimonieux en temps ou en fréquence, ce choix de \mathbf{C} donne de meilleures garanties de reconstruction que des matrices aléatoires, qui elles ne visent pas de domaine de parcimonie spécifique. Dans [7] la condition C0 est approximative, dans [9] C0 est satisfaite parfaitement avec des codes de Zadoff-Chu circulants échantillonnés aléatoirement. Les séquences de Zadoff-Chu sont des codes complexes à enveloppe constante, utilisés pour la synchronisation de systèmes de communications mobiles Long-Term Evolution (LTE) et définis par :

$$ZC_R[k] = e^{-j\pi Rk(k-1)/N}, \quad \text{pour } k = \{1, \dots, N\}, R \text{ premier avec } N \quad (3)$$

Ils ont une amplitude constante mais une phase variable, donc préservent la Densité Spectrale de Puissance (DSP) tout en créant de la diversité lors de la projection. Avec une condition de symétrie simple [10] sur les éléments $\sigma_{k \in \{1, \dots, N\}}$, il est possible de générer une matrice à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} k &= \{1; \frac{N}{2} + 1\} & \sigma_k &= \pm 1 \text{ avec même prob.} \\ 2 \leq k < \frac{N}{2} + 1 & & \sigma_k &= e^{j\phi_k} \\ \frac{N}{2} + 2 < k \leq N & & \sigma_k &= \sigma_{N-k+2}^* \end{aligned} \quad (4)$$

Nous nous proposons d'étudier la matrice réelle, notée 'ZC real', de la forme (2) avec σ_k obtenu à l'aide d'un code de Zadoff-Chu de longueur $N/2$, symétrisé selon (4). Notre étude commence avec l'analyse de l'influence de \mathbf{R}_T appliqués à différents codes \mathbf{C} . L'objectif premier est de limiter le nombre de branches. Pour cela il faut acquérir autant d'information que possible ce que nous proposons d'évaluer avec une métrique de cohérence. Le second objectif est de proposer une solution robuste au bruit. A cette fin nous ferons une estimation empirique des propriétés isométriques de \mathbf{A} . Enfin nous validerons nos conclusions en simulation.

2 Analyse de la cohérence

La cohérence μ [1] est le plus grand produit scalaire hermitien entre deux colonnes normalisées de la matrice \mathbf{A} :

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{i \neq j} \left(\frac{|\langle \mathbf{A}_{:,i}, \mathbf{A}_{:,j} \rangle|}{\|\mathbf{A}_{:,i}\| \|\mathbf{A}_{:,j}\|} \right), \quad (5)$$

où $\mathbf{A}_{:,i}$ est la i^{eme} colonne de \mathbf{A} . La cohérence décrit la nécessité de la quasi orthogonalité des projections entre elles, de manière à ce que chaque mesure capture une information nouvelle. Elle doit être la plus faible possible, avec une borne inférieure donnée par la borne de Welch [11] de façon à minimiser M à performance égale.

2.1 Cohérence des matrices usuelles

Il est important de savoir dans quelle mesure les performances sont influencées par la sélection des lignes au sein de la matrice d'acquisition. [9] se repose sur un sélecteur aléatoire pour prouver des propriétés géométriques tandis que dans [8] cela n'influence globalement pas les résultats. La cohérence est représentée pour différents schémas de sélection en fonction de M sur la Fig. 2. Sélectionner au hasard est noté "rand", prendre naïvement les premières lignes "ff", sous-échantillonner uniformément "sub". 'Random' correspond à des codes de Bernoulli. La Fig. 2 montre que la cohérence dépend davantage de la sélection des lignes au sein de la matrice que de la nature des codes. Bien que non représentée par souci de lisibilité, la cohérence des codes de Gold est similaire pour les autres sélecteurs étudiés. Les meilleures performances sont atteintes pour les codes de Zadoff-Chu circulants avec sélection aléatoire.

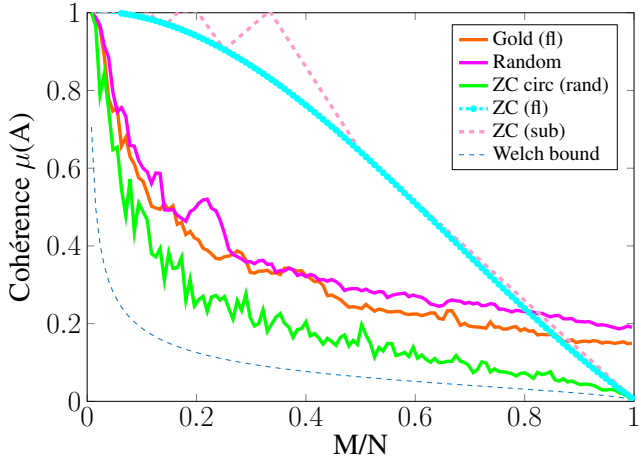


FIGURE 2: Comparaison de la cohérence ($N=255, R=1$)

3 Propriétés isométriques

Les propriétés isométriques de \mathbf{A} sont fondamentales dans le cadre théorique de l'acquisition comprimée, mais elles sont difficilement calculables. Elles assurent que deux signaux différents restent séparés dans l'espace comprimé.

3.1 Définition

La **Propriété d'Isométrie Restreinte (RIP)** [1] traduit la déformation d'un vecteur par sa projection dans un espace de dimension inférieure. Une matrice \mathbf{A} satisfait la RIP de paramètres (K, δ_K) s'il existe un $\delta_K \in [0, 1]$ tel que :

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (6)$$

pour tout vecteur K -parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

Le **Lemme de Johnson-Lindenstrauss (JLL)** [12] garantit la conservation des distances. Sur cette base, on dit qu'une matrice \mathbf{A} satisfait la propriété de JLL de paramètres (Q, K, δ_K) s'il existe un $\delta_K \in [0, 1]$ tel que :

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2 \quad (7)$$

pour tous vecteurs \mathbf{u} et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ éléments d'un ensemble de Q vecteurs K -parcimonieux. (7) est plus restrictif, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ n'étant pas nécessairement K -parcimonieux.

3.2 RIP et JLL empiriques

Une approche d'estimation statistique, bon indicateur bien qu'il manque les cas pathologiques, est présentée. Pour RIP nous générons $5 \cdot 10^8$ vecteurs tests de $N = 127$ composantes dont K non nulles uniformément distribuées sur le support et à valeurs uniformément distribuées sur $[-0, 5; 0, 5]$, subdivisés en $N_s = 10^3$ sous-ensembles de $N_v = 5 \cdot 10^5$ vecteurs. Les variations de la norme des vecteurs \mathbf{x} lors de la projection par une matrice d'acquisition de dimension 30×127 sont alors étudiées. Pour JLL, nous générons de façon similaire $N_s = 10^3$ sous-ensembles de $N_v = 700$ vecteurs ($2, 44650 \cdot 10^8$ distances) pour étudier la variation de la norme des distances entre

\mathbf{u} et \mathbf{v} lors de la projection. Afin d'estimer la déviation d'isométrie, des histogrammes de δ_k sont établis entre les groupes N_s , sur la Fig. 3 pour RIP et sur la Fig. 4 pour JLL. La constante de l'ensemble des vecteurs δ_{N_s, N_v} , la moyenne $E_{N_s}(\delta_{N_v})$ et l'écart-type $\sigma_{N_s}(\delta_{N_v})$ de δ pour différents sous-ensembles sont également consignés.

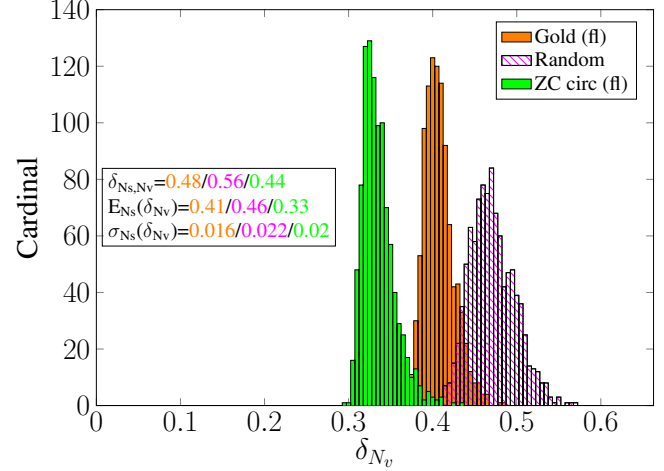


FIGURE 3: Histogramme de RIP- δ_{N_v} ($1000 \times 500000, K=6$)

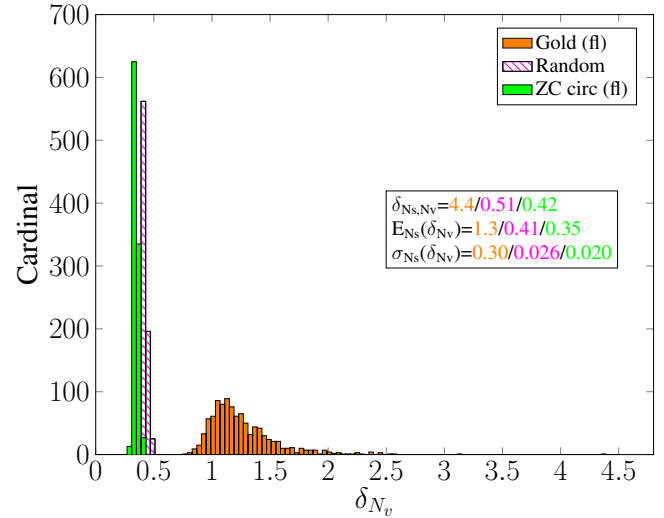


FIGURE 4: Histogramme de JLL- δ_{N_v} ($1000 \times 700, K=6$)

L'écart-type étant très faible pour l'ensemble des tests, l'estimation peut être considérée comme pertinente. Fig. 3 montre que RIP- δ est 1.27 fois plus petit pour les codes de Zadoff-Chu circulants que pour les codes aléatoires et 1.10 plus petits que pour les codes de Gold (0.44 au lieu de 0.56 et 0.48). Fig. 4 montre que JLL- δ est légèrement plus petit pour les codes de Zadoff-Chu circulants que pour les codes aléatoires et plus de 10 fois plus petits pour les codes de Gold (0.42 au lieu de 0.51 et 4.4). Notons que la tendance entre les différents codes est conservée pour d'autres taux de compression. Nous pouvons donc tabler sur de petites constantes RIP et JLL pour les matrices de Zadoff-Chu circulantes, en général.

4 Validation en simulation

Les propriétés isométriques de \mathbf{A} sont liées à la robustesse au bruit de mesure [13], et au bruit d'entrée, ce que nous souhaitons confirmer. Les résultats de simulation sont issus d'une plateforme Matlab inspirée de [2], avec $N = 127$, $q = \frac{f_p}{f_s} = 1$, et Orthogonal Matching Pursuit (OMP) comme algorithme. Le signal d'entrée multibande est donné par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{K/2} \sqrt{B} \text{sinc}(B(t - \tau_i)) \cos(2\pi f_i(t - \tau_i)), \quad (8)$$

où $K = 6$, $B = 78 \text{ MHz}$, $f_{max} = 5 \text{ GHz}$, $\tau_i = \{0.4, 0.6, 0.8\}$ et f_i sont choisies aléatoires uniformes.

La Fig. 5 représente le pourcentage de support correctement identifié pour un environnement soit sans bruit, soit avec 10 dB d'Input Signal to Noise Ratio (ISNR)[14].

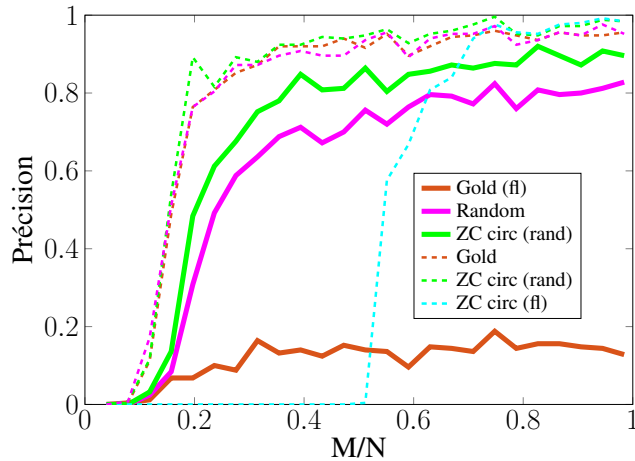


FIGURE 5: Précision du MWC en fonction de M/N ($K=6$, 200 essais, OMP), plein : 10 dB ISNR, pointillé : sans bruit

Dans le cas sans bruit (pointillé), les codes de Gold, Zadoff-Chu circulants et Bernoulli montrent de bonnes performances similaires. Remarquons que pour les codes de Zadoff-Chu circulants, le succès augmente à faible taux de compression ($M/N > 0.05$) pour une sélection aléatoire et à fort taux de compression ($M/N > 0.5$) pour une sélection premières lignes mais que la performance finale est la même. En fait cela confirme que le nombre de mesure affecte la cohérence (et 'fl' est un mauvais choix). Cependant, avec du bruit, les performances du code de Gold s'effondrent (à $M/N = 0.5$, 70% de perte) tandis que les codes de Zadoff-Chu se dégradent moins (10% de perte) que les codes aléatoires (20% de perte). Cela correspond à notre analyse des propriétés isométriques, les codes de Zadoff-Chu sont les plus robustes.

5 Conclusion

Cet article propose une méthodologie d'évaluation des codes pour le MWC. Les codes circulants basés sur des séquences de Zadoff-Chu sélectionnés aléatoirement sont prometteurs :

Ils peuvent être implémentés avec le stockage d'une seule séquence de taille N et d'un schéma de sélection de taille M . Par ailleurs ils ont une excellente cohérence, nécessitant donc un nombre de branches minimales. En outre, ils ont d'excellentes propriétés isométriques, et donc de robustesse contre le bruit, contrairement aux codes de Gold. Cette résilience a été vérifiée en simulation. La préservation des distances ouvre également des perspectives intéressantes pour des applications de classification.

Références

- [1] E. J. Candes *et al.*, "Compressive Sampling," *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006.
- [2] M. Mishali and Y. C. Eldar, "From Theory to Practice : Sub-Nyquist Sampling of Sparse Wideband Analog Signals," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Apr 2010.
- [3] R. T. Yazicigil, T. Haque, M. R. Whalen, J. Yuan, J. Wright, and P. R. Kinget, "Wideband Rapid Interferer Detector Exploiting Compressed Sampling With a Quadrature Analog-to-Information Converter," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Dec 2015.
- [4] T. Haque, R. T. Yazicigil, K. J. L. Pan, J. Wright, and P. R. Kinget, "Theory and Design of a Quadrature Analog-to-Information Converter for Energy-Efficient Wideband Spectrum Sensing," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Regular Papers*, Feb 2015.
- [5] O. Taheri and S. A. Vorobyov, "Segmented Compressed Sampling for Analog-to-Information Conversion : Method and Performance Analysis," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Feb 2011.
- [6] H. Rauhut, "Compressive Sensing and Structured Random Matrices," *Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery*, 2010.
- [7] K. Li, L. Gan, and C. Ling, "Convolutional Compressed Sensing Using Deterministic Sequences," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Feb 2013.
- [8] W. Yin, S. Morgan, J. Yang, and Y. Zhang, "Practical Compressive Sensing with Toeplitz and Circulant Matrices," in *Visual Communications and Image Processing 2010*, 2010.
- [9] X. Yang, "Research on Compressed Sensing and its Applications in Wireless Communications," Thesis, Macquarie University, 2015.
- [10] J. Romberg, "Compressive Sensing by Random Convolution," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009.
- [11] L. Welch, "Lower bounds on the maximum cross correlation of signals," *IEEE Trans. on Information Theory*, 1974.
- [12] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, "A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices," *Constructive Approximation*, 2008.
- [13] M. Davenport, "Random Observations on Random Observations : Sparse Signal Acquisition and Processing," Thesis, Rice University, 2010.
- [14] M. A. Davenport, J. N. Laska, J. R. Treichler, and R. G. Baraniuk, "The Pros and Cons of Compressive Sensing for Wideband Signal Acquisition : Noise Folding versus Dynamic Range," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Sept 2012.