

# Reconstruction régularisée basée sur un modèle non-linéaire de formation d'hologramme

Frédéric JOLIVET, Fabien MOMEY, Loïc DENIS, Corinne FOURNIER, Thierry FOURNEL

Univ. Lyon, UJM, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, Saint-Etienne

frederic.jolivet@univ-st-etienne.fr, fabien.momey@univ-st-etienne.fr

loic.denis@univ-st-etienne.fr, corinne.fournier@univ-st-etienne.fr, fournelt@univ-st-etienne.fr

**Résumé** – La microscopie sans lentille est une technique d'imagerie "bas coût", robuste et facile d'utilisation. Elle permet de reconstruire une image de la transmittance (absorption et phase) d'objets microscopiques. Ces dernières années des progrès importants ont été réalisés en holographie numérique grâce à la formalisation du problème de reconstruction d'image comme un problème inverse. Pour étendre le champ d'application aux objets étendus, nombreux, et/ou de phase, il est nécessaire de considérer un modèle non-linéaire de formation de l'hologramme, ainsi que d'utiliser une régularisation adaptée au mieux aux *a priori* que l'on a sur l'objet. Nous proposons ici une méthode de reconstruction basée sur un modèle non-linéaire de formation d'hologramme, et combinant deux régularisations.

**Abstract** – Lensless microscopy is a robust and user-friendly "low cost" imaging technique. It allows to recreate transmittance images (absorption and phase) of micro-objects. In recent years, important progress has been made in digital holography with the formalization of the image reconstruction problem as an inverse problem. To extend the field of applications to large, numerous, and/or phase objects, it is essential to consider a nonlinear hologram-image formation model, as well as to use a regularization adapted as best as possible to the *a priori* present in the object. We propose here an inverse problem method using a nonlinear hologram-image formation model, combining two regularizations.

## 1 Introduction

Le principe de l'holographie en ligne a été inventé en 1948 par Dennis Gabor [1]. Cette technique a profité par la suite de deux révolutions : l'avènement du laser dans les années 70, et la disponibilité de capteurs numériques à haute densité de pixels, ce qui permet de résoudre les franges d'interférences de l'hologramme. De plus l'utilisation des approches "problème inverse" qui sont basées sur la bonne connaissance du modèle de formation de l'hologramme, a permis de lever certaines des limites des méthodes de reconstruction holographique habituellement utilisées (artefacts d'image jumelle, effets de bord...) [2, 3, 4]. Le choix du modèle de formation de l'hologramme, ainsi que le choix de la pénalisation de la fonction coût permettant d'introduire des *a priori* sur l'objet, réduisent les erreurs de reconstruction [3, 4].

Nous proposons une nouvelle approche "problème inverse" utilisant un modèle non-linéaire de formation de l'hologramme en général utilisé pour l'holographie hors axe [2, 4], et combinant deux régularisations : une contrainte de parcimonie [3] permettant de réduire le bruit de fond, et une régularisation de lissage de type « préservation de bords » pour introduire un lissage spatial [5, 4].

Dans un premier temps la formulation du problème inverse est détaillée ; nous traitons ensuite à l'aide de cette méthode un hologramme expérimental obtenu avec un objet absorbant calibré (mire USAF1951), ce qui vise à déterminer et quantifier le gain apporté par cette nouvelle méthode. Enfin nous présentons un résultat préliminaire de reconstruction d'un objet déphasant issu d'une expérience de mécanique des fluides [6].

## 2 Résolution du problème inverse

Pour résoudre un problème inverse, il est important de construire un modèle direct de formation des données suffisamment précis. Dans le cas de la reconstruction d'hologrammes, il s'agit d'établir le lien entre la transmittance des objets et l'hologramme formé sur le capteur.

### 2.1 Le modèle direct

Nous considérons un objet partiellement opaque localisé dans un plan et illuminé par un faisceau incident collimaté, cohérent, de longueur d'onde  $\lambda$ . Cet objet est décrit comme une distribution complexe de transmittance  $t(x, y)$  (les grandeurs à valeurs complexes sont soulignées dans cet article) localisée dans un plan. Le paramètre  $z$  est la distance entre le capteur et le plan objet. Notons  $A_0$  l'amplitude complexe de l'onde incidente dans le plan objet.

---

Ce travail est soutenu financièrement par la Région Auvergne-Rhône-Alpes, et a été réalisé en partie dans le cadre du projet RESOURCES (CNRS Défi Imag'In 2017).

Selon le principe de Huygens-Fresnel, l'onde diffractée sur le plan capteur,  $\underline{A}_z$  est définie par

$$\underline{A}_z(x, y) = (\underline{h}_z * (\underline{A}_0 \cdot \underline{t}))(x, y), \quad (1)$$

où  $\underline{h}_z$  est le noyau complexe de propagation, et  $*$  est l'opérateur de convolution. Dans le régime de la diffraction de Fresnel (i.e,  $z^3 \gg \pi l^4 / (64\lambda)$ , où  $l$  correspond à une taille de l'objet),  $\underline{h}_z$  peut être approximé par [7],

$$\underline{h}_z(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left(\frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda z}\right). \quad (2)$$

Considérant l'onde référence  $\underline{A}_0$  comme plane, elle est donc uniforme dans tout l'espace objet. De ce fait, l'intensité  $I$  de l'hologramme enregistré sur le capteur peut être définie par :

$$I(x, y) = |A_0|^2 |(\underline{h}_z * \underline{t})(x, y)|^2, \quad (3)$$

On définit  $\underline{\vartheta}$  la distribution d'opacité complexe telle que  $\underline{t} = 1 - \underline{\vartheta}$ . Sachant que  $1 * \underline{h}_z = 1$ , l'intensité dans le plan de l'hologramme peut être décrite, à un coefficient multiplicatif et au bruit de mesure près, par :

$$I = |A_0|^2 m \quad \text{avec} \quad m(x, y) = |1 - (\underline{h}_z * \underline{\vartheta})(x, y)|^2. \quad (4)$$

Nous utiliserons la même discrétisation dans l'espace objet que dans l'espace du capteur et représentons par un vecteur  $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$  les données, par un vecteur  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  le modèle de l'hologramme calculé pour une transmittance discrétisée  $\underline{\vartheta} \in \mathbb{C}^n$ . Notons donc  $\underline{H}$  une matrice représentant l'opérateur linéaire modélisant la diffraction en chaque pixel de coordonnées (x,y) par une convolution 2D avec le noyau  $\underline{h}_z$  explicité dans le cas continu en (2). Le vecteur  $\underline{\vartheta}$  représente la transmittance complexe inconnue de l'espace objet discrétisé.

Le modèle de formation de l'hologramme en continu (4) peut donc se réécrire de façon discrétisée en un vecteur colonne  $\underline{m}$  (dépendant du vecteur  $\underline{\vartheta}$ ) défini par :

$$(\underline{m}_{\underline{\vartheta}})_k = |1 - (\underline{H}\underline{\vartheta})_k|^2, \quad (5)$$

où  $k$  représente l'indice du pixel.

## 2.2 Reconstruction régularisée

Le problème de reconstruction doit permettre de retrouver la distribution d'opacité  $\underline{\vartheta}$ . Nous proposons une inversion régularisée visant à minimiser la somme entre une attache aux données notée  $\mathcal{D}$  et un terme de régularisation noté  $\mathcal{R}$ . Le problème de reconstruction est formulé sous la forme d'un problème de minimisation :

$$\hat{\underline{\vartheta}} = \underset{\underline{\vartheta}}{\operatorname{argmin}} \left( \min_c (\mathcal{D}(\underline{\vartheta}, c)) + \mathcal{R}(\underline{\vartheta}) \right). \quad (6)$$

Si nous faisons l'hypothèse que l'hologramme est perturbé par un bruit blanc gaussien, l'attache aux données aura l'expression suivante,

$$\mathcal{D}(\underline{\vartheta}, c) = \|c \cdot \underline{m}_{\underline{\vartheta}} - \underline{d}\|_{\underline{W}}^2, \quad (7)$$

où  $c$  est égal à l'intensité de l'onde incidente  $|A_0|^2$ ,  $\underline{d}$  est l'hologramme mesuré, et  $\underline{W}$  est l'inverse de la matrice de covariance du bruit (diagonale puisque le bruit est supposé blanc) [8, 9, 10].

### 2.2.1 Estimation du gain optimal $c$

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'estimation du coefficient multiplicateur optimal  $c^*$  établi de la manière suivante,

$$c^* = \underset{c}{\operatorname{argmin}} \quad \|c \cdot \underline{m}_{\underline{\vartheta}} - \underline{d}\|_{\underline{W}}^2. \quad (8)$$

L'expression optimale de  $c$  est donc :

$$c^*(\underline{\vartheta}) = \frac{\underline{m}_{\underline{\vartheta}}^T \underline{W} \underline{d}}{\underline{m}_{\underline{\vartheta}}^T \underline{W} \underline{m}_{\underline{\vartheta}}}. \quad (9)$$

L'expression de l'attache aux données  $\mathcal{D}(\underline{\vartheta}, c)$  dépendant de  $\{\underline{\vartheta}, c\}$ , et explicitée en (7), peut donc se réécrire sous une forme ne dépendant plus que de  $\underline{\vartheta}$ ,

$$\mathcal{D}^*(\underline{\vartheta}) = \|c^*(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{m}_{\underline{\vartheta}} - \underline{d}\|_{\underline{W}}^2. \quad (10)$$

### 2.2.2 Reconstruction de la distribution d'opacité complexe $\underline{\vartheta}$

Le problème inverse étant mal-posé (non unicité de la solution), il est indispensable d'utiliser un terme de régularisation  $\mathcal{R}(\cdot)$  sur la distribution de l'opacité complexe  $\underline{\vartheta}$ . En notant  $\alpha$  et  $\beta$  des hyperparamètres de régularisation qui seront réglés pour chaque *a priori*, nous proposons une régularisation  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$  de la forme,

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(\underline{\vartheta}) = \alpha \left\| \begin{bmatrix} \Re(\underline{\vartheta}) \\ \Im(\underline{\vartheta}) \end{bmatrix} \right\|_1 + \beta \left( \mathcal{TV}_{\epsilon}(\Re(\underline{\vartheta})) + \mathcal{TV}_{\epsilon}(\Im(\underline{\vartheta})) \right). \quad (11)$$

La première des deux régularisations correspond à une contrainte de parcimonie (minimisation de la norme  $\ell_1$ ) sur les parties réelle et imaginaire de l'opacité complexe écrite  $\Re(\underline{\vartheta})$  et  $\Im(\underline{\vartheta})$ , ce qui favorise les objets parcimonieux. Le deuxième terme de régularisation a pour objectif de favoriser les objets continus par morceaux en appliquant une régularisation de type variation totale sur  $\Re(\underline{\vartheta})$  et  $\Im(\underline{\vartheta})$ , telle que,

$$\mathcal{TV}_{\epsilon}(\underline{u}) = \sum_k \sqrt{(\underline{D}_x \underline{u})_k^2 + (\underline{D}_y \underline{u})_k^2 + \epsilon^2}, \quad (12)$$

où  $\underline{D}_x$  et  $\underline{D}_y$  sont respectivement les opérateurs de différences finies dans la direction  $\vec{x}$  (respect. dans la direction  $\vec{y}$ ), approximation du gradient.  $\epsilon$  est un paramètre de relaxation permettant d'éviter la non-différentiabilité du terme  $\mathcal{TV}$ . Le choix d'utiliser une régularisation  $\mathcal{TV}$  relaxée est motivé par la perspective de reconstruire des objets biologiques qui peuvent posséder des transitions plus lisses que des bords francs. En augmentant la valeur de  $\epsilon$  nous tendons vers une régularisation quadratique, et donc nous favorisons ces transitions lisses.

Finalement nous proposons le problème de reconstruction visant à effectuer la minimisation suivante,

$$\hat{\underline{\vartheta}} = \underset{\underline{\vartheta}}{\operatorname{argmin}} \quad \mathcal{D}^*(\underline{\vartheta}) + \mathcal{R}_{\alpha, \beta}(\underline{\vartheta}). \quad (13)$$

### 2.2.3 Résolution du problème d'optimisation

Pour rendre possible l'utilisation d'algorithme d'optimisation ne traitant que des grandeurs réelles, nous reconstruisons en réalité deux quantités  $\vartheta_{re}$  et  $\vartheta_{im}$ , telles que  $\vartheta = \vartheta_{re} + i\vartheta_{im}$ . Nous utilisons la décomposition en partie positive et partie négative utilisée notamment par [11] afin de transformer le terme avec une norme l1 en un terme linéaire et ainsi se ramener à une fonction objectif différentiable.

Ces changements nous permettent d'optimiser la fonction de minimisation (13) tout en ayant à traiter un problème d'optimisation non-linéaire continue, différentiable, et sous contraintes de positivité. Ce problème peut être résolu au moyen de l'algorithme d'optimisation continue VMLMB [12]. Cet algorithme de type quasi-Newton à mémoire limitée permet d'imposer des contraintes de bornes sur la solution.

En ce qui concerne le coefficient optimal  $c^*$  décrit en (9), il est recalculé pour chaque pas de descente afin d'avoir une optimisation de  $\vartheta$  avec ce coefficient optimal réactualisé à chaque itération.

## 3 Expériences

Pour valider la méthode de reconstruction proposée, nous allons utiliser deux types de données expérimentales, avec d'une part un hologramme (Fig.1.a) obtenu à l'aide d'un objet réel calibré (mire USAF1951), et d'autre part un hologramme issu d'une expérience de mécanique des fluides imageant un objet de phase.

### 3.1 Résultats sur objet calibré

#### 3.1.1 Spécifications du montage expérimental

L'objet calibré est une mire de résolution USAF1951 (ThorLabs - réf. R1DS1P) que nous utilisons pour estimer la qualité de la reconstruction des petites et grosses structures. Le capteur utilisé est un capteur CMOS ayant un pixel pitch de  $2.2\mu m$  et la distance objet-capteur  $z$  est de  $5.15cm$ . Un laser de longueur d'onde  $405nm$  est utilisé pour illuminer l'objet.

#### 3.1.2 Qualité de la reconstruction

Plusieurs reconstructions sont comparées (Fig.1.b.c.d) : la rétro-propagation classique obtenue en appliquant une convolution avec le noyau  $\underline{h}_{-z}$  (2), l'approche inverse utilisant un modèle linéaire [3], et l'approche proposée avec un modèle non-linéaire. Dans les deux approches inverses, la régularisation de l'équation (11) est utilisée. Afin de quantifier la qualité de la reconstruction, nous comparons les résultats à l'aide d'une vérité terrain obtenue à partir du modèle numérique proposé par le constructeur. Cela

permet de comparer les PSNR de chaque résultat. Notons que les reconstructions "problème inverse" ont été obtenues avec les mêmes coefficients de régularisation, le même nombre d'itérations de l'algorithme VMLMB (100 itérations assurant une "bonne" convergence des deux méthodes), et sont affichées avec la même dynamique (Fig.1.c.d). Nous pouvons observer que la qualité de la

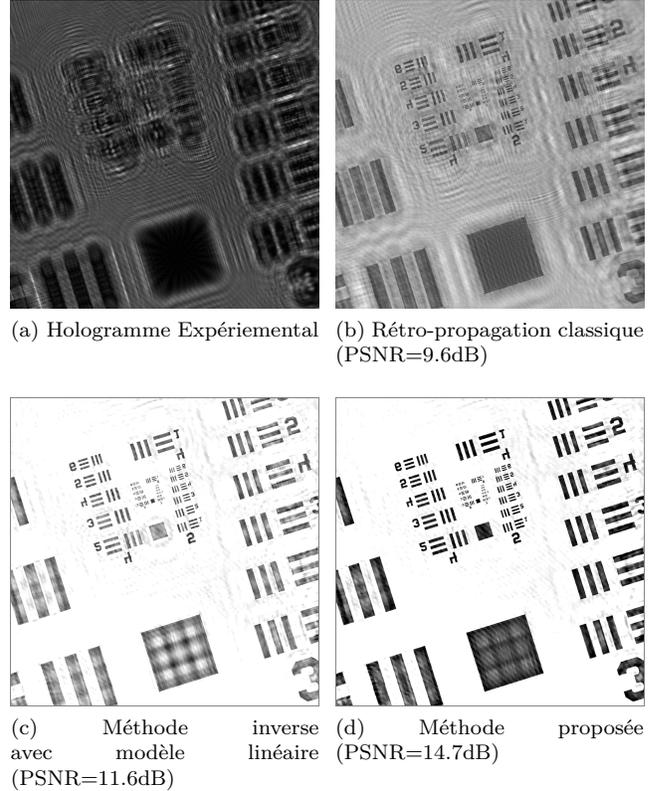


FIGURE 1 – Comparaison des reconstructions

reconstruction avec le modèle proposé offre un meilleur rapport signal sur bruit (PSNR=14.7dB) que la reconstruction avec un modèle linéaire [3](PSNR=11.6dB), qui offre elle-même un meilleur rapport signal sur bruit que la rétro-propagation classique (PSNR=9.6dB). Notons que les plus petites structures de cette mire USAF ont une taille de l'ordre de  $5\mu m$ .

#### 3.1.3 Temps de calcul

Si la qualité de reconstruction est à l'avantage de la méthode utilisant un modèle non-linéaire, en revanche le temps de calcul de celle-ci à un nombre fixé d'itérations est plus important. Par exemple, la reconstruction sur l'objet calibré (Fig.1) avec 100 itérations de VMLMB prend 35 minutes de calculs pour la méthode proposée contre 10 minutes pour la méthode avec modèle linéaire et seulement quelques secondes pour une rétro-propagation classique. Mais à temps de calcul équivalent la méthode pro-

posée permet d’obtenir une meilleure reconstruction en terme de PSNR (Fig.2). De plus des travaux ont montré qu’il était possible d’améliorer ce temps de calcul avec une implémentation sur GPU [13].

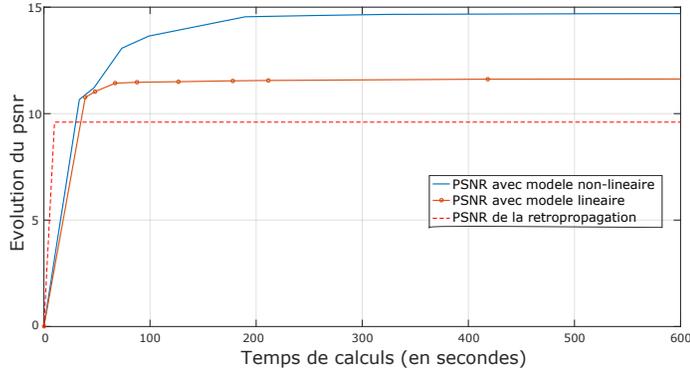


FIGURE 2 – PSNR en fonction du temps de calcul

## 3.2 Résultats sur un objet de phase

### 3.2.1 Montage expérimental

L’expérience consiste à observer le comportement d’une gouttelette d’éther en mouvement. Durant cette expérience, la goutte d’éther s’évaporant crée un panache [6]. Ce panache crée un déphasage, et donc un objet déphasant que nous reconstruisons à l’aide de la méthode proposée. On traite ici un seul hologramme de cette expérience (Fig.3.a).

Pour cette expérience une caméra rapide de  $800 \times 1280$  pixels, cadencée à  $3kHz$ , et ayant un pixel pitch de  $20\mu m$  est utilisée. La gouttelette d’éther est à  $z \sim 1m$  du capteur, et elle est illuminée avec un laser de longueur d’onde  $\lambda = 532nm$ .

### 3.2.2 Reconstruction de la phase du panache

Le diamètre de la gouttelette mesurée sur la figure 3.b est validée par une approche problème inverse paramétrique [8]. En effet en appliquant la règle  $rayon = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ , avec  $S$  la surface totale des pixels ”allumés”, nous obtenons un rayon de  $83.7\mu m$  quand l’approche paramétrique estime le rayon à  $84.6\mu m$ . D’autre part, on peut observer sur la reconstruction obtenue une partie imaginaire non-nulle qui met en évidence le déphasage (Fig.3.c).

## 4 Conclusion

La méthode présentée ici permet de faire de la reconstruction d’objet de phase, et les expériences ont mis en évidence que l’utilisation d’un modèle non-linéaire (plus

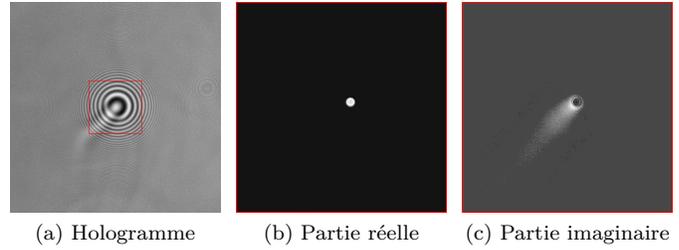


FIGURE 3 – Reconstruction du panache

précis que le modèle linéaire) se traduit par une réduction non négligeable de l’erreur de reconstruction. D’autre part le fait d’avoir une double régularisation augmente le champ d’application des objets reconstructibles. En effet, cela permet de réaliser la reconstruction à la fois de petits objets et d’objets plus étendus.

## Références

- [1] D. Gabor *et al.*, “A new microscopic principle,” *Nature*, vol. 161, no. 4098, pp. 777–778, 1948.
- [2] S. Sotthivirat and J. A. Fessler, “Penalized-likelihood image reconstruction for digital holography,” *JOSA A*, vol. 21, no. 5, pp. 737–750, 2004.
- [3] L. Denis, D. Lorenz, E. Thiébaud, C. Fournier, and D. Trede, “Inline hologram reconstruction with sparsity constraints,” *Optics letters*, vol. 34, no. 22, pp. 3475–3477, 2009.
- [4] A. Bourquard, N. Pavillon, E. Bostan, C. Depeursinge, and M. Unser, “A practical inverse-problem approach to digital holographic reconstruction,” *Optics express*, vol. 21, no. 3, pp. 3417–3433, 2013.
- [5] M. Marim, E. Angelini, J.-C. Olivo-Marin, and M. Atlan, “Off-axis compressed holographic microscopy in low-light conditions,” *Optics letters*, vol. 36, no. 1, pp. 79–81, 2011.
- [6] J. Marié, T. Tronchin, N. Grosjean, L. Méès, O. C. Öztürk, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance, “Digital holographic measurement of the lagrangian evaporation rate of droplets dispersing in a homogeneous isotropic turbulence,” *Experiments in Fluids*, vol. 58, no. 2, p. 11, 2017.
- [7] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [8] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, É. Thiébaud, and C. Goepfert, “Inverse-problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimization,” *JOSA A*, vol. 24, no. 4, pp. 1164–1171, 2007.
- [9] C. Fournier, L. Denis, M. Seifi, and T. Fournel, “Digital hologram processing in on-axis holography,” *Multi-dimensional Imaging*, vol. 0, pp. 51–73, 2014.
- [10] C. Fournier, F. Jolivet, L. Denis, N. Verrier, E. Thiebaud, C. Allier, and T. Fournel, “Pixel super-resolution in digital holography by regularized reconstruction,” *Applied Optics*, vol. 56, no. 1, pp. 69–77, 2017.
- [11] M. A. Figueiredo, R. D. Nowak, and S. J. Wright, “Gradient projection for sparse reconstruction : Application to compressed sensing and other inverse problems,” *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, vol. 1, no. 4, pp. 586–597, 2007.
- [12] E. Thiébaud, “Optimization issues in blind deconvolution algorithms,” in *Proc. SPIE*, vol. 4847, pp. 174–183, 2002.
- [13] Y. Endo, T. Shimobaba, T. Kakue, and T. Ito, “Gpu-accelerated compressive holography,” *Optics express*, vol. 24, no. 8, pp. 8437–8445, 2016.