

Traitement tropical du signal sur graphe

Vincent GRIPON

IMT Atlantique
655 Avenue du Technopôle, 29280 Plouzané, France
prenom.nom@imt-atlantique.fr

Résumé – Depuis plusieurs années, le traitement de signal sur graphe étend l’analyse de Fourier à des domaines décrits par des graphes. Ces travaux sont conduits essentiellement par analogie avec l’étude de la propagation de la chaleur. Nous proposons d’analyser ce même problème dans le contexte de l’algèbre tropicale, très utilisée en informatique théorique notamment pour analyser les processus de propagation sur des graphes de distances. Nous introduisons une définition de la transformée de Fourier tropicale sur graphe et montrons quelques résultats sur l’inférence de graphes à partir de signaux lisses ainsi que sur l’existence d’un principe d’incertitude tropical.

Abstract – For the past few years, the domain of graph signal processing has extended classical Fourier analysis to domains described by graphs. Most of the results were obtained by analogy with the study of heat propagation. We propose to perform a similar analysis in the context of tropical algebra, widely used in theoretical computer science to monitor propagation processes over distance graphs. We introduce a Tropical Graph Fourier Transform and prove a few results on graph inference and the existence of a tropical uncertainty principle.

1 Introduction

Depuis plusieurs années, le domaine émergent du traitement de signal sur graphe [1] s’applique à étendre les principes de l’analyse harmonique de Fourier à des domaines à la topologie complexe décrite par des graphes. Le principe essentiel sous-tendant ces travaux est la diffusion, c’est-à-dire le produit d’une matrice représentant la structure du graphe avec un vecteur, représentant quant à lui l’intensité d’un signal sur ce graphe.

Les outils du traitement de signal sur graphe ouvrent des perspectives pour exploiter des structures lorsqu’elles sont disponibles, par exemple l’emplacement des électrodes en électroencéphalographie [2], celui des capteurs dans des réseaux [3], ou encore des structures plus abstraites comme celle d’un réseau social [4].

Toutefois, le principe de diffusion, introduit pour étudier la propagation de la chaleur, n’est pas nécessairement un bon modèle pour tous ces cadres applicatifs, où la linéarité des processus mis en jeu est contestable.

Dans ce document, nous nous attachons à montrer qu’il est possible de définir un traitement de signal sur graphe dans d’autres algèbres, propices à mieux décrire certains mécanismes. Plus précisément, nous nous intéressons à l’algèbre tropicale, particulièrement intéressante pour étudier les propagations dans des graphes de distances ou des réseaux sociaux.

Nous introduisons des définitions analogues à celles utilisées en traitement de signal classique, et proposons la définition d’une transformée de Fourier tropicale sur graphe. Nous montrons comment certains résultats obtenus ces dernières années dans le cas classique trouvent un écho élégant avec ce nouveau formalisme.

L’organisation de ce papier est comme suit : la partie 2 intro-

duit les notations et quelques définitions. La partie 3 contient notre proposition de définition de transformée de Fourier tropicale sur graphe. La partie 4 décrit quelques résultats sur l’inférence de graphes et l’incertitude. La partie 5 contient quelques expérimentations. Enfin la partie 6 est une conclusion.

2 Notations et définitions

Nous nous plaçons sur le semi-anneau $(\bar{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes, +\infty, 0)$, où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\oplus = \min$ et $\otimes = +$. Ainsi, pour deux matrices définies sur $M_n(\bar{\mathbb{R}})$ A et B , nous avons :

$$(AB)_{ij} = \min_k (A_{ik} + B_{kj}) .$$

Nous appelons *graphe* un couple $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ où V est l’ensemble fini des sommets et $E \subseteq V \times V$ est l’ensemble des arêtes. Tous les graphes considérés dans ce document sont tels que $\forall v \in V, (v, v) \in E$. Sans perte de généralité, nous nous plaçons dans le cas où $\exists n \in \mathbb{N}, V = \{1, \dots, n\}$. Ainsi, un graphe est entièrement spécifié par une matrice d’adjacence $A \in M_n(\bar{\mathbb{R}}^+)$ définie telle que $\forall i, j, i \neq j, A_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$ et $A_{ij} = +\infty$ sinon, et $\forall i, A_{ii} = 0$. Nous notons A^T la matrice transposée de la matrice A .

Suivant l’extension usuelle, nous appelons *graphe pondéré* un graphe muni d’une fonction de valuation de ses arêtes (hors boucles), ou de façon équivalente, un graphe dont la matrice d’adjacence peut contenir des valeurs positives autres que 1 et $+\infty$ hors de sa diagonale.

Une *signal* est la donnée d’une valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$ par sommet du graphe, dont au moins une n’est pas $+\infty$. Nous le représentons par un vecteur $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$. L’hermitien d’un signal \mathbf{x} , noté \mathbf{x}^* ,

est le signal $-\mathbf{x}^\top$, où l'opérateur $-$ est surchargé avec l'égalité $-(+\infty) = +\infty$.

En guise d'exemple, un signal peut être interprété comme la donnée d'un ensemble de dates, par exemple celles auxquelles une certaine information est acquise pour chaque sommet. Par ailleurs, les entrées de la matrice A sont des durées et correspondent au temps nécessaire pour transmettre une information d'un sommet vers un autre. À noter que dans notre cas, nous considérons que A_{ij} représente la durée pour transmettre une information du sommet j vers le sommet i .

Définition : 1 (lisseur). Étant donné un graphe \mathcal{G} de matrice d'adjacence A et un signal \mathbf{x} , la **lisseur** de \mathbf{x} sur \mathcal{G} est quantifiée par $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^* A \mathbf{x})^*$.

Proposition : 1. La lisseur est une quantité positive, atteignant zéro uniquement pour des signaux \mathbf{x} pour lesquels

$$\forall i, j, \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j + A_{ij}.$$

Démonstration. Nous pouvons réécrire

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \min_{ij} (A_{ij} + \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i).$$

En particulierisant pour $i = j = 1$, nous obtenons que $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \geq 0$. Par ailleurs, cette quantité est négative si et seulement si tous les termes sont négatifs. \square

Un signal de lisseur nulle est donc un signal pour lequel le graphe ne permet pas de réduire les dates d'acquisition de l'information pour chacun des sommets. Plus généralement, elle représente la réduction maximale qu'il est possible d'atteindre par un sommet obtenant l'information d'un de ses voisins.

Définition : 2 (diffusion). Étant donné un graphe \mathcal{G} de matrice d'adjacence A et un signal \mathbf{x} , la **diffusion** de \mathbf{x} sur \mathcal{G} est le signal $A\mathbf{x}$.

La diffusion d'un signal revient à mettre à jour les dates d'acquisition de l'information pour chaque sommet. Ces dates sont choisies parmi les meilleures entre celles qui n'utilisent pas le graphe (donc celles déjà présentes dans le signal original) et celles qui utilisent au plus une transmission par le graphe.

Proposition : 2. La suite $(A^t \mathbf{x})$, $t \in \mathbb{N}$ converge.

Démonstration. Notons que puisque A contient une diagonale nulle, un signal diffusé contient des valeurs plus petites que le signal original. Par ailleurs, A ne contenant que des valeurs positives, les valeurs d'un signal diffusé sont minorées par la valeur minimale du signal original. On en déduit que chaque coordonnée de la suite $(A^t \mathbf{x})$ converge. \square

Nous notons \mathbf{x}^∞ la limite de la suite $(A^t \mathbf{x})$.

Notons qu'il est même possible de montrer que \mathbf{x}^∞ est stationnaire en remarquant que $(A^t)_t$ est elle-même stationnaire.

Proposition : 3. Pour tout signal et tout graphe, la lisseur du signal \mathbf{x}^∞ est nulle.

Démonstration. Utilisant la proposition 1, nous procédons par l'absurde. Supposons que la lisseur de \mathbf{x}^∞ est non nulle. Alors il existe i et j tels que $A_{ij} + \mathbf{x}_j^\infty < \mathbf{x}_i^\infty$. Or $\mathbf{x}_i^\infty = (A\mathbf{x}^\infty)_i = \min_{j'} A_{ij'} + \mathbf{x}_{j'}^\infty \leq A_{ij} + \mathbf{x}_j^\infty$. \square

Sur notre exemple, le signal \mathbf{x}^∞ correspond aux dates auxquelles les différents sommets peuvent acquérir l'information en utilisant au mieux le graphe des durées et les dates initiales décrites par \mathbf{x} .

Définition : 3 (laplacien). Le **laplacien** d'un graphe \mathcal{G} de matrice d'adjacence A est l'opérateur $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - A\mathbf{x}$.

Remarque : par abus de langage, nous notons $L = I - A$, où I est la matrice de diagonale nulle et ne contenant que $+\infty$ par ailleurs, et nous évoquons les valeurs et vecteurs propres de L .

Proposition : 4. La seule valeur propre possible du laplacien est la valeur nulle.

Démonstration. Notons \mathbf{x} un vecteur propre du laplacien et μ la valeur propre correspondante, c'est-à-dire $L(\mathbf{x}) = \mu \otimes \mathbf{x}$. Ici l'opérateur \otimes est surchargé et doit être compris comme $\forall i, (\mu \otimes \mathbf{x})_i = \mu + \mathbf{x}_i$. Alors $A^t \mathbf{x} = t\mu \otimes \mathbf{x}$, qui converge si et seulement si $\mu = 0$. La proposition 2 conclue. \square

Proposition : 5. Les vecteurs propres du laplacien sont des signaux \mathbf{x} tels que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\infty$. Par ailleurs, ils vérifient $\forall i, \exists j, \mathbf{x}_i = A_{ij} + \mathbf{x}_j$.

Démonstration. Considérons \mathbf{x} vecteur propre de L . La proposition 4 nous donne que $\forall i, \min_j (A_{ij} + \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i$, ce qui nous donne la seconde partie de la proposition. Par ailleurs, $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A\mathbf{x} = 0$ nous donne la première partie de la proposition. \square

3 Transformée de Fourier tropicale sur graphe

L'algèbre tropicale peut être contre-intuitive. Par exemple, il est possible de trouver des familles libres de $d + 1$ vecteurs de dimension d .

Nous nous attachons dorénavant à montrer qu'il est toutefois possible d'exprimer la limite de diffusion de tout signal comme une combinaison linéaire d'un faible nombre de vecteurs propres du laplacien L .

D'abord, notons que par définition, pour tout signal \mathbf{x} le signal \mathbf{x}^∞ est vecteur propre du laplacien associé à la valeur propre 0 par la proposition 4.

Notons \mathbf{e}^i un signal dont toutes les composantes sont $+\infty$ à l'exception de la i -ème, étant nulle.

Avant de montrer le résultat important de cette partie, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition : 6. Tout signal \mathbf{x} de limite de diffusion \mathbf{x}^∞ est tel que $\mathbf{x}_j^\infty - \mathbf{x}_i^\infty \leq d(i, j)$ où $d(i, j)$ est la distance géodésique dans \mathcal{G} entre i et j .

Démonstration. Considérons un chemin le plus court de i à j dans $\mathcal{G} : v_1 = i, v_2, \dots, v_\ell = j$. Puisque \mathbf{x}^∞ est vecteur propre du laplacien de valeur propre nulle, nous en déduisons que $\min_k (A_{v_2 k} + \mathbf{x}_k^\infty) = \mathbf{x}_{v_2}^\infty$. En particulier, $\mathbf{x}_{v_2}^\infty \leq A_{v_2 v_1} + \mathbf{x}_{v_1}^\infty$. Par induction sur le chemin le plus court, on en déduit que $\mathbf{x}_j^\infty \leq \sum_{k=1}^{\ell-1} A_{v_{k+1} v_k} + \mathbf{x}_i^\infty$. \square

Proposition : 7. *Tout signal \mathbf{x} est tel que $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{x}^\infty = \lambda_1 \otimes \mathbf{e}^{1^\infty} \oplus \dots \oplus \lambda_n \otimes \mathbf{e}^{n^\infty}$.*

Démonstration. Considérons \mathbf{x} et la limite \mathbf{x}^∞ . Déjà observons que la valeur minimale de \mathbf{x} est conservée lors de la diffusion (et donc \mathbf{y} compris avec \mathbf{x}^∞). Notons la λ_{min} et la coordonnée correspondante i_{min} . Alors montrons qu'il existe un signal \mathbf{y} tel que $\mathbf{x}^\infty = \mathbf{y} \oplus \lambda_{min} \otimes \mathbf{e}^{i_{min}^\infty}$. De plus, nous allons montrer qu'il est possible de le choisir avec pour valeur $+\infty$ à la coordonnée i_{min} .

Par l'absurde, un tel signal n'existe pas si et seulement s'il existe une coordonnée $j \neq i_{min}$ pour laquelle $\mathbf{x}_j^\infty > (\lambda_{min} \otimes \mathbf{e}^{i_{min}^\infty})_j$. Par la proposition 6, $\mathbf{x}_j^\infty - \mathbf{x}_{i_{min}}^\infty \leq d(i_{min}, j)$. Nous obtenons donc $\mathbf{e}_j^{i_{min}^\infty} - \mathbf{e}_{i_{min}}^{i_{min}^\infty} < d(i_{min}, j)$. Parmi tous les j vérifiant cette propriété, choisissons-en un et notons le j^* pour lequel un chemin le plus court de i_{min} à j^* contient un minimum d'étapes. Notons que ce nombre d'étape est au moins égal à 1 (car $d(i, j)$ est toujours positif). Soit $v_1 = i, v_2, \dots, v_\ell = j^*$ le chemin correspondant. Nous avons donc $\mathbf{e}_{j^*}^{i_{min}^\infty} - \mathbf{e}_{v_{\ell-1}}^{i_{min}^\infty} \geq A_{v_\ell v_{\ell-1}} + \mathbf{e}_{v_{\ell-1}}^{i_{min}^\infty} - \mathbf{e}_{v_1}^{i_{min}^\infty} \geq \sum_{k=2}^{\ell-1} A_{v_k v_{k-1}}$. Par somme nous arrivons à la contradiction.

Par induction, nous reprenons ce même raisonnement en mettant à $+\infty$ la i_{min} -ème coordonnée de \mathbf{x} jusqu'à obtenir un vecteur \mathbf{x}^∞ entièrement à $+\infty$. Ce processus termine puisqu'il ne peut comporter plus de n étapes. Notons qu'en cas de présence de pondérations 0 dans le graphe, il est en plus nécessaire d'être prudent d'éviter de sélectionner plusieurs fois le même sommet. \square

Il est omis mais admis que le processus décrit dans cette preuve donne une décomposition minimale de \mathbf{x}^∞ , c'est-à-dire requérant un nombre minimum de signaux \mathbf{e}^{i^∞} , et que cette décomposition est unique.

Définition : 4 (Transformée de Fourier tropicale sur graphe). *Le vecteur $(\lambda_{1min}, \dots, \lambda_{nmin})$ obtenu par la procédure de la preuve de la proposition 7 est appelé **transformée de Fourier tropicale sur graphe** du signal \mathbf{x} et est dénotée $\hat{\mathbf{x}}$.*

La figure 1 montre un exemple de graphe, d'un signal et de sa transformée de Fourier tropicale. Ainsi, les valeurs de \mathbf{x} amènent aux mêmes dates d'acquisition de l'information que celles présentes dans $\hat{\mathbf{x}}$ pour peu que le graphe puisse être utilisé pour transmettre les informations entre les sommets. Tout se passe donc comme si seuls les sommets 0 et 3 avaient reçu l'information initialement.

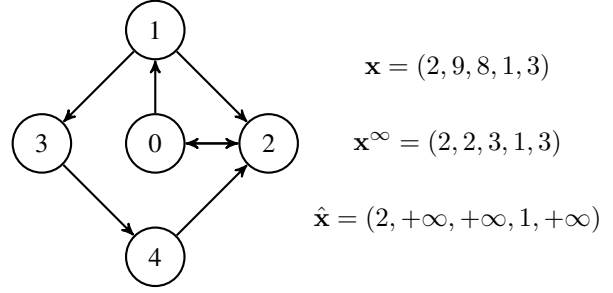


FIGURE 1 – Exemple de graphe non pondéré, de signal et de sa transformée de Fourier tropicale. Les boucles ne sont pas représentées. Il est à noter que contre-intuitivement, le graphe se lit à l'envers. Par exemple, le sommet 0 peut recevoir l'information du sommet 1.

4 Inférence de graphe et principe d'incertitude

Une question importante en traitement de signal classique sur graphe est de trouver un graphe à partir d'un ensemble de signaux. Des travaux récents [5, 6] ont montré que lorsque les signaux sont supposés stationnaires sur le graphe, les vecteurs propres de la matrice de covariance sont les mêmes que ceux du laplacien du graphe.

Dans la même veine d'idée, considérons un ensemble de m signaux de dimension n regroupés dans une matrice \mathcal{X} de dimensions n par m .

Définition : 5 (graphe induit). *Le **graphe induit** par un ensemble de signaux $\mathcal{X} \in \{0, +\infty\}^{mn}$ est le graphe dont la matrice d'adjacence est $h((\mathcal{X}\mathcal{X}^*)^*)$, où h est la fonction identité sauf pour les valeurs négatives qui sont associées à $+\infty$.*

Notons que dans le cas où les signaux ne contiennent que des 0 et des $+\infty$, un graphe induit est très similaire à une mémoire associative binaire [7].

Notons qu'un graphe induit est contraint par les signaux qui possèdent les valeurs les plus voisines. Plutôt que d'estimer le graphe initial, il en estime la fermeture transitive. En effet, au même titre qu'en traitement de signal classique, toutes les puissances de la matrice d'adjacence d'un graphe ont les mêmes vecteurs propres, ce résultat reste valide dans l'algèbre tropicale.

Dans le cas où le graphe initial est non pondéré, il est possible de l'estimer en seuillant le graphe induit de façon à retirer toute pondération strictement plus grande que 1.

Étant donnée une série d'observations lisses, par exemple issues de la dissémination d'une information à partir d'un unique sommet initial, le graphe induit est un graphe suffisant pour expliquer les phénomènes observés. Il est toutefois probable qu'il contienne un nombre excessif d'arêtes.

De même, nous nous inspirons du principe d'incertitude introduit dans [8].

Définition : 6 (lisseur spatiale). La *lisseur spatiale* d'un signal \mathbf{x} est définie par $\Lambda(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^* \bar{I} \mathbf{x}$, où \bar{I} est la matrice de diagonale $+\infty$ et contenant des 0 partout ailleurs.

Définition : 7 (étendue spectrale). L'*étendue spectrale* d'un signal \mathbf{x} , notée $\Delta(\mathbf{x})$ est le nombre de composantes non égales à $+\infty$ dans le vecteur $\hat{\mathbf{x}}$.

Définition : 8 (domaine d'incertitude tropical). Le *domaine d'incertitude tropical* du graphe \mathcal{G} est l'ensemble des points $\{(\Delta(\mathbf{x}^\infty), \Lambda(\mathbf{x}^\infty)), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{+\infty\}^n\}$. La *courbe d'incertitude* est définie par $\Gamma(s) = \min_{\Delta(\mathbf{x}^\infty)=s} \Lambda(\mathbf{x}^\infty)$.

La courbe d'incertitude d'un graphe nous renseigne donc sur les écarts minimums que l'on observe dans un signal issu de la dissémination d'un faible nombre de sommets initiaux. Elle nous donne donc une estimation de la couverture maximale offerte par un faible nombre de sommets dans ce graphe.

Proposition : 8. La valeur de $\Gamma(1)$ est le rayon de \mathcal{G} .

Démonstration. Notons que les seuls signaux d'étendue spectrale 1 sont les signaux de la forme \mathbf{e}^i . La proposition 6 nous donne ainsi que $\Gamma(1) \leq r(\mathcal{G})$, où $r(\mathcal{G})$ est le rayon de \mathcal{G} .

Réciproquement, il est possible d'adapter la preuve de la proposition 7 pour montrer par l'absurde qu'aucun signal $\mathbf{e}^{i\infty}$ ne peut obtenir une lisseur spatiale strictement plus petite que le rayon. \square

Par ailleurs nous avons les résultats suivants (preuves omises mais simples) :

Proposition : 9. Pour un graphe connexe non pondéré, $\forall s < n, \Gamma(s) \geq 1$.

Proposition : 10. Pour tout graphe, $\Gamma(n) = 0$.

5 Expériences

5.1 Inférence d'un graphe à partir de signaux lisses

Considérons à nouveau le graphe défini dans la figure 1. Nous avons généré aléatoirement des signaux sur ce graphe dont les coordonnées sont des entiers tirés uniformément entre 1 et δ , où δ est le diamètre ($\delta = 3$) du graphe. Puis nous avons lissé ces signaux en les diffusant autant de fois que nécessaire. Enfin, nous avons déterminé le graphe induit seuillé correspondant. En répétant ce processus un grand nombre de fois, nous avons estimé le nombre moyen d'arêtes en trop dans le graphe reconstruit (par définition ce processus ne peut pas manquer d'arête). Les résultats sont décrits dans la figure 2.

5.2 Courbes d'incertitude tropicale de graphes usuels

Nous avons généré la courbe tropicale d'incertitude de graphes usuels en procédant à une recherche exhaustive des signaux l'atteignant. Les résultats sont décrits dans la figure 3.

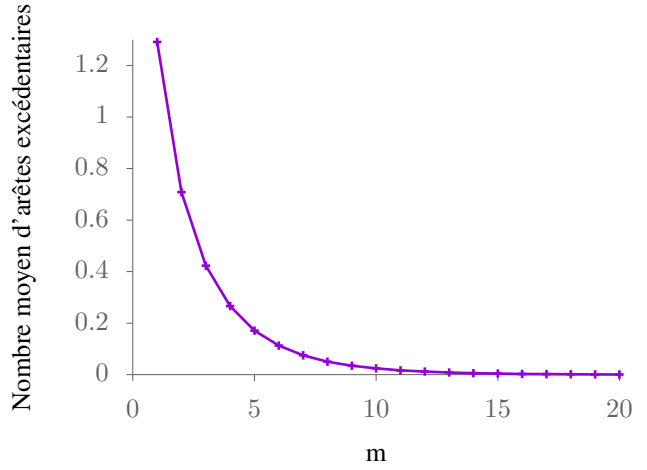


FIGURE 2 – Nombre moyen d'arêtes excédentaires lors de la reconstruction du graphe de la figure 1 à partir de signaux lisses générés aléatoirement, en fonction du nombre d'exemples m .

Il s'agit de graphes contenant 10 sommets chacun. Nous avons considéré un graphe complet (symétrique), un graphe cycle (1 voisin pour chaque sommet), et le fameux graphe de Petersen (symétrique).

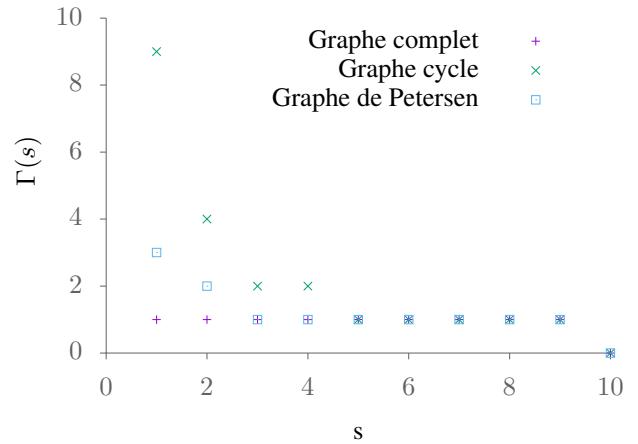


FIGURE 3 – Courbe d'incertitude pour des graphes contenant 10 sommets.

6 Conclusion

Nous avons introduit une notion de traitement tropical de signaux sur graphes. Les définitions proposées s'inspirent largement de celles qui existent déjà dans le cadre du traitement de signal sur graphes classique.

Ces notions ouvrent la porte à définir des opérateurs adaptés à des signaux pour lesquels l'algèbre classique n'est pas la plus naturelle.

Elles donnent également une lecture nouvelle aux outils développés dans le cas classique et à leur généralisation à d'autres domaines.

Références

- [1] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, “The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.
- [2] W. Huang, L. Goldsberry, N. F. Wymbs, S. T. Grafton, D. S. Bassett, and A. Ribeiro, “Graph frequency analysis of brain signals,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 10, no. 7, pp. 1189–1203, 2016.
- [3] A. Sandryhaila and J. M. Moura, “Discrete signal processing on graphs,” *IEEE transactions on signal processing*, vol. 61, no. 7, pp. 1644–1656, 2013.
- [4] —, “Big data analysis with signal processing on graphs : Representation and processing of massive data sets with irregular structure,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 5, pp. 80–90, 2014.
- [5] B. Pasdeloup, V. Gripon, G. Mercier, D. Pastor, and M. G. Rabbat, “Characterization and inference of graph diffusion processes from observations of stationary signals,” *Arxiv preprint :1605 :02569v2*, 2016.
- [6] A. G. Marques, S. Segarra, G. Leus, and A. Ribeiro, “Stationary graph processes and spectral estimation,” *arXiv preprint arXiv :1603.04667*, 2016.
- [7] D. J. Willshaw, O. P. Buneman, and H. C. Longuet-Higgins, “Non-holographic associative memory.” *Nature*, 1969.
- [8] A. Agaskar and Y. M. Lu, “A spectral graph uncertainty principle,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no. 7, pp. 4338–4356, 2013.