

# Le $p$ -Laplacien non-local sur graphes: du discret au continu

Yosra HAFIENE, Jalal FADILI, Abderrahim ELMOATAZ

Normandie Univ, ENSICAEN, UNICAEN, CNRS, GREYC, France  
yosra.hafiene@ensicaen.fr, Jalal.Fadili@ensicaen.fr  
abderrahim.elmoataz-billah@unicaen.fr

**Résumé** – L'équation d'évolution du  $p$ -Laplacien non-local, gouvernée par un noyau donné, a de très nombreuses applications pour modéliser les phénomènes de diffusion, notamment en traitement du signal et des images sur graphes. En pratique, cette équation d'évolution est implémentée sous une forme discrète (en temps et en espace) comme une approximation numérique du problème continu, où le noyau est remplacé par la matrice d'adjacence d'un graphe. La question naturelle est alors d'étudier la structure des solutions du problème discret et d'en établir la limite continue. C'est l'objectif poursuivi dans ce travail. En combinant des outils issus de la théorie des graphes et des équations d'évolution non-linéaires, nous donnons une interprétation rigoureuse à la limite continue du problème du  $p$ -Laplacien discret sur graphes. Plus spécifiquement, nous considérons une suite de graphes (déterministes) dont l'objet limite est appelé *graphon*. L'équation d'évolution du  $p$ -Laplacien est alors discrétisée en temps et en espace sur cette suite de graphes. Ainsi, nous prouvons la convergence des solutions de la suite des problèmes discrétisés vers la solution du problème d'évolution continu gouverné par le graphon lorsque le nombre des noeuds du graphe tend vers l'infini. Ce faisant, nous exhibons les vitesses de convergence correspondantes pour différents modèles de graphes, et mettons en exergue l'influence de la géométrie du graphon. Dans le cas de graphes aléatoires, en utilisant des inégalités de concentration fines, nous fournissons les vitesses de convergence de la solution discrète vers sa limite continue avec grande probabilité et montrons l'influence de la valeur de  $p$ .

**Abstract** – The non-local  $p$ -Laplacian evolution equation, governed by given kernel, has various applications to model diffusion phenomena, in particular in signal and image processing. In practice, such an evolution equation is implemented in discrete form (in space and time) as a numerical approximation to a continuous problem, where the kernel is replaced by an adjacency matrix of graph. The natural question that arises is to understand the structure of solutions to the discrete problem, and study their continuous limit. This is the goal pursued in this work. Combining tools from graph theory and non-linear evolution equations, we give a rigorous interpretation to the continuous limit of the discrete  $p$ -Laplacian on graphs. More specifically, we consider a sequence of (deterministic) graphs converging to a so-called *graphon*. The continuous  $p$ -Laplacian evolution equation is then discretized on this graph sequence both in space and time. We therefore prove that the solutions of the sequence of discrete problems converge to the solution of the continuous evolution problem governed by the graphon, when the number of graph vertices grows to infinity. We exhibit the corresponding convergence rates for different graph models, and point out the role of the graphon geometry. For random graph sequences, using sharp concentration inequalities, we deliver convergence rate with overwhelming probability and show the influence of the choice of  $p$ .

## 1 Introduction

**$p$ -Laplacien continu et discret** Dans sa forme continue, l'équation d'évolution du  $p$ -Laplacien non-local avec conditions aux bords de Neumann homogènes, gouvernée par le noyau  $K$ , correspond au problème d'évolution non-linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\Delta_p^K u(x, t), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T], \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

où

$$\Delta_p^K u(x, t) = - \int_{\Omega} K(x, y) |u(y, t) - u(x, t)|^{p-2} (u(y, t) - u(x, t)) dy,$$

$\Omega = [0, 1]$  (sans perte de généralités),  $K(\cdot, \cdot)$  est une fonction positive, symétrique et bornée, et  $p \in [1, +\infty]$ . Le problème d'existence et d'unicité d'une solution du problème  $(\mathcal{P})$  est non-trivial. Bien que nous n'incluons pas les détails ici, on peut montrer, en s'appuyant sur la théorie des semi-groupes non-linéaires [1], que pour  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $(\mathcal{P})$  admet une unique

solution (dite forte) dans  $L^p(\Omega)$ . C'est donc dans ce sens que l'on désignera désormais la solution de  $(\mathcal{P})$ . L'équation  $(\mathcal{P})$  a de nombreuses applications dans la littérature pour modéliser des processus de diffusion non-locaux. Elle apparaît comme le flot de gradient associé à un cas particulier d'une fonctionnelle non-locale introduite dans [6] pour des problèmes de débruitage et de déconvolution d'images. Toutefois, les données en pratique étant discrètes, les graphes constituent une structure naturelle adaptée à leur représentation. Les sommets de ce graphe vont alors représenter les données et ses arêtes vont représenter les interactions entre ces données. Ces interactions peuvent alors modéliser une proximité géométrique des données mais aussi d'autres mesures de similarités, en fonction de l'application. Par exemple, pour les images, on peut retrouver différents types d'interaction (locales ou non-locales), selon la construction du graphe, ce qui permet de retrouver aisément des méthodes de traitement d'images locales ou non-locales. Ces considérations pratiques conduisent naturellement à proposer une approximation discrète en temps et en espace de  $(\mathcal{P})$ .

Pour ce faire, on fixe  $n \in \mathbb{N}$  et on considère une partition  $\mathcal{Q}_n$  de  $\Omega$

$\Omega_i^{(n)} = [(i-1)/n, i/n[$ ,  $i \in [n]$ ,  $\mathcal{Q}_n = \{\Omega_i^{(n)}, i \in [n]\}$ , où  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Soient  $\tau_{h-1} := |t_h - t_{h-1}|$ ,  $h \in [N]$ , les pas de temps correspondant à une partition de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de taille maximale  $\tau = \max_h \tau_h$ . La forme discrétisée en temps (explicite) et en espace de  $(\mathcal{P})$  s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{u_i^h - u_i^{h-1}}{\tau_{h-1}} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} (K_n)_{ij} |u_j^{h-1} - u_i^{h-1}|^{p-2} (u_j^{h-1} - u_i^{h-1}), \\ u_i^0(x) = g_i^0, \quad i \in [n], h \in [N]. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$$

$K_n$  est une version discrète du noyau  $K$ , et peut-être interprétée comme une matrice d'adjacence modélisant les interactions sur un graphe. Ainsi,  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  induit un processus de diffusion discret paramétré par la structure du graphe et le degré  $p$  de lissage.

Pour  $p \neq 2$ , le  $p$ -Laplacien discret sur graphe a été étudié pour la classification semi-supervisée de données [3], ainsi que pour diverses applications en traitement d'images comme la simplification et la segmentation non-supervisée [4]; voir Figure 1 et 2 pour quelques illustrations.

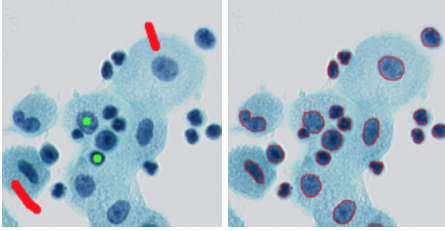


FIGURE 1 – Segmentation semi-supervisée. Gauche : image avec grains initiaux. Droite : image segmentée.

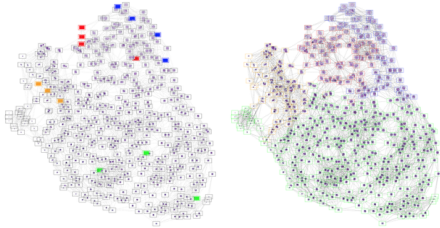


FIGURE 2 – Classification semi-supervisée. Gauche : graphe avec sommets labellisés. Droite : graphe classifié.

**Objectifs et contributions** La formulation discrète  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  est seulement une approximation du problème continu sous-jacent  $(\mathcal{P})$ . Plusieurs questions se posent alors : quelle est la structure des solutions du problème discret  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  ? Une limite continue, c.à.d. lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , existe-t-elle ? Si oui, quelle est la vitesse de convergence vers cette limite et quelle est la relation de cette dernière avec la solution unique forte de  $(\mathcal{P})$  ? Quelles sont les grandeurs mises en jeu dans cette vitesse de convergence et leur influence ?

C'est à toutes ces questions que cet article apporte des réponses. Plus précisément, en combinant des outils issus de la théorie des graphes et des équations d'évolution non-linéaires, nous donnons une interprétation rigoureuse à la limite continue du problème du  $p$ -Laplacien discret sur graphes. Pour ce faire, nous considérons une suite de graphes à  $n$  sommets dont l'objet limite est un graphon.  $(\mathcal{P})$  est alors discrétisée suivant  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  sur cette suite de graphes. Ainsi, nous prouvons la consistance des problèmes discret  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$ , c.à.d. la convergence des solutions de la suite des problèmes discrétisés vers la solution du problème d'évolution continu gouverné par le graphon lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Nous donnons les vitesses de convergence correspondantes pour différents modèles de graphes (simples et pondérés), et mettons en exergue l'influence de la géométrie du graphon. Dans le cas de graphes aléatoires, en utilisant des inégalités de concentration fines, nous donnons les vitesses de convergence de la solution discrète vers sa limite continue avec grande probabilité et montrons l'influence de la valeur de  $p$ . Toutes les preuves des résultats pourront être trouvées dans la version longue [5].

**Relation à l'état de l'art** Dans [9], les auteurs ont obtenu des résultats de consistance pour le problème d'évolution  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$ . La consistance est toutefois uniquement uniforme et requiert une hypothèse de positivité restrictive. Dans [8], l'auteur a montré la consistance de l'équation de la chaleur non-linéaire sur graphes, sans discrétisation du temps. Ce dernier résultat ne s'applique pas au  $p$ -Laplacien qui requiert des arguments bien plus sophistiqués.

## 2 Elements de la théorie des graphes

Un graphe  $G = (V(G), E(G))$  est défini par un ensemble de sommets  $V(G)$ , et un ensemble d'arêtes  $E(G)$ . Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Soit  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de graphes simples, finis et denses, c.à.d.  $|E(G_n)| = O(|V(G_n)|^2)$ , où  $|\cdot|$  désigne la cardinalité de l'ensemble.

Pour deux graphes simples  $F$  et  $G$ ,  $\text{hom}(F, G)$  indique le nombre d'homomorphismes (les applications qui préservent les matrices d'adjacence) de  $V(F)$  vers  $V(G)$ . Il est donc utile de normaliser le nombre d'homomorphismes et considérer les densités d'homomorphismes  $t(F, G) = \frac{\text{hom}(F, G)}{|V(G)|^{|V(F)|}}$ .

**Définition 2.1.** La suite de graphes  $\{G_n\}$  est dite convergente si  $t(F, G_n)$  est convergente pour tout graphe simple  $F$ .

Les suites convergentes de graphes admettent un objet limite, qui peut être représenté comme une fonction mesurable  $K : \Omega^2 \rightarrow \Omega$ . Ces fonctions sont appelées *graphons*. Soit  $\mathcal{K}$  l'espace des fonctions mesurables et bornées  $K : \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $K(x, y) = K(y, x)$  pour tout  $x, y \in [0, 1]$ . On définit également  $\mathcal{K}_0 = \{K \in \mathcal{K} : 0 \leq K \leq 1\}$  l'ensemble des graphons.

Le résultat suivant est une étape clé pour donner un sens à la limite continue de problèmes d'évolution sur graphes.

**Proposition 2.1** ([2, Théorème 2.1]). *Pour toute suite convergente de graphes simples, il existe un élément  $K \in \mathcal{K}_0$  tel que*

$$t(F, G_n) \rightarrow t(F, K) := \int_{\Omega} |_{V(F)} \prod_{(i,j) \in E(F)} K(x_i, x_j) dx \quad (1)$$

pour tout graphe simple  $F$ . Par ailleurs, pour tout  $K \in \mathcal{K}_0$ , il existe une suite de graphes  $\{G_n\}$  vérifiant (1).

En conclusion, chaque graphe simple fini  $G_n$  tel que  $V(G_n) = [n]$  peut-être représenté par une fonction  $K_{G_n} \in \mathcal{K}_0$

$$K_{G_n}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G_n) \text{ et } (x, y) \in \Omega_i^{(n)} \times \Omega_j^{(n)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, géométriquement, le graphon  $K$  peut être interprété comme la limite de  $K_{G_n}$ .

### 3 Consistence du $p$ -Laplacien sur graphes

#### 3.1 Graphes simples

On considère d'abord une suite de graphes simples  $G_n = (V(G_n), E(G_n))$  convergeant vers le graphon  $K = \{0, 1\}$ , c.à.d.  $V(G_n) = [n]$  et

$$E(G_n) = \left\{ (i, j) \in [n]^2 : \Omega_i^{(n)} \times \Omega_j^{(n)} \cap \overline{\text{supp}(K)} \neq \emptyset \right\},$$

où  $\text{supp}(K) = \{(x, y) \in \Omega^2 : K(x, y) \neq 0\}$  et  $\overline{\text{supp}(K)}$  est son adhérence. Ainsi, sur la suite de graphes  $\{G_n\}_n$ ,  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u_i^h - u_i^{h-1}}{\tau_{h-1}} = \frac{1}{n} \sum_{j:(i,j) \in E(G_n)} |u_j^{h-1} - u_i^{h-1}|^{p-2} (u_j^{h-1} - u_i^{h-1}), \\ u_i(0) = g_i^0, \quad i \in [n], h \in [N]. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{n,\tau}^{s,d})$$

où  $g_i^0 = n \int_{\Omega_i^{(n)}} g_n(x) dx$ , pour une fonction  $g_n$  sur  $\Omega$ .

Rappelons que notre objectif principal est de comparer les solutions des modèles discret et continu et d'établir des résultats de consistance. Les deux solutions ne vivant pas sur les mêmes espaces, il est commode d'introduire un modèle intermédiaire qui est l'extension continue du problème discret. On définit l'interpolée linéaire sur  $\Omega \times [0, T]$

$$\tilde{u}_n(x, t) = \frac{t_h - t}{\tau_{h-1}} u_i^{h-1} + \frac{t - t_{h-1}}{\tau_{h-1}} u_i^h, \quad x \in \Omega_i^{(n)}, t \in ]t_{h-1}, t_h], \quad (2)$$

et l'approximation constante par morceaux

$$\bar{u}_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^N u_i^{h-1} \chi_{]t_{h-1}, t_h]}(t) \chi_{\Omega_i^{(n)}}(x), \quad (3)$$

où  $\chi_{\Omega_i^{(n)}}$  est la fonction indicatrice sur  $\Omega_i^{(n)}$ . Il est clair que  $\tilde{u}_n(x, t)$  et  $\bar{u}_n(x, t)$  satisfont le problème d'évolution continu

suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_n(x, t) = -\Delta_p^{K_n^s}(\tilde{u}_n(x, t)), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T], \\ \tilde{u}_n^0(x) = g_n^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{n,\tau}^s)$$

où  $g_n^0(x) = g_i^0$  si  $x \in \Omega_i^{(n)}$ ,  $i \in [n]$ , et pour  $(x, y) \in \Omega_{ij}^{(n)}$ ,  $(i, j) \in [n]^2$

$$K_n^s(x, y) = \begin{cases} n^2 \int_{\Omega_{ij}^{(n)}} K(x, y) dx dy, & \Omega_i^{(n)} \times \Omega_j^{(n)} \cap \overline{\text{supp}(K)} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La vitesse de convergence de la solution du problème discret vers celle du problème continu dépend de la régularité de la frontière  $\partial \text{supp}(K)$  du support. Nous rappelons la dimension de Minkowski-Bouligand

$$\rho := \dim_B(\partial \overline{\text{supp}(K)}) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\partial \overline{\text{supp}(K)})}{-\log \delta},$$

où  $N_\delta(\partial \overline{\text{supp}(K)})$  est le nombre de cellules sur un réseau carré  $\delta \times \delta$  intersectant  $\partial \overline{\text{supp}(K)}$ . Notre résultat de consistance sur les graphes simples s'énonce comme suit.

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $g \in L^\infty(\Omega)$ , et  $\rho \in [0, p[$ . Soient  $u$  and  $\tilde{u}_n$  les solutions des problèmes  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^s)$ , respectivement. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N(\epsilon)$ , on a*

$$\|u - \tilde{u}_n\|_{C(0,T;L^p(\Omega))} \leq C \left( \|g - g_n\|_{L^p(\Omega)} + n^{-(1-\rho/p-\epsilon)} \right) + O(\tau),$$

où la constante positive  $C$  est indépendante de  $n$ .

$C(0, T; L^p(\Omega))$  est la classe des fonctions sur  $[0, T] \times \Omega$  uniformément continue en temps et dans  $L^p(\Omega)$  en espace. Théorème 3.1 assure donc que  $\tilde{u}_n$  converge vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  and  $\tau \rightarrow 0$ . La vitesse de convergence dépend en particulier de la fractalité du bord du graphon  $K$ .

#### 3.2 Graphes pondérés

Soit  $K : \Omega^2 \rightarrow [0, 1]$  une application mesurable, symétrique qui sera utilisée pour affecter les poids aux arêtes des graphes qui seront considérés dans la suite. Nous n'autorisons que des poids positifs et nous les normalisons dans  $[0, 1]$  sans perte de généralité. On définit le quotient de  $K$  par  $\mathcal{Q}_n$  comme le graphe pondéré à  $n$  noeuds

$$K/\mathcal{Q}_n = ([n], [n] \times [n], \hat{K}_n).$$

Les poids  $(\hat{K}_n)_{ij}$  sont obtenus en moyennant  $K$  sur les cellules de la partition  $\mathcal{Q}_n$

$$(\hat{K}_n)_{ij} = n^2 \int_{\Omega_i^{(n)} \times \Omega_j^{(n)}} K(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Ainsi, on considère la version de  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  sur  $K/\mathcal{Q}_n$

$$\begin{cases} \frac{u_i^h - u_i^{h-1}}{\tau_{h-1}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\hat{K}_n)_{ij} |u_j^{h-1} - u_i^{h-1}|^{p-2} (u_j^{h-1} - u_i^{h-1}), \\ u_i(0) = g_i^0, \quad i \in [n], h \in [N]. \end{cases} \quad (\hat{\mathcal{P}}_{n,\tau}^{w,d})$$

En combinant la fonction constante par morceaux  $\tilde{u}_n$  dans (2) avec  $\bar{u}_n$  dans (3),  $(\hat{\mathcal{P}}_{n,\tau}^{w,d})$  se réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_n(x, t) = -\Delta_p^{\hat{K}_n^w}(\bar{u}_n(x, t)), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T], \\ \tilde{u}_n^0(x) = g_n^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{n,\tau}^w)$$

où  $\hat{K}_n^w$  and  $g_n^0$  sont les interpolations constantes par morceaux de  $(\hat{K}_n)_{i,j}$  et  $g_i$ .

**Théorème 3.2.** *Supposons que  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $K : \Omega^2 \rightarrow \Omega$  est mesurable et symétrique,  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Soient  $u$  et  $\tilde{u}_n$  les solutions de  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^w)$ , respectivement. Alors*

$$\|u - \tilde{u}_n\|_{C(0,T;L^p(\Omega))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0} 0.$$

Pour quantifier la vitesse de convergence dans (3.2), nous aurons besoin de rajouter des hypothèses supplémentaires sur le noyau  $K$  et la condition initiale  $g$ .

**Définition 3.1.** *La variation d'une fonction  $K$  sur  $\Omega^2$  est*

$$J(K) = \sup_{h>0} h^{-1} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^2} |K((x, y) + he_i) - K(x, y)| dx dy.$$

$BV(\Omega^2)$  est l'espace de Banach des fonctions  $K \in L^1(\Omega^2)$  à variation bornée, i.e.  $J(K) < +\infty$ .

Nous avons alors la vitesse de convergence suivante.

**Corollaire 3.1.** *Supposons que  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $K : \Omega^2 \rightarrow [0, 1]$  est mesurable et symétrique dans  $BV(\Omega^2)$ , et  $g \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ . Soient  $u$  et  $\tilde{u}_n$  les solutions des problèmes  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^w)$  respectivement. Alors*

$$\|u - \tilde{u}_n\|_{C(0,T;L^p(\Omega))} \leq O(n^{-\frac{1}{p}}) + O(\tau).$$

En d'autres termes, nous avons une consistance  $L^p$  mais avec une vitesse qui se dégrade à mesure que  $p$  croit.

### 3.3 Graphes aléatoires

Les résultats ci-dessus sont déterministes, mais ne renseignent pas sur la consistance pour des graphes destinés à la modélisation de réseaux d'interaction aléatoire. Des exemples typiques importants dans les applications incluent le modèle d'Erdős-Rényi ou les graphes petit monde. Le modèle de graphes aléatoires que nous considérerons est assez général et couvre en l'occurrence ces derniers exemples.

**Définition 3.2.** *On génère  $n$  sommets iid  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  uniformément sur  $\Omega$ . Conditionnellement sur  $\mathbf{X}$ , chaque couple  $(i, j)$  de sommets, est indépendamment jointe avec probabilité  $K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ . Le graphe  $G_n = (V(G_n), E(G_n)) = G(n, K)$  généré de cette façon est appelé  $K$ -aléatoire.*

De même que dans le cas déterministe, la suite de graphes  $K$ -aléatoires  $\{G_n\}$  converge presque sûrement vers le graphon  $K$  [7, Corollary 2.6]. On considère maintenant  $(\mathcal{P}_{n,\tau}^d)$  sur  $G_n$

$$\begin{cases} \frac{u_i^h - u_i^{h-1}}{\tau_{h-1}} = \frac{1}{n} \sum_{j, (i,j) \in E(G_n)} |u_j^{h-1} - u_i^{h-1}|^{p-2} (u_j^{h-1} - u_i^{h-1}), \\ u_i^0 = g_i, \quad i \in [n], h \in [N]. \end{cases}$$

**Définition 3.3.** *Une fonction  $K : \Omega^2 \rightarrow \Omega$  est dite  $\theta$ -Hölderienne s'il existe  $C > 0$  telle que  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega^2$  :*

$$|K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| \leq C \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2^\theta.$$

On note  $H\ddot{o}(\Omega^2)$  l'espace de ces fonctions.

Suivant la même procédure, en utilisant les fonctions d'extension continue comme nous l'avons fait auparavant, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 3.3.** *Supposons que  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $K \in H\ddot{o}(\Omega^2)$  est symétrique, bornée et continue presque partout sur  $\Omega^2$  et  $g \in L^\infty(\Omega) \cap H\ddot{o}(\Omega)$ . Alors, pour  $t$  et  $\beta > 0$ , on a*

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_n\|_{C(0,T;L^p(\Omega))} &\leq C(p, \beta) \left( \frac{\log(n)}{n} + \frac{1}{n^{p/2}} \right)^{1/p} \\ &\quad + 3C(p, \theta) t \frac{\log(n)^{\theta+1/p}}{n^\theta} + O(\tau), \end{aligned}$$

avec probabilité au moins égale à  $1 - \max\{2n^{-\beta}, n^{-t}\}$ .

Ce résultat révèle en particulier que la vitesse de convergence du  $p$ -Laplacien sur des graphes aléatoires possède quatre régimes dépendant des valeurs de  $p$  et  $\theta$  :

$$\begin{cases} O\left(\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{1/p}\right) + O(\tau) & \text{pour } p \geq 2, \quad 1/p < \theta < 1, \\ O\left(\frac{\log(n)^{\theta+1/p}}{n^\theta}\right) + O(\tau) & \text{pour } \begin{cases} p \geq 2, & 0 < \theta < 1/p, \\ p \leq 2, & 0 < \theta < 1/2, \end{cases} \\ O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) + O(\tau) & \text{pour } p \leq 2, \quad 1/2 < \theta < 1. \end{cases}$$

Ces observations sont en accord avec les observations pratiques faites par plusieurs auteurs sur l'influence du paramètre  $p$  notamment pour des problèmes de classification non-supervisée.

## Références

- [1] F. Andreu-Vaillou, J. M. Mazón, J. D. Rossi, and J. J. Toledo-Melero. *Non-local Diffusion Problems*, volume 165 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2010.
- [2] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. Sós, and K. Vesztegombi. Limits of randomly grown graph sequences. *European Journal of Combinatorics*, 32(7) :985 – 999, 2011.
- [3] A. Elmoataz, X. Desquesnes, and O. Lezoray. Non-local morphological pdes and p-laplacian equation on graphs with applications in image processing and machine learning. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 6(7) :764–779, Nov 2012.
- [4] A. Elmoataz, M. Toutain, and D. Tenbrinck. On the p-laplacian and 1-laplacian on graphs with applications in image and data processing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2017. à paraître.
- [5] Y. Hafiene, M. J. Fadili, and A. Elmoataz. Nonlocal p-laplacian evolution problems on graphs. Technical Report arXiv :1612.07156, 2016.
- [6] S. Kindermann, S. Osher, and P. W. Jones. Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals. *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation*, 4 :1091–1115, 2005.
- [7] L. Lovász and B. Szegedy. Limits of dense graph sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(6) :933 – 957, 2006.
- [8] G. S. Medvedev. The nonlinear heat equation on dense graphs. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 46(4) :2743–2766, 2014.
- [9] M. Pérez-LLanos and J. D. Rossi. Numerical approximations for a nonlocal evolution equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(5) :2103–2123, 2011.