

# Spectrogramme de polarisation pour l'analyse des signaux bivariés

Julien FLAMANT<sup>1</sup>, Nicolas LE BIHAN<sup>2</sup>, Pierre CHAINAIS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 - CRISTAL, 59000 Lille, France

<sup>2</sup>CNRS/GIPSA-Lab, Grenoble, France

julien.flamant@phd.centralelille.fr, nicolas.le-bihan@gipsa-lab.grenoble-inp.fr  
pierre.chainais@centralelille.fr

**Résumé** – Une nouvelle approche pour l'analyse temps-fréquence des signaux bivariés est proposée. En utilisant une transformée de Fourier quaternionique, nous montrons qu'il est possible de généraliser l'analyse temps-fréquence pour les signaux bivariés. En particulier deux nouveaux outils sont présentés : un analogue bivarié du signal analytique appelé plongement quaternionique, et une représentation temps-fréquence-polarisation dénommée *spectrogramme de polarisation*. La puissance de l'approche est illustrée sur un exemple synthétique.

**Abstract** – A novel approach towards time-frequency analysis of bivariate signals is proposed. Using a quaternion Fourier transform, we show that it is possible to extend usual time-frequency analysis to bivariate signals thanks to a completely new framework. In particular two new tools are presented: a bivariate counterpart of the analytic signal called quaternion embedding, and a time-frequency-polarization representation called *polarization spectrogram*. A synthetic example illustrates the relevance of the proposed approach.

## 1 Introduction

Les signaux bivariés apparaissent dans des contextes divers allant de l'océanographie aux mesures radar et optiques en passant par l'acoustique. Un signal bivarié correspond à la trace d'un vecteur évoluant dans le plan. Il peut être modélisé mathématiquement par le signal complexe  $x(t) = u(t) + iv(t)$ . La figure 1 en présente un exemple synthétique. De nombreux auteurs ont proposé l'utilisation de représentations *augmentées* afin d'extraire des paramètres géométriques ou de polarisation pour les signaux bivariés non-stationnaires [1]. Des extensions de la décomposition modale empirique au cas bivarié ont été proposées [2, 3], tandis qu'une définition de moments instantanés bivariés a été introduite récemment [4]. Les méthodes existantes reposent toutes sur l'utilisation de la Transformée de Fourier (TF) classique. Il est cependant bien connu que la TF des signaux complexes ne présente pas de symétrie hermitienne, ce qui ne permet pas une utilisation directe des outils classiques d'analyse temps-fréquence tel que le signal analytique ou le spectrogramme.

Ce travail démontre que l'utilisation de la Transformée de Fourier Quaternionique (TFQ) permet d'étendre de manière élégante les représentations temps-fréquence usuelles au cas bivarié. Cette définition alternative de la TF mène à la définition du *plongement quaternionique* d'un signal bivarié vu comme un signal complexe. Cet outil permet l'identification univoque de paramètres géométriques et de phase pour les signaux bivariés à bande étroite. Cette approche est ensuite étendue via la Transformée de Fourier à Court Terme Quaternionique (TFCT-Q) pour l'analyse temps-fréquence des signaux bivariés large bande. Un théorème fondamental permet de définir le spectro-

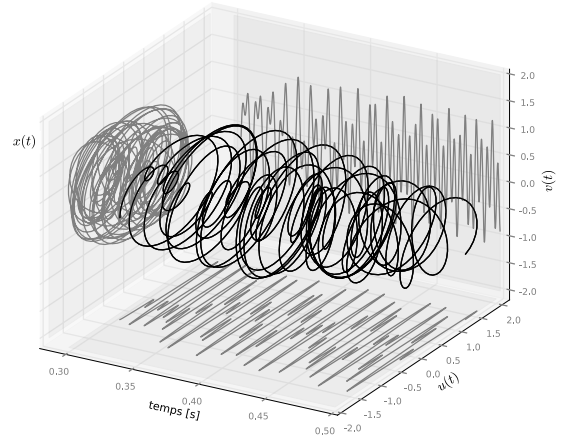


FIGURE 1 – Exemple de signal bivarié synthétique.

gramme de polarisation d'un signal bivarié, ainsi que sa validité et son interprétation physique. Un exemple illustre la puissance de l'approche.

## 2 Analyse de Fourier quaternionique

### 2.1 Quaternions

De même qu'un signal réel est classiquement associé à un signal complexe, il est possible de plonger un signal complexe dans un espace de plus grande dimension, le corps des quaternions  $\mathbb{H}$ . Il s'agit d'un corps à 4 dimensions de base canonique  $\{1, i, j, k\}$ , où  $i, j, k$  sont des imaginaires purs  $i^2 = j^2 =$

$k^2 = -1$ . Ils sont reliés par

$$ij = k, \quad ij = -ji, \quad ijk = -1. \quad (1)$$

Le produit est non-commutatif, *i.e.* pour  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $pq \neq qp$  en général. Tout quaternion  $q$  s'écrit sous forme cartésienne

$$q = a + bi + cj + dk, \quad (2)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Le conjugué de  $q$  est  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ . Son module est  $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Les *involutions* par rapport à  $i, j, k$  sont

$$\bar{q}^i = -iqi, \quad \bar{q}^j = -jqj, \quad \bar{q}^k = -kqk. \quad (3)$$

On introduit aussi la conjugaison d'axe  $j$  :

$$q^{*j} \triangleq \overline{(\bar{q})^j} = \overline{(\bar{q}^j)} = q = a + bi - cj + dk. \quad (4)$$

Les quaternions englobent les nombres complexes, ce qui permet d'extraire des *sous-corps complexes* de  $\mathbb{H}$  isomorphes à  $\mathbb{C}$ , par exemple  $\mathbb{C}_i = \text{span}\{1, i\}$  où  $\mathbb{C}_j = \text{span}\{1, j\}$ . Les quaternions peuvent aussi s'écrire sous forme polaire. Notons en particulier la forme polaire d'Euler [5]

$$q = |q| \exp(i\theta) \exp(-k\chi) \exp(j\varphi), \quad (5)$$

pour  $q \in \mathbb{H}$  et  $(\theta, \chi, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi, \pi]$ . La décomposition explicite est donnée dans [5, 6]. Pour plus de détails sur les quaternions, on se référera à [7].

## 2.2 Transformée de Fourier quaternionique

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ . Sa transformée de Fourier quaternionique (TFQ) est définie par

$$X(\omega) = \int x(t) \exp(-j\omega t) dt \in \mathbb{H} \quad (6)$$

et son inverse par

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (7)$$

La TFQ diffère de la TF classique en deux points. Par convention, l'exponentielle est positionnée à droite du signal à analyser. Ce choix est important car le produit dans  $\mathbb{H}$  est non-commutatif. La TFQ a un *axe* différent ( $j$  au lieu de  $i$  pour la TF classique). Cette définition de la TFQ hérite des propriétés de la TF usuelle, à la différence des autres définitions de TFQ dans la littérature [6]. Un théorème de Parseval-Plancherel généralisé [6] montre que la TFQ est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ . Un théorème de Gabor-Heisenberg peut également être formulé, démontrant que la TFQ obéit aux mêmes limitations de localisation temps-fréquence que la TF usuelle.

Les signaux bivariés peuvent être vus comme des signaux complexes à valeurs dans  $\mathbb{C}_i$ . Dans ce cas, la TFQ présente deux propriétés supplémentaires importantes. A tout signal complexe  $x(t) \in \mathbb{C}_i$  est associée une représentation spectrale  $X(\omega) \in \mathbb{H}$ . Celle-ci vérifie de plus une symétrie *i*-hermitienne :

$$X(-\omega) = -iX(\omega)i = \overline{X(\omega)}^i. \quad (8)$$

Ces propriétés sont détaillées dans [6].

## 3 Plongement quaternionique

### 3.1 Définition

La symétrie *i*-hermitienne (8) de la TFQ des signaux complexes montre que le spectre des fréquences négatives n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport au spectre des fréquences positives. Dès lors il est possible de construire un analogue bivarié du signal analytique, par suppression des fréquences négatives. On appelle ce nouvel objet le *plongement quaternionique d'un signal complexe*, défini explicitement par

$$x_+(t) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (9)$$

où le facteur 2 assure que  $x_+(t)$  et  $x(t)$  ont la même énergie. Le plongement quaternionique  $x_+(t)$  est par construction à valeurs sur  $\mathbb{H}$ . Ceci va permettre d'extraire directement des attributs physiques instantanés pertinents. Notons qu'une construction similaire de  $x_+(t)$  est décrite dans [8], mais diffère dans l'interprétation physique qui suit.

### 3.2 Attributs physiques instantanés

La forme polaire d'Euler (5) permet d'interpréter  $x_+(t)$  sous la forme :

$$x_+(t) = a(t) e^{i\theta(t)} e^{-k\chi(t)} e^{j\varphi(t)} \quad (10)$$

avec  $a(t) \geq 0$ ,  $\theta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\chi(t) \in [-\pi/4, \pi/4]$  et  $\varphi(t) \in [-\pi, \pi]$ . Cette décomposition est unique. On retrouve le signal original  $x(t)$  par projection de  $x_+(t)$  sur  $\mathbb{C}_i$  :

$$x(t) = a(t) [\cos \varphi(t) \cos \chi(t) + i \sin \varphi(t) \sin \chi(t)]. \quad (11)$$

L'équation (11) est un analogue bivarié direct du modèle AM-FM univarié  $x(t) = a(t) \cos[\varphi(t)]$ . Le plongement quaternionique associe un *quadruplet canonique*  $[a(t), \theta(t), \chi(t), \varphi(t)]$  à tout signal complexe. Son interprétation physique peut se faire sous des conditions usuelles [9] adaptées au cas bivarié *i.e.* dès lors que  $\varphi(t)$  varie bien plus rapidement que le triplet  $[a(t), \theta(t), \chi(t)]$  et que  $x(t)$  est localement monochromatique.

Les quantités  $a(t), \varphi(t)$  sont standards : il s'agit respectivement de l'amplitude instantanée et de la phase instantanée du signal. Les autres quantités sont l'orientation instantanée  $\theta(t)$  et l'ellipticité instantanée  $\chi(t)$ ; elles sont spécifiques au cas bivarié. Ensemble, elles montrent qu'un signal bivarié à bande étroite a une trajectoire localement elliptique.

La figure 2 montre la trajectoire elliptique tracée par le modèle (11) avec  $a(t) = a$ ,  $\theta(t) = \theta$  et  $\chi(t) = \chi$  constants. La valeur de  $a$  contrôle la taille de l'ellipse. Son orientation est donnée par  $\theta$ , tandis que sa forme est contrôlée par  $\chi$ . Pour  $\chi = 0$ , l'ellipse devient un segment, alors qu'à l'extrême pour  $\chi = \pm\pi/4$  on obtient un cercle. La phase  $\varphi(t)$  donne la position instantanée de  $x(t)$  dans l'ellipse, et enfin le signe de  $\chi$  donne le sens de rotation. La description en ellipse instantanée peut être vue comme une description de l'état de polarisation instantané du signal bivarié, par analogie avec la polarisation des ondes électromagnétiques.

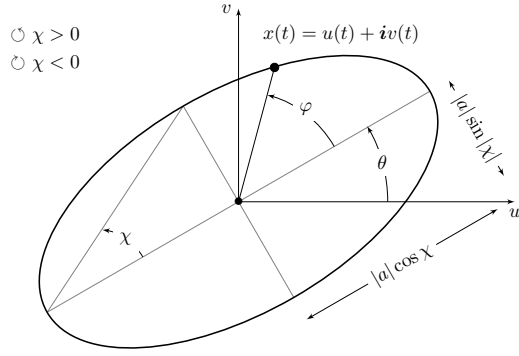


FIGURE 2 – Paramètres géométriques du signal bivarié  $x(t)$  par la forme polaire de son plongement quaternionique.

L'extraction de paramètres physiques instantanés à partir du plongement quaternionique d'un signal complexe se heurte aux mêmes limitations que dans le cas du signal analytique. L'approche ne fonctionne plus dès lors que le signal est multicomposante, ce qui motive l'introduction de la Transformée de Fourier à Court Terme Quaternionique (TFCT-Q).

## 4 Spectrogramme de polarisation

Soit  $g(t)$  une fenêtre réelle, symétrique et normalisée  $\|g\|_2 = 1$ . La TFCT-Q est définie par [6]

$$Sx(u, \xi) = \int x(t)g(t-u)e^{-j\xi t} dt. \quad (12)$$

La TFCT-Q est caractérisée par un théorème fondamental que nous avons démontré dans [6].

**Théorème 1** (inversion, conservation). *Soit  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ . La formule de reconstruction donne*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \iint Sx(u, \xi)g(t-u)e^{j\xi t} d\xi du. \quad (13)$$

Deux quantités sont conservées : l'énergie

$$\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint |Sx(u, \xi)|^2 dud\xi, \quad (14)$$

et les propriétés de polarisation :

$$\int x(t)x(t)^{*j} dt = \frac{1}{2\pi} \iint Sx(u, \xi)Sx(u, \xi)^{*j} dud\xi. \quad (15)$$

Non seulement ce théorème étend les résultats usuels (13) et (14) à la TFCT-Q mais il montre aussi la conservation (15) d'une quantité liée aux propriétés géométriques (ou de polarisation) du signal bivarié. La quantité  $Sx(u, \xi)Sx(u, \xi)^{*j}$  est appelée *spectrogramme de polarisation* de  $x$ . A valeurs dans  $\mathbb{H}$ , il s'exprime directement en fonction des paramètres de Stokes, utilisés par les physiciens dans la description de l'état de polarisation des ondes électromagnétiques [10]. Plus précisément,

$$Sx(u, \xi)Sx(u, \xi)^{*j} = S_1(u, \xi) + iS_2(u, \xi) - \mathbf{k}S_3(u, \xi), \quad (16)$$

où  $S_1, S_2, S_3$  sont des paramètres de Stokes *temps-fréquence* et  $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  :  $S_0$  correspond au spectrogramme usuel de  $x$ . Ces paramètres décrivent de manière équivalente l'information contenue par le triplet  $(a, \theta, \chi)$ .

Deux représentations temps-fréquence-polarisation équivalentes sont ainsi possibles. La première consiste en la densité d'énergie temps-fréquence  $S_0(u, \xi)$  et les valeurs de  $\theta, \chi$  extraites des *ridges* de la TFCT-Q, *i.e.* les maxima locaux de  $S_0(u, \xi)$ . La deuxième représentation consiste à représenter directement  $S_1(u, \xi), S_2(u, \xi), S_3(u, \xi)$  obtenus via (16). Notons que les deux représentations impliquent de considérer simultanément 3 figures, voir figure 3. Par concision, toutes deux seront appelées spectrogramme de polarisation de  $x(t)$ . Ainsi nous disposons d'une description complète du contenu temps-fréquence-polarisation d'un signal bivarié.

## 5 Exemple

Pour illustrer la pertinence de l'outil, on construit un signal synthétique  $x(t)$  par la superposition de 2 composantes : un chirp linéaire d'ellipticité constante et d'orientation variable et un signal modulé en fréquence et en ellipticité dont l'orientation est constante. Le signal est défini pour  $t \in [0, 1]$  par  $N = 1024$  échantillons. La TFCT-Q est calculée en utilisant une fenêtre de Hanning de longueur 101 échantillons de façon à avoir une bonne résolution temps-fréquence. La figure 1 présente un extrait de ce signal  $x(t)$ .

La figure 3 montre les deux représentations équivalentes du spectrogramme de polarisation de  $x(t)$ . Les figures 3a, 3b et 3c présentent les 3 paramètres de Stokes temps-fréquence permettant une description temps-fréquence-polarisation des composantes du signal  $x$ . Notons que ces paramètres  $S_1, S_2$  et  $S_3$  ont été normalisés par  $S_0$  afin d'être interprétables du point de vue polarisation. On peut lire directement sur la fig. 3c l'évolution instantanée de l'ellipticité de chaque composante car  $S_3$  est directement image de  $\chi$ . Par exemple, l'alternance des couleurs sur la composante modulée montre une oscillation basse-fréquence entre polarisations circulaires droite et gauche. De façon similaire, l'alternance des couleurs en fig. 3a et 3b montre que la composante chirp linéaire exhibe une orientation tournoyante. Les figures 3d, 3e et 3f donnent respectivement la densité d'énergie temps-fréquence, ainsi que l'orientation  $\theta$  et l'ellipticité  $\chi$  instantanée obtenues à partir des *ridges* de 3d. On identifie alors de façon très lisible les 2 composantes dans le plan temps-fréquence et leurs propriétés géométriques.

## 6 Conclusion

Nous proposons une méthode très générale basée sur la transformée de Fourier quaternionique permettant une nouvelle analyse temps-fréquence-polarisation des signaux bivariés. Nous avons introduit le plongement quaternionique, un analogue bivarié du signal analytique. Ce nouvel outil permet une identification univoque de paramètres géométriques et de phase parti-

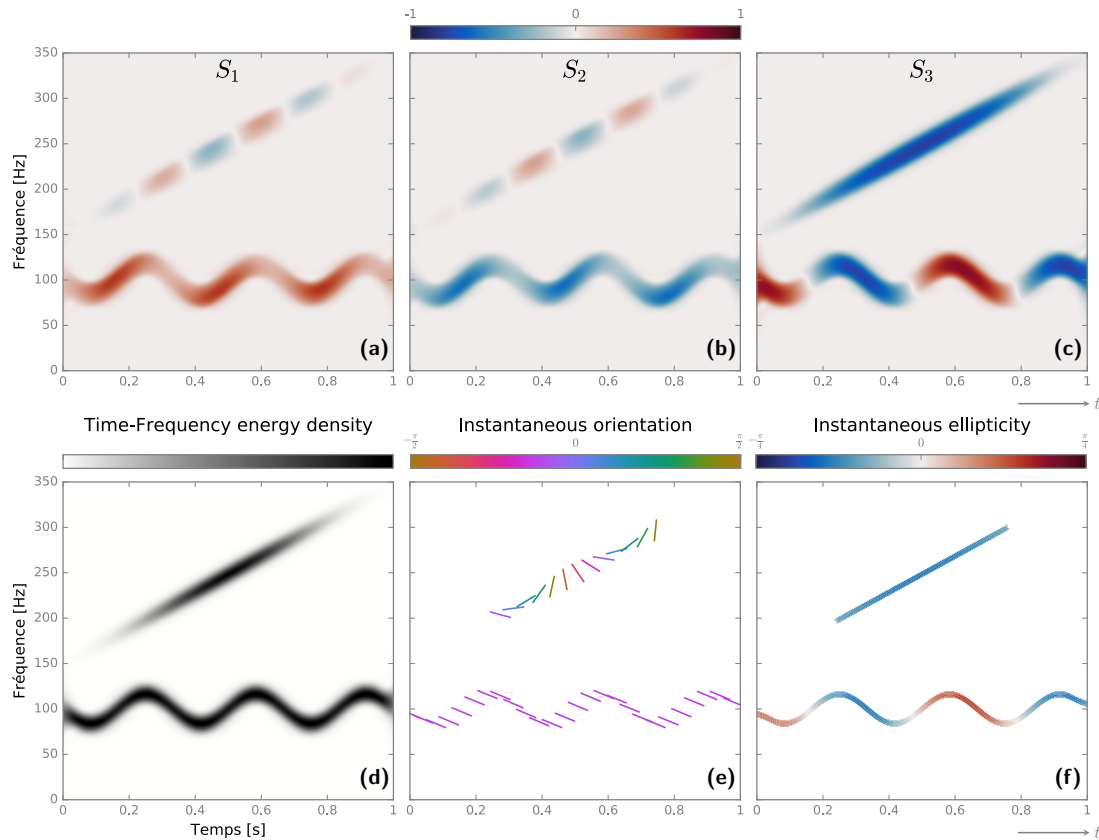


FIGURE 3 – Signal synthétique et représentations équivalentes de son spectrogramme de polarisation. (a), (b) and (c) Paramètres de Stokes temps-fréquence. (d) Densité d’énergie temps-fréquence (e) orientation instantanée (f) ellipticité instantanée sur les ridges.

nents pour les signaux bivariés à bande étroite. La généralisation de cette approche se fait grâce à la transformée de Fourier quaternionique à court-terme, ce qui conduit à la définition du spectrogramme de polarisation d’un signal bivarié. La validité de l’approche est assurée par le Théorème 1 qui garantit l’existence d’une formule de reconstruction ainsi que la conservation des propriétés énergétiques et géométriques. Une implémentation numérique des outils proposés est mise à disposition grâce à une toolbox Python<sup>1</sup>. Ces nouveaux outils ouvrent de nombreuses perspectives telles que l’identification et la séparation de sources en traitement du signal bivarié.

## Références

- [1] P. J. Schreier, “Polarization ellipse analysis of nonstationary random signals,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 9, pp. 4330–4339, 2008.
- [2] T. Tanaka and D. P. Mandic, “Complex Empirical Mode Decomposition,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 2, pp. 101–104, 2007.
- [3] G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves, and J. M. Lilly, “Bivariate empirical mode decomposition,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 12, pp. 936–939, 2007.
- [4] J. M. Lilly and S. C. Olhede, “Bivariate instantaneous frequency and bandwidth,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 2, pp. 591–603, 2010.
- [5] T. Bulow and G. Sommer, “Hypercomplex signals—a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2844–2852, 2001.
- [6] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, “Time-frequency analysis of bivariate signals,” <http://arxiv.org/abs/1609.02463>, 2016.
- [7] J. H. Conway and D. A. Smith, *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters, 2003.
- [8] N. Le Bihan, S. J. Sangwine, and T. A. Ell, “Instantaneous frequency and amplitude of orthocomplex modulated signals based on quaternion fourier transform,” *Signal Processing*, vol. 94, pp. 308–318, 2014.
- [9] B. Picinbono, “On instantaneous amplitude and phase of signals,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 3, pp. 552–560, 1997.
- [10] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*. CUP Archive, 2000.

1. BiSPy toolbox, <https://github.com/jflamant/bispy>