

# Déconvolution parcimonieuse sans grille : une méthode de faible rang

Paul CATALA<sup>1</sup>, Vincent DUVAL<sup>2,3</sup>, Gabriel PEYRÉ<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>DMA, ENS

45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

<sup>2</sup>Mokaplan, INRIA Paris

2 rue Simone Iff, 75012 Paris, France

<sup>3</sup>CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75016 Paris, France

<sup>4</sup>CNRS, UMR 8553

pcatala@dma.ens.fr, vincent.duval@inria.fr, gabriel.peyre@ens.fr

**Résumé** – On s'intéresse à la résolution numérique du problème de déconvolution sans grille pour des mesures de Radon discrètes. Une approche courante consiste à introduire des relaxations semidéfinies positives (SDP) du problème variationnel associé, qui correspond ici à un problème de minimisation de variation totale. Cependant, pour des signaux de dimension supérieure à 1, les méthodes usuelles de points intérieurs sont peu efficaces pour résoudre ces programmes SDP, leur taille étant de l'ordre de  $f_c^{2d}$  où  $f_c$  désigne la fréquence de coupure du filtre et  $d$  la dimension du signal. Nous introduisons en premier lieu une version pénalisée de la formulation SDP, dont les solutions sont de faible rang. Nous proposons ensuite une méthode basée sur l'algorithme de Frank-Wolfe, capable d'exploiter efficacement d'une part cette propriété de faible rang, d'autre part l'aspect convolutif du problème ; notre méthode atteint ainsi un coût de l'ordre de  $O(f_c^d \log f_c)$  par itération. Nos simulations sont prometteuses, et montrent que l'algorithme converge en  $k$  étapes,  $k$  étant le nombre de Diracs dans la solution.

**Abstract** – We propose a new solver for the sparse spikes deconvolution problem over the space of Radon measures. A common approach to off-the-grid deconvolution considers semidefinite (SDP) relaxations of the total variation (the total mass of the measure) minimization problem. The direct resolution of this SDP is however intractable for large scale settings, since the problem size grows as  $f_c^{2d}$  where  $f_c$  is the cutoff frequency of the filter. Our first contribution introduces a penalized formulation of this semidefinite lifting, which has low-rank solutions. Our second contribution is a conditional gradient optimization scheme with non-convex updates. This algorithm leverages both the low-rank and the convolutive structure of the problem, resulting in an  $O(f_c^d \log f_c)$  complexity per iteration. Numerical simulations are promising and show that the algorithm converges in exactly  $k$  steps,  $k$  being the number of Diracs composing the solution.

## 1 Introduction

### 1.1 Déconvolution parcimonieuse

Les problèmes de super-résolution visent à reconstruire toutes les fréquences d'un signal étant donné des observations de faible résolution et bruitées. Les applications de ces méthodes touchent de nombreux domaines en imagerie, tels que l'imagerie médicale, astronomique ou la microscopie, où il peut être crucial de sur-passer la limite physique de résolution des instruments de mesure.

Nous formalisons ce problème pour des signaux parcimonieux: on cherche à reconstruire une mesure discrète  $\mu_0 = \sum_{k=1}^r a_i \delta_{x_i}$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i \in \mathbb{T}^d$ , où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est le tore) à partir des observations

$$y = \Phi \mu_0 + \sigma w \in \mathbb{C}^n,$$

$w$  étant un bruit aléatoire, et  $\Phi$  un opérateur de convolution donné. En pratique, il est souvent possible de se ramener au cas de la convolution sur le tore par prolongement par zéro au bord (conditions de Dirichlet) ou par symétrisation du signal (conditions de Neumann). Nous considérons uniquement ici le

cas où  $\Phi$  est un passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$ , *i.e.* :

$$\Phi \mu = \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) d\mu(x), \text{ où } \varphi(x) = \left[ c_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle} \right]_{k \in \llbracket -f_c, f_c \rrbracket^d}.$$

Dans toute l'étude, quitte à renormaliser les observations, on supposera sans perte de généralité que l'on travaille avec un passe-bas idéal, *i.e.*  $c_k = 1$  pour tout  $k$ .

### 1.2 Beurling LASSO

Bien que ce problème inverse soit mal posé, il est possible de retrouver des solutions parcimonieuses en résolvant le programme suivant, appelé BLASSO [3] :

$$\mu_\lambda \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)} \frac{1}{2\lambda} \|y - \Phi \mu\|^2 + |\mu|(X), \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

où la norme variation totale, définie par

$$|\mu|(\mathbb{T}) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{T}} \eta d\mu ; \eta \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\eta\|_\infty \leq 1 \right\},$$

étend naturellement la norme  $\ell^1$  à l'espace des mesures. Ce modèle sans grille – l'optimisation se fait sur un espace continu – facilite l'analyse mathématique du problème et conduit à des critères de stabilité très fins pour la reconstruction. Cependant, sa dimension infinie représente un défi délicat. En pratique, la reconstruction s'opère via la mise en évidence d'un certificat dual, qui consiste ici –  $\Phi$  étant un filtre passe-bas idéal – en un polynôme trigonométrique  $\Phi^* p_\lambda$  où  $p_\lambda$  est solution du programme

$$p_\lambda = \min_{p \in \mathbb{C}^{n,d}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{y}{\lambda} - p \right\|^2 ; \|\Phi^* p\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (\mathcal{D}_\lambda)$$

Les relations d'optimalité primal-dual certifiant que le support de  $\mu_\lambda$  est inclus dans l'ensemble  $\{x ; |\Phi^* p_\lambda(x)| = 1\}$  (voir Figure 1), celui-là peut donc être déterminé via des méthodes de root-finding [2]. Les amplitudes se déduisent ensuite de la relation  $\Phi \mu_\lambda = y - \lambda p_\lambda$ , voir Algorithme 2.

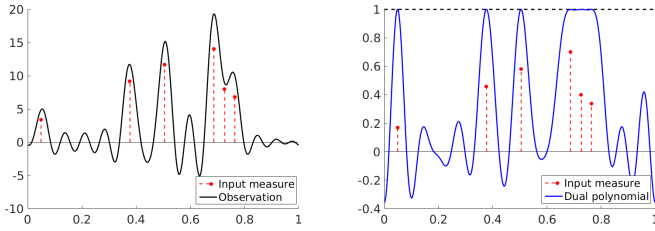


Figure 1 – Observations (gauche) et polynôme dual  $\eta_\lambda = \Phi^* p_\lambda$  (droite) obtenus pour 5 Diracs ( $\sigma = .002$ ,  $f_c = 13$ ).

Dans la suite, bien que nos résultats soient pour l'instant tous en dimension 1, le cas  $d = 2$  étant en cours d'implémentation, nous présentons les problèmes en dimension quelconque.

## 2 Relaxations SDP de faible rang

Afin de résoudre  $(\mathcal{P}_\lambda)$ , il est intéressant de considérer sa relaxation SDP. Les hiérarchies SDP ont été introduites par Lasserre [7] pour des mesures réelles, et reposent d'un côté sur une paramétrisation des mesures en termes de matrices de moments, remédiant ainsi à la dimension infinie de  $(\mathcal{P}_\lambda)$ , de l'autre sur les représentations de polynômes positifs en polynômes sommes de carrés, simplifiant ainsi la contrainte  $L^\infty$  de  $(\mathcal{D}_\lambda)$ . Bien que seule la convergence faible des solutions de ces hiérarchies vers les solutions exactes ait été prouvée, l'intérêt de ces méthodes provient du fait qu'une convergence finie est souvent observée en pratique; autrement dit, il existe dans la majorité des cas un ordre de relaxation pour lequel la solution du problème relâché est la même que celle du problème initial.

### 2.1 Relaxation SDP

Le versant trigonométrique des travaux de Lasserre a été décrit par Dumitrescu [5]. Les problèmes que nous introduisons maintenant ont été calculés à partir des résultats de ce dernier.

La relaxation SDP de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  à l'ordre  $(m - n + 1)$  s'écrit :

$$\mathcal{R}_\lambda \in \operatorname{argmin}_{u,z,\tau} h(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} u_0 + \tau + \frac{1}{2} \left\| \frac{y}{\lambda} + 2z \right\|^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} (a) & \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & z \\ z^* & \tau \end{bmatrix} \succeq 0, \\ (b) & R = \sum_{|\mathbf{k}| < m} u_{\mathbf{k}} \Theta_{\mathbf{k}}, \\ & \Theta_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}^{m^d \times m^d} \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\lambda^{(m)})$$

avec  $n = 2f_c + 1$ ,  $m \geq n$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ , et  $\Theta_{\mathbf{k}} = \Theta_{k_d} \otimes \dots \otimes \Theta_{k_1}$ .  $\Theta_{k_j}$  est la matrice Toeplitz composée de uns sur sa  $k_j$ -ème diagonale, et de zéros partout ailleurs, et  $\otimes$  est le produit de Kronecker. Cette formulation résulte du Lemme Borné Réel [5]. Les coefficients du polynôme dual se déduisent ensuite de  $R_\lambda$  à travers la relation d'optimalité  $p_\lambda = \frac{y}{\lambda} + 2z_\lambda$ .

En dimension 1 ( $d = 1$ ), cette relaxation est exacte pour  $m = n$ , ce qui signifie que  $(\mathcal{P}_\lambda)$  et  $(\mathcal{P}_\lambda^{(n)})$  ont les mêmes solutions – conséquence du théorème de Caratheodory-Toeplitz [8], ou du théorème de Fejér-Riesz [5]. En dimension quelconque, ce résultat ne tient plus, mais des résultats numériques semblent indiquer que des ordres faibles de relaxation sont suffisants. En particulier, pour  $d = 2$ , il semble que la hiérarchie converge effectivement [4, Section 4], mais sans a priori sur l'ordre  $m$  auquel cette convergence est observée cependant.

Bien qu'il soit désormais de dimension finie, la taille du programme ci-dessus est de l'ordre de  $m^{2d}$ , où  $m \geq 2f_c + 1$ , limitant considérablement les méthodes de points intérieurs lorsque  $d > 1$ , ou même en dimension 1 pour des grandes valeurs de  $f_c$ . Nous proposons d'exploiter une propriété de faible rang pour remédier à ce problème.

### 2.2 Structure de faible rang

Le détail de la preuve de [8, Proposition 2.1] révèle que pour  $d = 1$ ,  $(\mathcal{P}_\lambda^{(n)})$  admet une solution dont le rang est borné par le nombre de Diracs dans la mesure solution. De plus, ce résultat semble tenir en dimension quelconque [9]. Nos simulations numériques corroborent cette structure de faible rang, Fig. 2.

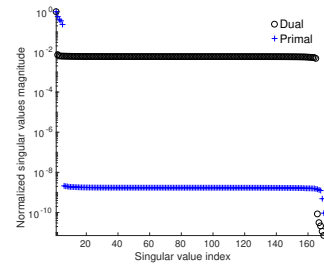


Figure 2 – ( $d = 2$ ,  $f_c = 5$  et  $r = 4$  Diracs). Valeurs singulières des solutions primale (bleu) et duale (noir).

Le domaine d'optimisation peut ainsi se restreindre aux matrices de rang au plus  $r$ , réduisant considérablement la complexité spatiale du problème. Cependant, l'intersection entre la variété des matrices de rang fixe et l'espace affine défini par la

contrainte (b) est trop complexe dès lors que  $r > 1$  ou  $n > 2$ , et par conséquent les méthodes d'optimisation non convexes sur cet espace semblent difficiles à mettre en œuvre. C'est pourquoi nous proposons de lisser la géométrie du problème en pénalisant la contrainte affine (b).

### 3 Pénalisation Toeplitz

Pour remédier à la difficulté induite par la contrainte affine dans  $(\mathcal{P}_\lambda^{(m)})$ , nous en proposons une version pénalisée – pouvant également se comprendre comme une perturbation de la norme atomique utilisée dans [8]. On introduit le programme:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\lambda,\rho} \in \underset{u,z,\tau}{\operatorname{argmin}} \quad & h(\mathcal{R}) + \frac{1}{2\rho} \|R - \sum_{|k|<m} u_k \Theta_k\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & z \\ z^* & \tau \end{bmatrix} \succeq 0, \\ R, \Theta_k \in \mathbb{C}^{m^d \times m^d} \end{cases} \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_{\lambda,\rho}^{(m)})$$

Le polynôme dual associé à  $(\mathcal{P}_{\lambda,\rho}^{(m)})$  diffère évidemment de  $\eta_\lambda$ , en particulier en ce qui concerne leurs racines, compromettant ainsi la reconstruction, voir Figure 3. Cependant, sous une faible hypothèse de non-dégénérescence, on peut montrer que lorsque  $\rho$  n'est pas trop grand,  $R_{\lambda,\rho}$  est suffisamment proche de  $R_\lambda$  pour permettre la reconstruction exacte du support (en particulier, leurs rangs sont égaux). Nos observations numériques confirment l'existence de ce régime, Fig 3.

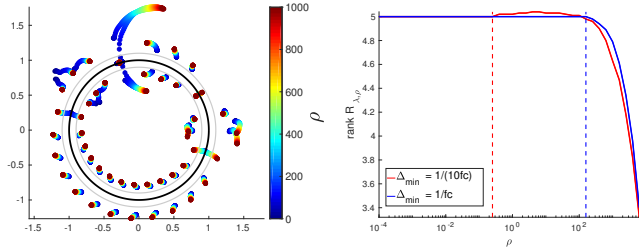


Figure 3 – *Gauche* : trajectoire des racines duales. Pour  $\rho = 0$ , le support se déduit des racines doubles de module 1. Pour  $\rho > 0$ , celles-ci peuvent se scinder, mais restent identifiables pour  $\rho$  petit. *Droite* : rang de  $R_{\lambda,\rho}$ , moyenné sur 50 tests.

### 4 Algorithme

Dans cette section, nous tirons parti de la propriété de faible rang des solutions, combinée à la structure convolutive de la contrainte Toeplitz, pour élaborer un schéma numérique de résolution de  $(\mathcal{P}_{\lambda,\rho}^{(m)})$  robuste et efficace. On pose

$$f(\mathcal{R}) = u_0 + \tau + \frac{1}{2} \left\| \frac{y}{\lambda} + 2z \right\|^2 + \frac{1}{2\rho} \|R - \sum_{|k|<m} u_k \Theta_k\|^2.$$

où les  $u_k$  s'expriment en fonction des coefficients de  $\mathcal{R}$ .

### 4.1 Super-résolution

Notre méthode s'inspire de l'algorithme de Frank-Wolfe pour minimiser  $f$  sur le cône des matrices SDP. Afin de rester sur un compact, nous fixons une borne  $D_0$  sur la trace des itérées, telle que  $\operatorname{tr} \mathcal{R}_{\lambda,\rho} \leq D_0$ . En pratique,  $D_0 = f(0)$  convient.

Pour exploiter la structure de faible rang, les variables sont stockées sous la forme  $\mathcal{R} = ss^H$ . Les étapes Frank-Wolfe sont complétées par une étape non convexe similaire à [1], qui consiste en une descente de gradient sur  $F : s \mapsto f(ss^H)$ . En pratique, nous utilisons une étape de BFGS. L'algorithme est décrit ci-dessous.

#### Algorithm 1 Construction du polynôme dual

---

```

set:  $s_0 = [0 \dots 0]^T$ ,  $D_0$  t.q.  $\operatorname{tr}(s^*) \leq D_0$ 
while bound on duality gap  $\geq \varepsilon$  do
  1. Calculer:  $v_r = D_0 \arg \min_{\|v\| \leq 1} v^T \cdot \nabla f(s_r s_r^H) \cdot v$ 
  2. Mettre à jour:  $\hat{s}_{r+1} = [\alpha_r s_r, \beta_r v_r]$ ,
      $\alpha_r, \beta_r = \arg \min_{\alpha+\beta \leq 1} f(\alpha s_r s_r^H + \beta v_r v_r^H)$ 
  3. Étape non convexe:
      $s_{r+1} = \mathbf{bfgs}\{F(s) : s \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (r+1)}, \text{init. à } \hat{s}_{r+1}\}$ 
end while
return  $p_\lambda = \frac{y}{\lambda} + 2z$ , où  $\begin{bmatrix} z \\ \tau \end{bmatrix}$  dernière col. de  $s_{N+1} s_{N+1}^H$ 

```

---

Les positions et amplitudes des Diracs composant la mesure peuvent ensuite être retrouvées à partir des coefficients  $p_\lambda$ , voir Algorithme 2. Afin d'identifier les racines de  $\eta_{\lambda,\rho}$  associées au support de la solution  $\mu_\lambda$ , nous fixons une tolérance  $\varepsilon$  autour du cercle unité dans laquelle celles-ci sont supposées être situées, pour des valeurs de  $\rho$  suffisamment faibles, voir Fig. 3.

#### Algorithm 2 Reconstruction par root-finding

---

```

input:  $p_\lambda$  coefficients du polynôme dual
set  $\varepsilon > 0$ ,  $R = \mathbf{roots}(p_\lambda)$ 
-  $R1 \leftarrow \{r \in R ; 0 < 1 - |r| < \varepsilon\}$ 
- positions:  $x \leftarrow \frac{1}{2\pi} \arg(R1)$ 
- amplitudes:  $a \leftarrow (\Phi_x^* \Phi_x)^{-1} \Phi_x^*(y - \lambda p_\lambda)$ 
  where  $\Phi_x = \Phi|_x$ 
return  $x, a$ 

```

---

### 4.2 Implémentation via Fast Fourier Transforms

L'étape 1. dans Algorithme 1 revient simplement à calculer un vecteur propre de  $\nabla f(s_r s_r^H)$  associé à sa plus faible valeur propre. Pour cela, on utilise la méthode des puissances itérées, fondée exclusivement sur des produits matrice-vecteur. Étant donnée la structure particulière de notre problème, les seules opérations coûteuses consisteront à

- (i) calculer le projeté de  $s_r s_r^H$  sur l'espace des tenseurs Toeplitz,
- (ii) calculer le produit de ce dernier avec un vecteur.

Ces deux opérations peuvent être réalisées efficacement : en

effet, le projecteur en (i) admet une factorisation n’impliquant que des opérateurs de padding et des FFT ; d’autre part, le produit d’une matrice Toeplitz avec un vecteur s’implémente à partir des mêmes opérateurs, s’agissant simplement d’une convolution avec prolongement par zéro au bord.

## 5 Applications numériques

Pour l’étape de BFGS, la précision est fixée à  $10^{-8}$ , avec un nombre limite d’itérations limite de  $8 \cdot 10^4$ .

L’étape de root-finding en dimension 1 est réalisée à l’aide de la fonction *roots* de matlab, d’une complexité de l’ordre de  $O(f_c^3)$ . En dimension supérieure, l’extraction des Diracs peut se faire plus simplement directement à partir de la matrice des moments  $R$ ; ces méthodes sont implémentées dans l’outil GloptiPoly [6].

La qualité de la reconstruction dépend de la fiabilité de la détection des racines réellement associées à un Dirac parmi toutes les racines de  $\eta_{\lambda,\rho}$ . Dans nos simulations, l’intervalle autour du cercle unité dans lequel nous cherchons ces racines est réglé manuellement. Il sera important dans des travaux ultérieurs de rechercher un véritable critère pour séparer la  $r$ -ème racine et la  $(r + 1)$ -ème, pour une mesure avec  $r$  Diracs.

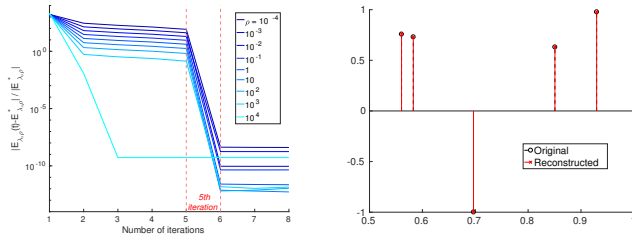


Figure 4 – ( $r = 5$ ,  $f_c = 13$ ,  $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ ). *Gauche*: Erreur relative sur l’énergie en fonction des itérations FW, pour différents  $\rho$ . *Droite*: Résultats de reconstruction pour  $\rho = 1$ .

Une propriété importante de l’algorithme 1 est qu’il converge en un nombre fini d’itérations, et plus spécifiquement en autant d’itérations que de Diracs dans la mesure initiale dans la majorité des cas, Fig 4. Néanmoins, la complexité effective de l’étape de BFGS augmente significativement lorsque  $\rho$  tend vers 0, Fig. 5.

## 6 Conclusion

L’algorithme proposé, en se généralisant en dimension quelconque, ouvre de nouvelles perspectives pour la super-résolution d’images ( $d = 2$ ). Grâce à sa faible complexité, il s’adapte facilement à la grande dimension du problème, et pourrait offrir une bonne alternative à MUSIC ou aux méthodes de Prony.

**Remerciements** Ce projet est soutenu par une allocation de recherche Région Ile-de-France.

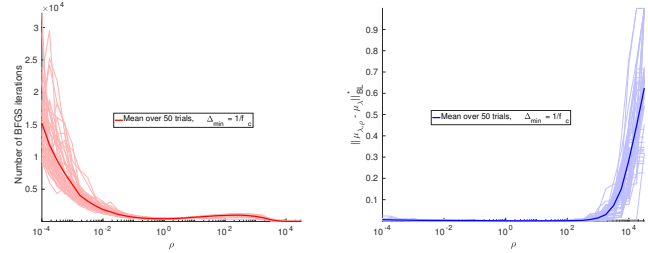


Figure 5 – ( $r = 5$ ,  $f_c = 13$ ). *Gauche*: nombre d’itérations BFGS, sommées sur l’ensemble des itérations Frank-Wolfe. *Droite*: erreur entre  $\mu_{\lambda,\rho}$  and  $\mu_\lambda$  ( $\mu_\lambda$  est calculée en résolvant le primal semidéfini avec CVX). L’erreur est mesurée avec la flat-norm. Les tests ont été réalisés pour des Diracs positifs. Il sera intéressant de pouvoir déterminer automatiquement la zone idéale de relaxation.

## References

- [1] N. BOYD, G. SCHIEBINGER et B. RECHT : The alternating descent conditional gradient method for sparse inverse problems. *In CAMSAP*, pages 57–60, 2015.
- [2] E.J. CANDÈS et C. FERNANDEZ-GRANDA : Towards a mathematical theory of super-resolution. *Communications on pure and applied Mathematics*, 67(6):906–956, 2014.
- [3] Y. de CASTRO et F. GAMBOA : Exact reconstruction using Beurling minimal extrapolation. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 395(1):336–354, 2012.
- [4] Y. de CASTRO, F. GAMBOA, D. HENRION et J.B. LASSERRE : Exact solutions to super resolution on semi-algebraic domains in higher dimensions. *IEEE Trans. Information Theory*, 63(1):621–630, 2017.
- [5] B. A. DUMITRESCU : *Positive trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications*. Signals and Communication Technology. Springer International Publishing, 2017.
- [6] D. HENRION et J.B. LASSERRE : *Detecting Global Optimality and Extracting Solutions in GloptiPoly*, pages 293–310. 2005.
- [7] J. B. LASSERRE : Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, 11(3):796–817, 2001.
- [8] G. TANG, B. N. BHASKAR, P. SHAH et B. RECHT : Compressed sensing off the grid. *IEEE Trans. Information Theory*, 59(11):7465–7490, 2013.
- [9] Z. YANG, L. XIE et P. STOICA : Vandermonde decomposition of multilevel toeplitz matrices with applications to multidimensional super-resolution. *IEEE Trans. Information Theory*, 62(6):3685–3701, 2016.