

# Estimation de sous-espaces en présence de sources gaussiennes avec application à la détection STAP

R. BEN ABDALLAH, A. BRELOY, M. N. EL KORSO, D. LAUTRU, H. OUSLIMANI

Laboratoire Energétique Mécanique Electromagnétisme (LEME), UPL, Univ Paris Nanterre,  
50 rue de Sèvres 92410 Ville d'Avray, France

{rayen.benabdallah, abreloy, m.elkors, dlautru, houslimani}@u-paris10.fr

**Résumé** – Dans cet article nous considérons le problème de l'estimation de sous-espace d'un signal d'intérêt à partir d'un jeu de données bruité. Pour ce faire, nous adoptons une approche bayésienne, similaire à celle développée dans [1], afin d'obtenir un estimateur minimisant la distance moyenne (EMDM) entre la vraie matrice de projection  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  et son estimée  $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T$ . Plus particulièrement, nous étendons les estimateurs proposés dans [1] au contexte de modèle linéaire avec des sources gaussiennes où l'a priori sur la base  $\hat{\mathbf{U}}$  sera une loi de Bingham ou une loi de von Mises Fisher. Enfin, nous étudions numériquement les performances de l'estimateur proposé sur une application de type Space Time Adaptive Processing (STAP) pour un radar aéroporté au travers de données réelles.

**Abstract** – In this paper, we focus on the signal subspace estimation using a Bayesian framework. Specifically, we extend [1] in order to propose a minimum mean square distance estimator, of linear model with Gaussian sources, minimizing the expected distance between the true projection matrix  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  and its estimate  $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T$ . Finally, numerical simulations based on synthetic and STAP real data illustrate the usefulness of the proposed scheme for Bingham and von Mises Fisher priors for the subspace basis.

## 1 Introduction

L'estimation de sous-espaces est un problème omniprésent dans le traitement du signal où le but est d'estimer le sous-espace, de faible dimension, où se trouve l'information générée par des signaux d'intérêt. Ceci représente une étape clé dans de nombreuses applications, comme l'estimation des directions d'arrivée [2], l'annulation d'interférence [11], ou la détection de signaux [10].

Nous considérons dans ce papier un modèle linéaire. Ce modèle est largement utilisé dans la littérature : la matrice de données est modélisée sous la forme  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{S} + \mathbf{N}$ , où  $\mathbf{U}$  représente la base du sous-espace d'intérêt,  $\mathbf{S}$  est le signal d'intérêt et  $\mathbf{N}$  est un bruit additif. Le problème adressé est d'estimer  $\mathbf{U}$  à partir des observations  $\mathbf{Y}$ . La méthode la plus courante est d'estimer le sous-espace  $\mathbf{U}$  par décomposition en valeurs singulières (DVS) de la matrice de covariance empirique (SCM), c'est-à-dire au travers des vecteurs propres prédominants de la SCM. Ceci fournit généralement un estimateur précis de l'espace  $\mathcal{R}(\mathbf{U})$  (i.e. généré par  $\mathbf{U}$ ) pour un rapport signal/bruit (RSB) élevé et/ou pour un échantillon de taille plus importante. Cependant, cette méthode montre ses limites en dehors de ces régimes asymptotiques. Une solution serait d'intégrer certaines connaissances a priori dans le processus d'estimation, comme proposé dans [1] et [5]. Par exemple, dans un cadre bayésien, l'erreur minimale quadratique moyenne (EMQM) qui minimise la distance Euclidienne moyenne entre la base réelle  $\mathbf{U}$  et son estimée  $\hat{\mathbf{U}}$ , ou l'estimateur minimisant la distance moyenne (EMDM) qui vise à minimiser la distance entre la vraie matrice de projection  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  et son estimée  $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T$ , ont été proposés res-

pectivement dans [5] et [1]. Plus particulièrement, dans [1], le EMDM est proposé pour les modèles linéaires et de covariance avec des distributions a priori pour  $\mathbf{S}$  uniforme. Dans ce papier, nous étendons le travail de [1] pour un modèle linéaire où l'a priori de  $\mathbf{S}$  est une loi gaussienne avec un a priori pour  $\mathbf{U}$  de loi Bingham ou un von Mises Fisher. Enfin, nous étudions numériquement les performances de l'estimateur proposé pour une application de type *Space Time Adaptive Processing* (STAP) pour un radar aéroporté au travers de données réelles.

## 2 Rappels et modèle des observations

Tout au long de ce papier, nous désignerons par  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times K}$  la matrice contenant les observations, par  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times P}$  la base du sous-espace d'intérêt, par  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{P \times K}$  la matrice contenant le signal d'intérêt et par  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times K}$  la matrice représentant la perturbation avec  $N$  le nombre de capteurs,  $K$  le nombre d'observations,  $P$  la dimension du sous-espace d'intérêt ( $P \ll N$ ) et  $p(\mathbf{Y} | \mathbf{U})$  désigne la probabilité conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{U}$ . Enfin,  $\text{Tr}\{\cdot\}$  représente la trace d'une matrice et  $E\{\cdot\}$  l'espérance d'une variable aléatoire.

### 2.1 Estimateur minimisant la distance moyenne

L'EMDM minimise la distance entre les sous-espaces  $\mathcal{R}(\hat{\mathbf{U}})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{U})$  engendrés respectivement par  $\hat{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{U}$ , c'est-à-dire,  $\|\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\|_F^2$ , qui représente une distance naturelle dans la variété de Grassman  $G_{N,P}$  [3], [4] (l'espace des sous-espaces de dimension  $P$  dans  $\mathbb{R}^N$ ). Cet estimateur est donné par  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{U}}} \|\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\|_F^2 =$

$\arg \max_{\hat{\mathbf{U}}} \mathbb{E}\{\text{Tr}\{\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{U}}\}\}$ , et se simplifie [1] comme étant les  $P$  vecteurs propres associés aux  $P$  plus grandes valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}(p(\mathbf{U} | \mathbf{Y})) = \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T p(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) d\mathbf{U}$  :

$$\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM}} = \mathcal{P}_P \left\{ \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T p(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) d\mathbf{U} \right\} = \mathcal{P}_P \{ \mathbf{M}(p(\mathbf{U} | \mathbf{Y})) \} \quad (1)$$

avec  $\mathcal{P}_P\{\cdot\}$ , l'opérateur qui extrait les  $P$  vecteurs propres associés aux  $P$  plus grandes valeurs propres. Cette expression dépend de  $p(\mathbf{U} | \mathbf{Y})$  qui doit être spécifiée selon le modèle des observations et de l'information a priori de  $\mathbf{S}$  et de  $\mathbf{U}$ .

## 2.2 Modèle des observations

Dans cet article, nous supposons que les observations sont issues d'une somme d'un signal d'intérêt et d'une perturbation qui suit une distribution gaussienne. Plus précisément, les colonnes de  $\mathbf{N}$  sont i.i.d. et suivent  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ . De même, et contrairement à [1] où  $\mathbf{S}$  suit une loi uniforme, on suppose que les colonnes de  $\mathbf{S}$  sont i.i.d. et suivent  $\mathcal{N}(0, \sigma_S^2 \mathbf{I})$ . Ainsi, le modèle linéaire est donné par  $\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{S} + \mathbf{N}$ . Puisque nous adoptons un cadre bayésien, une distribution a priori doit être assignée à  $\mathbf{U}$ . Les distributions de bases orthonormées les plus connues sont Bingham [7] et von Mises Fisher (vMF) [8].

### 2.2.1 Distribution de Bingham von Mises Fisher (BMF)

La distribution de BMF est paramétrée par les matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{P \times P}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times P}$  [6]. Dans notre étude, on se restreint au cas où  $\mathbf{B}$  est diagonale,  $\mathbf{A}$  symétrique et  $\mathbf{C}$  orthogonale. On notera par  $\mathbf{U} \sim \text{BMF}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  si la densité de probabilité de  $\mathbf{U}$  est donnée par  $p_{\text{BMF}}(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\mathbf{C}^T \mathbf{U} + \mathbf{B} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}\}$  où  $\text{etr}\{\cdot\}$  représente l'exponentiel de la trace. Les distributions de Bingham et vMF sont des cas particuliers de cette distribution.

### 2.2.2 Distribution de Bingham

La distribution de Bingham [7] est un cas particulier de la distribution BMF où  $\mathbf{C}$  est une matrice nulle. La matrice  $\mathbf{U}$  suit une distribution de Bingham paramétrée par  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{U} \sim B(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , si sa densité de probabilité s'écrit comme  $p_B(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\mathbf{B} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}\}$  où  $\mathbf{A}$  décrit une connaissance a priori du sous-espace d'intérêt. Ici, on se focalisera sur le cas où  $\mathbf{A}$  est proportionnelle à la matrice de projection générée par la base  $\bar{\mathbf{U}}$ . Par conséquent, on notera  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{A} = \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T$  :

$$p_B(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\kappa \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{U}\} \quad (2)$$

où  $\bar{\mathbf{U}}$  représente le centre de la distribution et  $\kappa$  le paramètre de concentration de la distribution.

### 2.2.3 Distribution de vMF

La distribution vMF est aussi un cas particulier de la distribution BMF [8] pour laquelle  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont nulles.  $\mathbf{U}$  suit une distribution de vMF avec les paramètres  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{U} \sim \text{vMF}(\mathbf{C})$ , si sa fonction de densité de probabilité est donnée par  $p_{\text{vMF}}(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\mathbf{C}^T \mathbf{U}\}$ . Comme précédemment, nous considérons le cas où la matrice  $\mathbf{C}$  est proportionnelle à une matrice unitaire  $\bar{\mathbf{U}}$ . On notera  $\mathbf{C} = \kappa \bar{\mathbf{U}}$ , par conséquent,

$$p_{\text{vMF}}(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\kappa \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{U}}\} \quad (3)$$

**Remarque :** Il est à noter que la distribution de Bingham,  $p_B$ , caractérise la distribution de  $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ . La distribution de vMF,  $p_{\text{vMF}}$ , caractérise la distribution de la base orthogonale  $\mathbf{U}$ . Par conséquent, comme définie dans (2) et (3),  $p_B$  est invariante par rotation contrairement à  $p_{\text{vMF}}$ .

## 3 Estimateurs proposés

Afin de développer l'algorithme EMDM, commençons tout d'abord par exprimer la probabilité conditionnelle :  $p(\mathbf{Y} | \mathbf{U}) = \int p(\mathbf{Y} | \mathbf{S}, \mathbf{U}) p(\mathbf{S}) d\mathbf{S} \propto \text{etr}\{\alpha_G \mathbf{Y}^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}\}$ , où  $\alpha_G = \frac{\sigma_S^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + \sigma_S^2)}$ . Dans ce qui suit, on donnera l'expression de l'EMDM pour des distributions a priori de type Bingham et vMF pour  $\mathbf{U}$ .

### 3.1 Prior de Bingham

Nous commençons par calculer la distribution a posteriori de  $\mathbf{U}$ , qui est donnée par  $p_{B-G}(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{U}) p_B(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\mathbf{U}^T [\alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T] \mathbf{U}\}$ , ce qui se simplifie par  $p_{B-G}(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) \propto B(\alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T, \mathbf{I})$ . Ainsi, l'EMDM donné par (1), s'obtient comme  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-B-G}} = \mathcal{P}_P \left\{ \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T p_{B-G}(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) d\mathbf{U} \right\} = \mathcal{P}_P \left\{ \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T \text{etr}\{\mathbf{U}^T [\alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T] \mathbf{U}\} d\mathbf{U} \right\}$ . En utilisant la proposition 1 de [1], qui établit que  $\int \mathbf{U} \mathbf{U}^T \text{etr}\{\mathbf{U}^T (\alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) \mathbf{U}\} d\mathbf{U}$  et  $\alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T$  partagent les mêmes vecteurs propres, on en déduit que

$$\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-B-G}} = \mathcal{P}_P \left\{ \alpha_G \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \right\} \quad (4)$$

**Remarque :** La loi de Bingham en (2) peut s'étendre au cas complexe (contrairement à vMF en (3)). Cet estimateur peut donc s'appliquer à des données complexes (où  $\alpha_G$  est modifié et les opérateurs  $^T$  deviennent  $^H$ ), comme illustré section 5.

### 3.2 Prior de vMF

Dans le cas d'un a priori vMF, la densité de probabilité a posteriori de  $\mathbf{U}$  est donnée par  $p_{\text{vMF-G}}(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{U}) p_{\text{vMF}}(\mathbf{U}) \propto \text{etr}\{\kappa \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{U} + \alpha_G \mathbf{U}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{U}\} \propto \text{BMF}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T, \alpha_G \mathbf{I}, \kappa \bar{\mathbf{U}})$ . Ainsi, en utilisant (1) nous obtenons  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-vMF-G}} = \mathcal{P}_P \left\{ \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T p_{\text{vMF-G}}(\mathbf{U} | \mathbf{Y}) d\mathbf{U} \right\} = \mathcal{P}_P \left\{ \int \mathbf{U} \mathbf{U}^T \text{etr}\{\kappa \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{U} + \alpha_G \mathbf{U}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{U}\} d\mathbf{U} \right\}$ . Cependant, il est à noter qu'une expression analytique de l'EMDM dans ce cas semble impossible à obtenir. Néanmoins, comme dans [1], nous proposons d'utiliser un échantillonneur de Gibbs afin de générer une distribution BMF [6], et calculer la moyenne arithmétique induite (MAI) [9] de la matrice unitaire  $\mathbf{U}^{(n)} \sim \text{BMF}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T, \alpha_G \mathbf{I}, \kappa \bar{\mathbf{U}})$ , ainsi, l'EMDM est évaluée par :

$$\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-vMF-G}} = \mathcal{P}_P \left\{ \frac{1}{N_r} \sum_{n=N_{bi}+1}^{N_{bi}+N_r} \mathbf{U}^{(n)} (\mathbf{U}^{(n)})^T \right\} \quad (5)$$

où  $N_{bi}$  représente le nombre d'échantillons (*burn-in samples* en anglais) dans la chaîne de Markov et  $N_r$  le nombre d'échantillons utilisés pour approximer l'estimateur.

**Remarque :** Nous rappelons que l'EMDM a été proposé dans [1] pour un modèle linéaire où  $\mathbf{S}$  suit une distribution a priori uniforme. Pour un a priori de Bingham, par rapport à  $\mathbf{U}$ , l'estimateur est donné par  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-B-U}} = \mathcal{P}_P \left\{ \alpha_U \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T + \kappa \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \right\}$ .

Pour un a priori de vMF, l'EMDM est donné par (5) où  $\mathbf{U}^{(n)} \sim \text{BMF}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T, \alpha_U \mathbf{I}, \kappa \bar{\mathbf{U}})$  et  $\alpha_U = \frac{1}{2\sigma^2}$ . La différence entre l'estimateur proposé (voir (4) et (5)) et celui donné dans [1] réside dans le scalaire  $\alpha_G$ . Pour de faible RSB,  $\alpha_G \ll \alpha_U$ , ce qui implique que notre estimateur tend plus vers l'information a priori de  $\bar{\mathbf{U}}$ . Cependant, pour de fort RSB,  $\alpha_G \approx \alpha_U$  rendant les deux estimateurs équivalents (cf. Fig. 1).

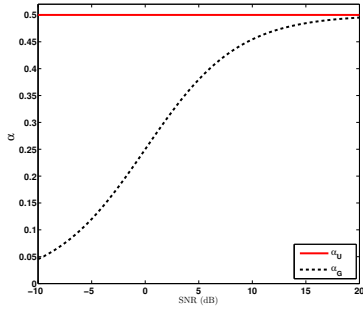


FIGURE 1 –  $\alpha_G = \frac{\sigma_S^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + \sigma_S^2)}$  et  $\alpha_U = \frac{1}{2\sigma^2}$  en fonction du RSB pour  $\sigma^2 = 1$ .

## 4 Simulations numériques

Dans cette section, nous nous focalisons sur les simulations numériques en utilisant la fraction moyenne d'énergie (FME) comme critère de performance. La FME de l'estimateur  $\hat{\mathbf{U}}$ , donnée par  $\text{FME}(\hat{\mathbf{U}}) = \text{E}\{\text{Tr}\{\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{U}} \mathbf{U}\}\}$ , évalue la proximité d'un estimateur par rapport à la matrice  $\mathbf{U}$ . Nous posons  $K=5$ ,  $N=20$ ,  $P=5$ ,  $\text{RSB}=\log(\frac{\sigma_S^2}{\sigma^2})=0\text{dB}$ ,  $\kappa=20$  et  $\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ 0 \end{bmatrix}$ , les colonnes de  $\mathbf{S}$  sont i.i.d. gaussiennes,  $\mathbf{U}$  est déterministe et fixé à  $\bar{\mathbf{U}}$ . Dans la suite, nous comparons les EMDM proposés, désignés par  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-B-G}}$  et  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-vMF-G}}$  avec ceux proposés dans [1], désignés par  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-B-U}}$  et  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{EMDM-vMF-U}}$ , et la DVS de la SCM, désigné par  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{SCM}}$  qui ne prend en compte aucun a priori. Le MAI est calculé avec  $N_{bi} = 10$  et  $N_r = 200$ . D'après la Fig.2 et Fig.3, l'estimateur  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{SCM}}$  montre de mauvaises performances en dehors des régimes asymptotiques. Nous notons aussi que pour de faibles RSB et/ou un petit nombre d'échantillons, les estimateurs proposés (4), (5), montrent une meilleure performance par rapport à ceux présentés dans [1] ce qui est naturel car ces estimateurs sont naturellement plus tirés vers l'a priori  $\bar{\mathbf{U}}$  (ici fixé déterministe dans la génération des données). Dans les régimes asymptotiques, les estimateurs proposés ont presque les mêmes performances que ceux donnés dans [1].

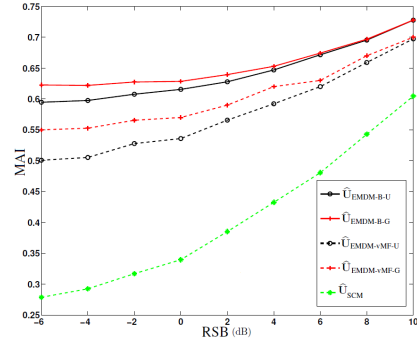


FIGURE 2 – MAI de  $\hat{\mathbf{U}}$  en fonction du RSB, pour  $K = 5$ , généré avec une distribution gaussienne pour  $\mathbf{S}$  et  $\bar{\mathbf{U}}$  déterministe.

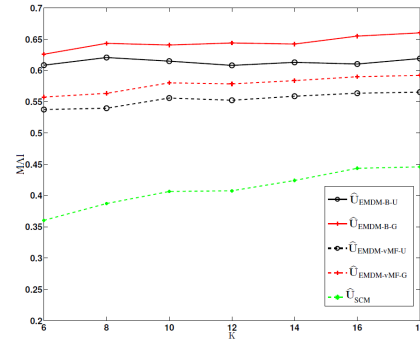


FIGURE 3 – MAI de  $\hat{\mathbf{U}}$  en fonction de  $K$ , pour  $\text{RSB} = 0\text{dB}$ , généré avec une distribution gaussienne pour  $\mathbf{S}$  et  $\bar{\mathbf{U}}$  déterministe.

## 5 Application à la détection STAP

Dans cette section, nous illustrons l'intérêt de l'EMDM pour le traitement adaptatif STAP qui signifie *space time adaptive processing* en anglais pour un radar aéroporté au travers de données réelles fourni par l'agence française DGA/MI [16]. Le STAP [12] est appliqué au radar aéroporté afin de détecter les cibles mobiles, typiquement, le récepteur radar consiste en une antenne de  $Q$  capteurs avec  $M$  pulsations dans un intervalle de traitement, c'est-à-dire,  $N_c = MQ$ . Nous supposons que les  $K + 1$  échantillons sont donnés par [15],  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{d} + \mathbf{c}_0 + \mathbf{n}_0$  et  $\mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \forall k \in \{1 \dots K\}$  où la cellule sous test,  $\mathbf{z}_0$ , contient potentiellement une cible  $\mathbf{d} = \alpha_0 \mathbf{p}(\theta, v_t)$  qui doit être détectée. Tandis que  $\alpha_0$  représente l'amplitude,  $\mathbf{p}$  le vecteur directionnel normalisé,  $v_t$  la vitesse de la cible et  $\theta$  la direction d'arrivée de la cible ( $\alpha_0$ ,  $v_t$  et  $\theta$  sont inconnus). Pour chaque échantillon, le bruit additif est issu d'une somme d'un fouillis du sol  $\mathbf{c}$  et d'un bruit Gaussien blanc noté  $\mathbf{n}$ . Les données secondaires  $\{\mathbf{z}_k\}$  sont supposées i.i.d., sans corruption de signaux/cibles interférant. En invoquant la règle de Brennan [13], le fouillis du sol est contenu dans un sous-espace  $\Pi_c = \mathbf{U}_c \mathbf{U}_c^H$  de dimension connue  $R$ . Par conséquent, en concaténant les données secondaires, nous obtenons,  $\mathbf{Z} = \Pi_c \mathbf{C} + \mathbf{N}$ . Il est intéressant de mentionner que, même si la fluctuation du fouillis  $\mathbf{c}$  ne peut pas être modélisée par une loi gaussienne en pratique, nos résultats révèlent que notre estimateur

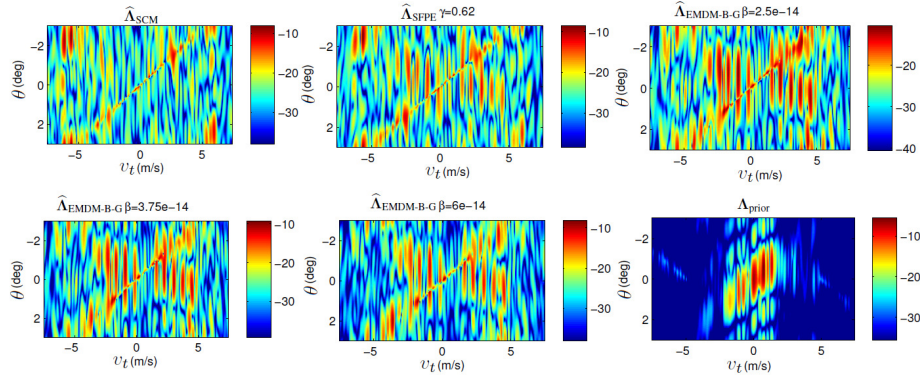


FIGURE 4 – Sortie du ANMF pour une grille de  $(\theta, v_t)$  avec  $\theta \in [-3, 3]$  et  $v_t \in [-6, 6]$  (cas considérés  $\hat{\Lambda}_{SCM}$ ,  $\hat{\Lambda}_{SFPE}$ ,  $\hat{\Lambda}_{EMDM-B-G}$ ). Voir [16] pour les données techniques relatives aux conditions de mesure.

reste robuste à une telle hypothèse (c.f. Fig. 4). Dans ce qui suit, nous illustrons les performances du filtre adapté normalisé de rang faible ANMF (*low rank adaptive normalized matched filter*, en anglais) [12] donné par  $\hat{\Lambda}(\hat{\Pi}_c) = \frac{|\mathbf{d}^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{z}_0|^2}{|\mathbf{d}^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{d}| |\mathbf{z}_0^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{z}_0|}$  où  $\hat{\Pi}_c = \hat{\mathbf{U}}_c \hat{\mathbf{U}}_c^T$  représente le projecteur sous-espace du fouillis (PSF) estimé à partir des données secondaires  $\{\mathbf{z}_k\}$ . Les performances d'un détecteur donné dépend de la précision de l'estimateur PSF à partir duquel il est construit. C'est pourquoi nous comparons les performances des détecteurs suivants :  $\hat{\Lambda}_{SCM}$ , où le PSF est estimé à partir de la DVS de la SCM.  $\hat{\Lambda}_{SFPE}$ , où le PSF est estimé à partir de la DVS d'un algorithme du point fixe régularisé avec un  $\gamma$  minimal comme paramètre de régularisation [14].  $\hat{\Lambda}_{EMDM-B-G}$ , où le PSF est estimé à partir de notre méthode, voir (4). Les paramètres  $\alpha_G$  et  $\kappa$  sont inconnus en pratique, par conséquent, nous illustrons les performances de l'estimateur défini comme  $\hat{\mathbf{U}}_{EMDM-B-G} = \mathcal{P}_R [\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H + \beta \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}^H]$  pour différentes valeurs du ratio  $\beta = \kappa/\alpha_G$ . L'information a priori  $\bar{\mathbf{U}}$  sera donnée par la DVS de la matrice de covariance du modèle STAP de [12]. Enfin, nous notons  $\Lambda_{prior}$  le détecteur (non adaptatif) utilisant uniquement ce dernier a priori.

La Fig. 4 montre la sortie des différents détecteurs (c'est-à-dire la valeur de l'ANMF pour une grille de paramètres cible) pour une configuration de 10 cibles avec un nombre de données secondaires limité ( $2R < K = 100 < N_c/2$ ). Nous observons que, dans ce contexte, le détecteur  $\hat{\Lambda}_{SFPE}$  fournit une détection de cibles avec un taux de fausses alarmes relativement faible. Le détecteur  $\hat{\Lambda}_{EMDM-B-G}$  représente un compromis entre  $\hat{\Lambda}_{SCM}$  (pour  $\beta = 0$ ) et  $\Lambda_{prior}$  (pour  $\beta \rightarrow \infty$ ). Par ailleurs, le détecteur  $\hat{\Lambda}_{SCM}$  ne permet pas la détection de cible car les réponses cibles semblent également annulées. Cela est probablement dû à l'étalement des cibles dans les données secondaires et à la faible robustesse de la SCM. Le détecteur déterministe  $\Lambda_{prior}$  ne supprime pas le fouillis du sol augmentant ainsi la probabilité de fausse alarme. Cependant, le détecteur  $\hat{\Lambda}_{EMDM-B-G}$  fournit un compromis qui permet le rejet de l'interférence due au fouillis du sol permettant ainsi une détection de cible plus fiable. Ce détecteur présente de meilleurs résultats que  $\hat{\Lambda}_{SFPE}$  pour les valeurs appropriées du paramètre  $\beta$ , ce qui illustre l'intérêt de prendre en compte l'information a priori du

sous-espace et l'utilité du degré de liberté  $\beta$ . Comme perspectives de ce travail, il sera intéressant de développer des méthodes adaptatives pour la sélection du paramètre  $\beta = \kappa/\alpha_G$ . Un deuxième point à étudier est le développement d'estimateurs EMDM qui tiennent compte d'autres modèles de signaux (par exemple des modèles de covariance, des sources colorées et non gaussiennes).

## Références

- [1] O. Besson, N. Dobigeon and J. Tourneret, Minimum mean square distance estimation of a subspace, *IEEE Trans., Signal Process.*, vol. **59**, No. 12, pp 5709-5720, December 2011.
- [2] R. O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE Trans., Antennas Propag.*, vol. **34**, no 3, pp 276-280, March 1986.
- [3] A. Edelman, T. Arias, and S. Smith, The geometry of algorithms with orthogonality constraints, *SMAI J. Matrix Anal. Appl.*, vol. **20**, no. 2, pp. 303-353, 1998.
- [4] G. Golub and C. V. Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed. Baltimore, MD : Johns Hopkins Univ. Press, 1996.
- [5] A. Srivastava, A Bayesian approach to geometric subspace estimation, *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. **48**, no. 5, pp. 1390-1400, May 2000.
- [6] P. D. Hoff, Simulation of the matrix Bingham-von Mises-Fisher distribution with applications to multivariate and relational data, *J. Computat. Graph. Statist.*, vol. **18**, no. 2, pp. 438-456, June 2009.
- [7] K. V. Mardia and P. E. Jupp, *Directional Statistics*. New York : Wiley, pp. 167-183, 1999.
- [8] Y. Chikuse, *Statistics on Special Manifolds*. New York : Springer-Verlag, pp. 27-52, 2003.
- [9] A. Sarlette and R. Sepulchre, Consensus optimization on manifolds, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. **48**, no. 1, pp. 56-76, 2009.
- [10] M. Haardt, M. Pesavento, F. Roemer and M. N. El Korso, Subspace Methods and Exploitation of Special Array Structures, *Electro. Refer. in Sig. Process. : Array and Statis. Sig. Process.* (M. Viberg, ed.), vol. **3**, pp. 651-717, 2014.
- [11] J. Liu, M. S. Shbat and V. Tuzlukov, Interference Cancellation and DOA Estimation by Generalized Receiver Applying LMS and MUSIC Algorithms, *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceed.*, pp 187-190, March 2013.
- [12] J. Ward, Space-time adaptive processing for airborne radar, *Tech. Rep.*, Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA, December 1994.
- [13] L. E. Brennan and F. M. Staudaher, Subclutter visibility demonstration, *Tech. Rep.*, RL-TR-92-21, Adapt. Sensors Incorporated, March 1992.
- [14] F. Pascal, Y. Chitour and Y. Quek, Generalized robust shrinkage estimator and its application to STAP detection problem, *Sig. Process.*, arXiv :1311.6567, September 2014.
- [15] G. Ginolhac, P. Forster, J. P. Ovarlez and F. Pascal, Détecteurs STAP Rang Réduit, *Traitement du Signal*, vol. **28**, no. 1-2, pp 143-170, April 2011.
- [16] J. P. Ovarlez, F. Le Chevalier and S. Bidon, Les données de club STAP, *Introduction au STAP, Traitement de signal*, vol. **28**, 2011