

Détection de changements par fusion robuste d'images multi-bandes de résolutions spatiale et spectrale différentes

Vinicius FERRARIS¹, Nicolas DOBIGEON¹, Qi WEI², Marie CHABERT¹

¹University of Toulouse, IRIT/INP-ENSEEIH, Toulouse Cedex 7, France

²Department of Electrical and Computer Engineering, Duke University, Durham NC, USA
prénom.nom@enseeiht.fr, qw245@cam.ac.uk

Résumé – La détection des changements (DC) entre des images optiques multi-bandes hétérogènes (par exemple entre une image panchromatique et une image hyperspectrale) se heurte à une difficulté importante liée à la différence de résolutions spectrale et spatiale entre ces images. Or, en situation d'urgence, il peut s'avérer indispensable de comparer des images de résolutions différentes. La plupart des méthodes de DC proposées dans la littérature ne tiennent pas compte de cette difficulté ou la contournent en introduisant un ré-échantillonnage préalable. Il est pourtant important d'éviter toute perte d'information, spatiale ou spectrale, telle qu'en produisent les opérations de ré-échantillonnage. La stratégie proposée dans cet article utilise un algorithme de fusion robuste afin de détecter des changements entre des images optiques multi-bandes, de résolutions spatiale et spectrale différentes, sans ré-échantillonnage préalable.

Abstract – Change detection between multi-band optical images with different spatial and spectral resolutions (e.g. a panchromatic high spatial resolution image and a hyperspectral low spatial resolution image) is a very challenging problem that most of the state-of-the-art methods do not take into account or even bypass. Nevertheless this is a very important issue in emergency situations. Therefore, this paper proposes a robust fusion-based strategy that efficiently detect changes between two multi-band optical images with different spatial and spectral resolutions.

1 Contexte, motivations et contribution

La DC est l'une des problématiques les plus importantes dans le domaine de la télédétection et possède un grand nombre d'applications [1]. Par comparaison d'images acquises à des dates différentes sur le même site géographique, il s'agit de détecter et de localiser d'éventuelles modifications de la scène au cours du temps. Le scénario le plus favorable et le plus considéré dans la littérature correspond au cas de deux images, acquises avec le même type de capteur, et qui présentent donc les mêmes résolutions spatiale et spectrale [2]. Cependant, dans certaines situations, comme par exemple lors d'une catastrophe naturelle, il n'est pas possible d'attendre qu'un tel couple d'images soit disponible pour effectuer un diagnostic. Il est donc indispensable de disposer de méthodes flexibles et robustes permettant la DC entre images de résolutions spatiale et spectrale différentes.

Actuellement, les images multi-bandes optiques constituent la modalité d'imagerie de télédétection la plus courante [2]. Il est possible de les classer en fonction de leurs caractéristiques de résolution spatiale (haute résolution (HR) ou basse résolution (BR)) et spectrales (panchromatiques (PAN), multispectrales (MS) ou hyperspectrales (HS)). Les techniques de DC les plus répandues pour les images optiques considèrent que les images à comparer peuvent être mises exactement en correspondance pixel à pixel. Sous l'hypothèse d'un bruit additif gaussien, la DC se base généralement sur des calculs de différences [2, 3]. Néanmoins, ces méthodes ne peuvent être appliquées à des images de résolutions différentes qu'au prix d'un ré-échantil-

lonnage spatial et/ou spectral préalable. Or, un ré-échantillonnage spectral peut atténuer l'impact des changements et donc les rendre moins détectables tandis qu'un ré-échantillonnage spatial peut réduire la précision de leur localisation.

Cet article propose une méthode de DC qui prend en compte les différences de résolution spatiale et spectrale. Le couple d'images optiques multi-bandes à comparer est constitué d'une image HR à faible résolution spectrale (PAN resp. MS) et d'une image BR à haute résolution spectrale (MS ou HS resp. HS). Chacune est modélisée par une transformation (de type dégradation) spatiale et/ou spectrale d'une image à haute résolution spectrale et spatiale non observée appelée image latente. Les deux images latentes représentent la scène observée à deux dates différentes avec les mêmes hautes résolutions spatiale et spectrale. Ces images partagent un certain degré de similarité si on considère que les changements dans la scène sont limités à des emplacements spatiaux spécifiques et parcimonieux. La différence entre les deux images latentes constitue alors une image de changements. Dans cet article, la DC est alors formulée comme un problème inverse et inspiré de la fusion d'images, qui permet d'estimer tout d'abord une des deux images latentes, puis l'image de changements.

L'article est organisé comme suit. Le problème est formulé dans la section 2. La section 3 décrit la solution du problème d'estimation formulé comme un problème inverse. Les résultats des simulations conduites sur des données synthétiques mais réalistes sont fournis dans la section 4. La section 5 conclut l'article.

2 Formulation du problème

Considérons deux images optiques multi-bandes correspondant à l'observation de la même zone géographique à deux instants différents t_i et t_j . Soient $\mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times n}$ l'image HR (PAN ou MS) et $\mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} \in \mathbb{R}^{m_\lambda \times m}$ l'image BR (MS ou HS) où m_λ (resp., n_λ) et m (resp., n) représentent le nombre de bandes et de pixels de l'images HR (respectivement BR) avec $m_\lambda > n_\lambda$ et $n > m$. Notre objectif est de produire une carte des changements qui se sont produit entre les instants t_i et t_j . Afin de nous affranchir de l'incompatibilité des résolutions des images observées, nous abordons la DC selon une approche basée sur la fusion [4]. Plus précisément, les deux images observées peuvent être considérées comme les versions dégradées de deux images latentes HR (MS ou HS) représentant respectivement la scène aux instants t_i et t_j . Le modèle d'observation s'exprime par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} &= \mathbf{L}\mathbf{X}^{t_i} + \mathbf{N}_{\text{HR}} \\ \mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} &= \mathbf{X}^{t_j}\mathbf{R} + \mathbf{N}_{\text{BR}} \end{aligned} \quad (1)$$

où \mathbf{X}^{t_i} et $\mathbf{X}^{t_j} \in \mathbb{R}^{m_\lambda \times n}$ représentent les images latentes à haute résolution spatiale et spectrale aux instants t_i et t_j , $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times m_\lambda}$ est la matrice de dégradation spectrale associée aux filtres PAN ou MS et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice de dégradation spatiale modélisant un flou bande-à-bande. Les termes \mathbf{N}_{BR} et \mathbf{N}_{HR} modélisent le bruit additifs des capteurs et les erreurs éventuelles de modélisation. Ils sont généralement considérés comme mutuellement indépendants et distribués selon des lois normales matricielles [5].

Les images latentes \mathbf{X}^{t_i} et \mathbf{X}^{t_j} peuvent être comparées pixel à pixel car elles possèdent la même (haute) résolution. Leur différence fournit une image de changements $\Delta\mathbf{X}$, elle-même à hautes résolutions spatiale et spectrale :

$$\mathbf{X}^{t_i} = \mathbf{X}^{t_j} + \Delta\mathbf{X}. \quad (2)$$

Le problème de DC est alors formulé comme l'estimation conjointe de l'image latente \mathbf{X}^{t_j} et de l'image des changements $\Delta\mathbf{X}$. L'image latente \mathbf{X}^{t_i} peut être obtenue en sous-produit à partir du modèle additif (2). Nous proposons de formuler ce problème d'estimation comme un problème inverse en introduisant des régularisations appropriées pour les paramètres inconnus \mathbf{X}^{t_j} et $\Delta\mathbf{X}$. L'approche, s'appuyant sur une fusion robuste des deux images multi-bandes observées, est décrite dans le paragraphe suivant.

3 Détection des changements

L'approche proposée permet d'estimer l'image des changements $\Delta\mathbf{X}$ étant donné le modèle (1), la statistique des bruits et l'hypothèse (2). Le modèle additif gaussien pour chaque matrice de bruit conduit à un modèle gaussien matriciel pour chaque image observée :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} | \mathbf{X}^{t_i} &\sim \mathcal{MN}_{n_\lambda, n}(\mathbf{L}\mathbf{X}^{t_i}, \mathbf{\Lambda}_{\text{HR}}, \mathbf{I}_n) \\ \mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} | \mathbf{X}^{t_j} &\sim \mathcal{MN}_{m_\lambda, m}(\mathbf{X}^{t_j}\mathbf{B}\mathbf{S}, \mathbf{\Lambda}_{\text{BR}}, \mathbf{I}_m). \end{aligned} \quad (3)$$

Les capteurs étant supposés indépendants, les bruits associés

et donc les images observées peuvent être supposés statistiquement indépendants. Par conséquent, la vraisemblance conjointe se formule comme un produit des distributions conditionnelles $p(\mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} | \mathbf{X}^{t_i})$ et $p(\mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} | \mathbf{X}^{t_j})$. L'estimateur conjoint du maximum *a posteriori* (MAP) de l'image latente et de l'image des changements, considéré comme étant *a priori* indépendantes, peut être exprimé en minimisant l'opposé du logarithme de la distribution *a posteriori* :

$$\left\{ \hat{\mathbf{X}}_{\text{MAP}}^{t_j}, \Delta\hat{\mathbf{X}}_{\text{MAP}} \right\} \in \underset{\mathbf{X}^{t_j}, \Delta\mathbf{X}}{\text{Argmin}} \mathcal{J}(\mathbf{X}^{t_j}, \Delta\mathbf{X}) \quad (4)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{X}^{t_j}, \Delta\mathbf{X}) &= \left\| \mathbf{\Lambda}_{\text{BR}}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} - \mathbf{X}^{t_j}\mathbf{B}\mathbf{S} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \\ &+ \left\| \mathbf{\Lambda}_{\text{HR}}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} - \mathbf{L}(\mathbf{X}^{t_j} + \Delta\mathbf{X}) \right) \right\|_{\text{F}}^2 \\ &+ \gamma_1 \phi_1(\mathbf{X}^{t_j}) + \gamma_2 \phi_2(\Delta\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5)$$

où $\|\cdot\|_{\text{F}}$ représente la norme de Frobenius. Les pénalisations $\phi_1(\cdot)$ et $\phi_2(\cdot)$ sont relatives à l'image latente et à l'image des changements respectivement. Les paramètres γ_1 et γ_2 règlent les niveaux de régularisation correspondants dans la fonction objectif globale $\mathcal{J}(\mathbf{X}^{t_j}, \Delta\mathbf{X})$.

Des problèmes similaires à (4) interviennent dans de nombreuses applications impliquant des images multi-bandes optiques, en particulier celles liées à la fusion d'images. Dans ce contexte, diverses fonctions de régularisation $\phi_1(\cdot)$ ont été considérées. Dans cet article, une régularisation de Tikhonov (correspondant à un *a priori* gaussien) garantit un compromis entre la complexité calculatoire et la précision des résultats [6].

Par ailleurs, dans le contexte spécifique de la DC, le terme de régularisation $\phi_2(\cdot)$ intervient alors pour garantir la parcimonie spatiale des changements (supposés spatialement localisés) entre \mathbf{X}^{t_i} et \mathbf{X}^{t_j} , c'est-à-dire que la plupart des colonnes de $\Delta\mathbf{X}$ doivent correspondre à des vecteurs nuls. Par conséquent, comme par exemple dans [7], un terme de régularisation en norme composite $\ell_{2,1}$ est considéré :

$$\phi_2(\Delta\mathbf{X}) = \|\Delta\mathbf{X}\|_{2,1} = \sum_{p=1}^n \|\Delta\mathbf{x}_p\|_2 \quad (6)$$

avec $\Delta\mathbf{X} = [\Delta\mathbf{x}_1, \dots, \Delta\mathbf{x}_n]$.

3.1 Algorithme de minimisation alternée

La fonction objectif (5) est minimisée suivant un algorithme de minimisation alternée résumé dans Algo. 1. Cet algorithme minimise itérativement la fonction objectif par rapport aux variables individuelles \mathbf{X}^{t_j} et $\Delta\mathbf{X}$. Il permet ainsi de diviser le problème global en deux sous-problèmes qui peuvent être efficacement résolus séparément selon différentes stratégies telles que détaillées ci-dessous.

3.1.1 Minimisation selon \mathbf{X}^{t_j}

A l'itération k de l'algorithme, lorsque l'image de changements $\Delta\mathbf{X}_k$ dans (5) est fixée, une image HR pseudo-observée

Algorithm 1 Algorithme de minimisation alternée

Input: $\mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j}, \mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i}, \mathbf{L}, \mathbf{B}, \mathbf{S}, \Delta \mathbf{X}_0$.

- 1: **for** $k = 1, 2, \dots$ **to** stopping rule **do**
- 2: $\mathbf{X}_k^{t_j} = \arg \min \mathcal{J}(\mathbf{X}_k^{t_j}, \Delta \mathbf{X}_{k-1})$
- 3: $\Delta \mathbf{X}_k = \arg \min \mathcal{J}(\mathbf{X}_k^{t_j}, \Delta \mathbf{X})$
- 4: **end for**

Output: $\hat{\mathbf{X}}^{t_j}, \hat{\Delta \mathbf{X}}$

à l'instant t_j peut être définie comme :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{HR},k}^{t_j} = \mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} - \mathbf{L} \Delta \mathbf{X}_k. \quad (7)$$

Cette image ne correspond pas à une observation réelle mais à l'image HR qui serait observée à l'instant t_j à partir de la même scène observée à l'instant t_i et de la valeur courante de l'image des changements $\Delta \mathbf{X}_k$. Substituer (7) dans (5) conduit à la fonction objectif selon \mathbf{X}^{t_j} qui peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{X}^{t_j}, \cdot) = & \left\| \mathbf{\Lambda}_{\text{BR}}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{Y}_{\text{BR}}^{t_j} - \mathbf{X}^{t_j} \mathbf{B} \mathbf{S} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \\ & + \left\| \mathbf{\Lambda}_{\text{HR}}^{-\frac{1}{2}} \left(\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{HR},k}^{t_j} - \mathbf{L} \mathbf{X}^{t_j} \right) \right\|_{\text{F}}^2 + \gamma_1 \phi_1(\mathbf{X}^{t_j}). \end{aligned} \quad (8)$$

Le sous-problème défini par (8) se ramène au problème classique de fusion d'images multi-bandes par exemple considéré dans [8]. Il s'agit en effet d'estimer une image latente \mathbf{X}^{t_j} à partir de deux images de la même scène, l'une étant réellement observée, l'autre correspondant à une pseudo-observation. Une stratégie pour calculer de manière explicite, exacte et rapide la solution de ce problème est proposée dans [8].

3.1.2 Minimisation selon $\Delta \mathbf{X}$

La même démarche peut être suivie pour le deuxième sous-problème. En fixant la valeur de $\mathbf{X}_k^{t_j}$ dans l'équation (5), il est possible de définir une image des changements à haute résolution spatiale et faible résolution spectrale comme suit :

$$\Delta \tilde{\mathbf{Y}}_{\text{HR},k} = \mathbf{Y}_{\text{HR}}^{t_i} - \mathbf{L} \mathbf{X}_k^{t_j}. \quad (9)$$

Comme au paragraphe 3.1.1, cette image non observée correspondrait à l'image des changements entre l'image observée à HR à l'instant t_i et l'image pseudo-observée à HR à l'instant t_i résultant de l'état actuel de l'estimation de l'image latente $\mathbf{X}_k^{t_j}$. En substituant (9) dans (5), la fonction objectif selon $\Delta \mathbf{X}$ devient :

$$\mathcal{J}(\cdot, \Delta \mathbf{X}) = \left\| \mathbf{\Lambda}_{\text{HR}}^{-\frac{1}{2}} \left(\Delta \tilde{\mathbf{Y}}_{\text{HR},k} - \mathbf{L} \Delta \mathbf{X} \right) \right\|_{\text{F}}^2 + \gamma \phi_2(\Delta \mathbf{X}). \quad (10)$$

Pour le choix particulier de $\phi_2(\cdot)$ effectué à la section 3, les termes d'attache aux données et de régularisation sont convexes [9], bien que le deuxième ne soit pas lisse. La solution unique peut alors être déterminée en utilisant des algorithmes proximaux comme par exemple l'algorithme Forward-Backward [10].

4 Analyse des performances

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse des performances de la méthode proposée. Pour des problèmes de DC, il est très rare de disposer de données réelles et de la vérité ter-

rain associée. Un protocole de simulation inspiré de celui de Wald [11] a donc été mis en place. Il consiste à générer des images observées à partir d'une seule image HR-HS de référence. L'image de référence est une image de taille $610 \times 330 \times 93$ acquise au dessus de l'Université de Pavie en Italie avec le capteur ROSIS. La dégradation spectrale considérée modélise une réponse panchromatique moyennant 43 bandes spectrales fournissant une image HR-PAN. La dégradation spatiale modélise un flou gaussien de noyau 5×5 avec sous-échantillonnage de facteur $d = 5$ dans les directions verticale et horizontale fournissant une image BR-HS. À partir de cette seule image de référence HR-HS, plusieurs masques de changement ont été générés manuellement. Un changement est simulé en modifiant la valeur des pixels d'une région entière du masque ou en effectuant une rotation de son contenu. L'ensemble des données de simulation ainsi construit se compose de 225 paires HR-HS différentes. Deux couples d'images d'observation à HR-PAN et BR-HS sont ensuite obtenues en appliquant alternativement les dégradations spatiale et spectrale à la paire HR-HS. Pour illustration, un jeu de données, constitué d'une paire d'images HR-PAN et BR-HS et la carte binaire \mathbf{D} des changements associée, est représenté sur la Fig. 1 (a), (b) et (c), respectivement.

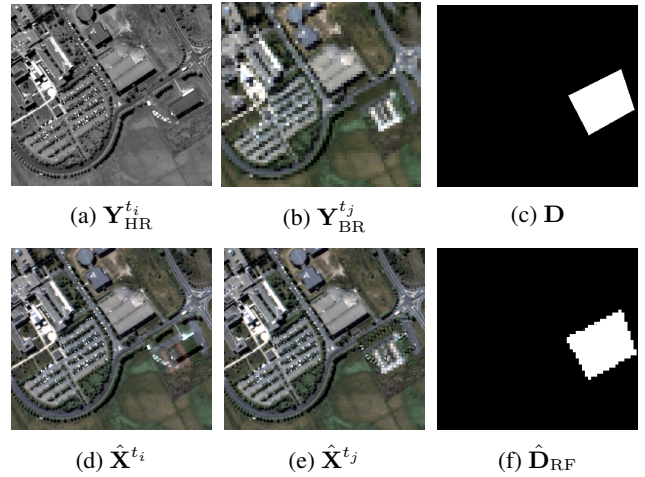


FIGURE 1 – Scénario HR-PAN/BR-HS.

La méthode de DC proposée fournit une carte binaire de changements $\hat{\mathbf{D}}_{\text{RF}}$ obtenue par seuillage de la mesure de parcimonie spatiale $\|\Delta \hat{\mathbf{X}}\|_{2,1}$ de l'image de changements. Cette méthode est comparée à trois autres méthodes. Celles-ci diffèrent par le prétraitement permettant de se ramener à des images observées de résolutions identiques. Pour ces trois algorithmes, l'étape de DC utilise l'approche décrite dans [3]. Le premier algorithme compare la version spatialement dégradée de l'image HR-PAN observée et la version spectralement dégradée de l'image BR-HS. La carte de changements résultante est BR. Elle est notée $\hat{\mathbf{D}}_{\text{WC}}$ où WC signifie "pire cas" (*worst case*). La deuxième méthode effectue une interpolation spatiale bicubique de chacune des bandes de l'image BR-HS observée, dégrade spectralement ce résultat et finalement effectue la DC par comparaison avec l'image HR-PAN observée. La carte de changements résultante est notée $\hat{\mathbf{D}}_{\text{ID}}$ où ID signifie "interpolation-

dégradation”. La troisième méthode utilise la même procédure avec un ordre inversé des opérations d’interpolation et de dégradation. La carte de changements résultante est notée \hat{D}_{DI} où DI se réfère à “dégradation-interpolation”. Classiquement, les performances des quatre méthodes de DC sont évaluées à partir des courbes de caractéristiques opérationnelles de réception (COR), qui représentent la probabilité de détection (PD) en fonction de la probabilité de fausse alarme (PFA). Chaque jeu de données permet de calculer une courbe COR. La figure 2 présente la moyenne de ces courbes COR obtenues avec les quatre méthodes sur l’ensemble des 225 jeux de données.

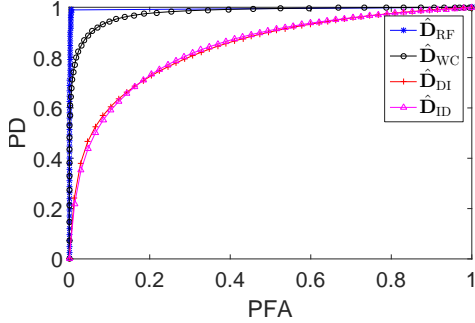


FIGURE 2 – Scenario HR-PAN/BR-HS : courbes COR.

Deux mesures quantitatives de la performance de détection peuvent être extraites des courbes COR : l’aire sous la courbe (ASC), correspondant à l’intégrale de la courbe COR et la distance (Dist.) entre l’intersection de la courbe COR avec la diagonale $PFA = 1 - PD$, et le point de non-détection ($PFA = 1, PD = 0$). Dans les deux cas, la détection est d’autant plus précise que la mesure est proche de 1. Ces mesures sont reportées dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Scénario HR-PAN/BR-HS : performance de la DC en termes d’ASC et Dist.

	\hat{D}_{RF}	\hat{D}_{WC}	\hat{D}_{DI}	\hat{D}_{ID}
ASC	0.9936	0.9777	0.8389	0.8389
Dist.	0.9896	0.9249	0.7595	0.7640

La méthode proposée présente des performances de détection supérieures à celles des autres méthodes. A titre d’illustration, la Fig. 1 montre un exemple dans lequel deux images observées HR-PAN et BR-HS ont été fusionnées pour produire la paire d’images latentes $(\hat{X}^{t_i}, \hat{X}^{t_j})$ et la carte binaire des changements \hat{D}_{RF} . Des résultats de simulation complémentaires pour des scénarios HR-PAN/BR-MS et HR-MS/BR-HS sont disponibles dans [12].

5 Conclusion

Cet article propose une nouvelle méthode de détection de changements entre images optiques multi-bandes caractérisées par des résolutions spatiales et spectrales différentes. Les changements sont considérés comme des différences entre deux ima-

ges latentes non observées de résolutions spatiale et spectrale identiques. Basée sur un modèle de dégradation qui lie chaque image observée à l’image latente associée, la méthode permet d’estimer les deux images latentes et l’image des changements associée. L’approche montre des performances supérieures aux méthodes classiquement utilisées. Le modèle proposé, dédié à l’analyse d’images optiques multi-bandes, repose sur une hypothèse de bruit additif gaussien. Les travaux futurs seront consacrés à la généralisation de ce modèle pour l’analyse d’images issues de modalités différentes.

Références

- [1] M. Dalla Mura, S. Prasad, F. Pacifici, P. Gamba, J. Chanussot, and J. A. Benediktsson, “Challenges and opportunities of multimodality and data fusion in remote sensing,” *Proc. IEEE*, vol. 103, no. 9, pp. 1585–1601, Sept. 2015.
- [2] F. Bovolo and L. Bruzzone, “The time variable in data fusion : A change detection perspective,” *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, vol. 3, no. 3, pp. 8–26, Sept. 2015.
- [3] F. Bovolo and L. Bruzzone, “A theoretical framework for unsupervised change detection based on change vector analysis in the polar domain,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 45, no. 1, pp. 218–236, Jan. 2007.
- [4] V. Ferraris, N. Dobigeon, Q. Wei, and M. Chabert, “Detecting changes between optical images of different spatial and spectral resolutions : a fusion-based approach,” 2017, submitted.
- [5] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distribution*, Number 104 in Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall, 1999.
- [6] L. Loncan, L.B. de Almeida, J. M. Bioucas-Dias, X. Briottet, J. Chanussot, N. Dobigeon, S. Fabre, W. Liao, G. A. Licciardi, M. Simoes, J.-Y. Tournet, M.A. Veganzones, G. Vivone, Q. Wei, and N. Yokoya, “Hyperspectral pansharpening : A review,” *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, vol. 3, no. 3, pp. 27–46, Sept. 2015.
- [7] C. Févotte and N. Dobigeon, “Nonlinear hyperspectral unmixing with robust nonnegative matrix factorization,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 24, no. 12, pp. 4810–4819, 2015.
- [8] Q. Wei, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, “Fast fusion of multiband images based on solving a Sylvester equation,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 24, no. 11, pp. 4109–4121, Nov. 2015.
- [9] S.P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [10] N. Parikh and S. Boyd, “Proximal algorithms,” *Foundations and Trends in Optimization*, vol. 1, no. 3, pp. 127–239, 2014.
- [11] L. Wald, T. Ranchin, and M. Mangolini, “Fusion of satellite images of different spatial resolutions : assessing the quality of resulting images,” *Photogrammetric engineering and remote sensing*, vol. 63, no. 6, pp. 691–699, 1997.
- [12] V. Ferraris, N. Dobigeon, Q. Wei, and M. Chabert, “Robust fusion of multiband images with different spatial and spectral resolutions for change detection,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 3, no. 2, pp. 175–186, June 2017.