

Séparation et reconstruction simultanées en tomographie spectrale via un algorithme proximal à métrique variable

Souhil TAIRI¹, Sandrine ANTHOINE², Christian MOREL¹, Yannick BOURSIER¹

¹CPPM

Aix Marseille Univ, CNRS, CPPM, Marseille, France

²Institut de Mathématiques de Marseille

Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France

tairi@cprm.in2p3.fr, sandrine.anthoine@univ-amu.fr,

morel@cprm.in2p3.fr, boursier@cprm.in2p3.fr

Résumé – Dans ce papier, nous proposons une méthode de séparation et reconstruction simultanées des composantes d'intérêt d'un objet dans le contexte de la tomodensitométrie spectrale. Notre modèle prend en compte la physique d'acquisition polychromatique ainsi que des a-priori parcimonieux sur les composantes de l'objet à reconstruire. La séparation et reconstruction simultanées des composantes est faite en résolvant un problème inverse mal posé, non convexe avec un algorithme proximal à métrique variable. Des résultats prometteurs sont montrés sur des données synthétiques avec une régularisation qui prend en compte la positivité des quantités d'intérêts.

Abstract – In this paper, we propose a method to simultaneously separate and reconstruct the physical components of an object observed in the context of spectral Computed Tomography. Our contribution considers the underlying polychromatic model of the X-ray beam and combines it with a sparsity prior on the components of the object to reconstruct. The simultaneous separation and reconstruction of components is done by solving a non-convex ill-posed inverse problem with a variable metric proximal algorithm. Promising results are shown on synthetic data with a simple regularization that encompasses the positivity of the quantities of interest.

1 Introduction

L'avènement des détecteurs à pixels hybrides fonctionnant en mode comptage de photons a permis de développer une technologie d'imagerie tomographique à rayons X particulière : la tomodensitométrie spectrale. Celle-ci permet d'acquérir de l'information spectrale dans les mesures grâce aux seuils en énergie incorporés dans les détecteurs. Cette technologie offre donc la possibilité nouvelle d'utiliser la tomographie en transmission pour identifier, localiser et quantifier plusieurs marqueurs biologiques.

Le problème de reconstruction en tomodensitométrie (TDM) spectrale consiste à simultanément reconstruire et séparer les cartes de coefficients d'atténuation spatiales et spectrales des différents composants d'intérêt de l'objet imagé. La méthode du *K-edge* [1], qui utilise une approximation grossière du problème direct, a prouvé la pertinence de cette technologie. Des méthodes séquentielles [2, 3], procédant à une séparation des sources spectrales dans l'espace des mesures puis à une reconstruction spatiale de chacune des cartes ont ensuite été implémentées. Une méthode de reconstruction bayésienne basée sur un modèle non linéaire polychromatique a montré de bons résultats en se limitant à la séparation de deux composantes (typiquement eau/os) dans le cas de la double énergie [4]. Ici nous proposons d'attaquer le problème dans sa globalité. Nous dé-

veloppons un modèle mathématique complet des acquisitions et des modèles d'a-priori parcimonieux sur les cartes spatiales à reconstruire qui prennent en compte leurs spécificités physiques. Ceci mène à poser un problème inverse de minimisation non-convexe et non-différentiable. Par rapport à la méthode développée dans [5], nous mettons en oeuvre une méthode proximale à métrique variable pour le résoudre, dont les spécificités sont la rapidité de convergence et le bas coût computationnel. Nous présentons des premiers résultats sur des données synthétiques.

2 Tomographie spectrale : modèle direct

2.1 Modèle d'acquisition

Une acquisition tomodensitométrique est l'ensemble des mesures obtenues par transmission lorsque qu'une source à rayons X dont le spectre peut être modulé par un filtre métallique tourne autour de l'objet observé. La mesure p est quantifiée par la loi de Beer-Lambert :

$$y^p = \int_{\mathbb{R}^+} I_0(E) Fi(E) De(E) e^{-\int_{\mathcal{L}^p} \mu(l,E) dl} dE \quad (1)$$

où

- \mathcal{L}^p est la ligne de visée, qui définit la position du couple source-détecteur par rapport à l'objet,
- $\mu(l, E)$ est le coefficient d'atténuation linéique de l'objet à l'abscisse l sur la ligne de visée \mathcal{L}^p et à l'énergie E ,
- $I_0(E)$ est l'intensité du spectre d'énergie de la source à rayons X,
- $Fi(E)$ est le coefficient d'atténuation du filtre métallique,
- $De(E)$ est l'efficacité du pixel p du détecteur.

Le problème de reconstruction en TDM polychromatique est celui de l'estimation du coefficient d'atténuation $\mu: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, connaissant $I_0(E)$, $Fi(E)$, $De(E)$ et l'ensemble des mesures y^p obtenues en i) faisant tourner le couple source-détecteur autour de l'objet, ii) changeant les filtres et iii) modifiant l'efficacité du détecteur (par exemple en fixant un seuil en énergie).

Une vaste majorité de la littérature sur la reconstruction TDM traite du modèle monochromatique, dans lequel la source est considérée monochromatique ($I_0(E) = 0$ pour $E \neq E_0$). Dans ce cas, l'équation (1) se réduit à

$$y^p = I_0 Fi(E_0) De(E_0) e^{-\int_{\mathcal{L}^p} \mu(l, E_0) dl}. \quad (2)$$

Les mesures ne contiennent alors pas d'information spectrale; on reconstruit donc une carte spatiale à énergie fixée : $\mu(\cdot, E_0)$. Le problème inverse est alors mal-posé mais convexe.

Dans le cas polychromatique, on obtient de l'information spectrale sur le coefficient d'atténuation grâce à la diversité des mesures obtenue en utilisant le spectre de la source, les différents filtres Fi et les réglages des détecteurs De . Le prix à payer est la complexification du problème inverse qui est alors non-convexe. Plus précisément nous utilisons ici P configurations spatiales \mathcal{L}^p , M configurations spectrales $f^m(E) = I_0(E) Fi^m(E) De^m(E)$. Nous obtenons un ensemble de $M \times P$ mesures. La mesure d'indice (p, m) vérifie :

$$y^{p,m} = \int_{\mathbb{R}^+} f^m(E) e^{-\int_{\mathcal{L}^p} \mu(l, E) dl} dE \quad (3)$$

2.2 Modèle des cartes de concentration

On ne peut pas reconstruire le coefficient d'atténuation dans sa globalité spatio-énergétique avec un nombre fini de mesures. Nous exploitons le fait que les différents composés d'un objet, tel que les tissus mous, les os, etc, ont des signatures spectrales différentes. Nous le modélisons comme la somme de ses K composés μ^k . La signature spectrale étant physiquement indépendante de la localisation du composé, on affine le modèle :

$$\mu(l, E) = \sum_{k=1}^K \mu^k(l, E) = \sum_{k=1}^K a^k(l) \sigma^k(E), \quad (4)$$

où $a^k(l)$ est la concentration du composé k au point l , et $\sigma^k(E)$ sa section efficace d'interaction. Les mesures parfaites s'écrivent alors :

$$y^{p,m} = \int_{\mathbb{R}^+} f^m(E) e^{-\sum_{k=1}^K \sigma^k(E) \int_{\mathcal{L}^p} a^k(l) dl} dE. \quad (5)$$

2.3 Discrétisation

L'énergie E est discrétisée en N valeurs, et le volume $3D$ contenant l'objet en D voxels. $S[p, d]$ représente la contribution du voxel d dans l'intégrale sur la ligne \mathcal{L}^m . Les colonnes de F contiennent les profils spectraux f^m , celles de A les cartes de concentration a^k et les lignes de Σ les sections efficaces d'interaction, tous discrétisés. On obtient le modèle discret :

$$Y[p, m] = \sum_{n=1}^N F[n, m] e^{-\sum_{k=1}^K \sum_{d=1}^D S[p, d] A[d, k] \Sigma[k, n]} \\ Y = e^{-SA\Sigma} F, \quad (6)$$

où $Y \in \mathbb{R}^{P \times M}$, $F \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $S \in \mathbb{R}^{P \times D}$, $A \in \mathbb{R}^{D \times K}$, et $\Sigma \in \mathbb{R}^{K \times N}$.

3 Méthode

3.1 Problème inverse

On cherche à estimer la matrice A - dont la k -ième colonne A_k représente la carte spatiale de concentration du composé k - connaissant les paramètres du système S , F et Σ , ainsi que des versions bruitées des mesures parfaites établies à l'équation (6) que l'on notera encore Y . Pour ce faire nous minimisons une fonctionnelle du type :

$$J(A) = G(A) + R(A) \quad (7)$$

où

$$G(A) = \|Y - e^{-SA\Sigma} F\|_2^2. \quad (8)$$

est le terme d'attache aux données. $R(A)$ est un terme de régularisation composé d'un terme global qui contraint la positivité de toutes les concentrations ($A[d, k] \geq 0$ pour tout d et k) et d'un terme de régularisation pour chaque carte spatiale A_k :

$$R(A) = \chi_{\{\geq 0\}}(A) + \sum_{k=1}^K \lambda_k R_k(A_k) \quad (9)$$

où $\chi_{\{\geq 0\}}(A) = 0$ si $A[d, k] \geq 0$ pour tout d et k et $\chi_{\{\geq 0\}}(A) = +\infty$ sinon. Les régularisations spatiales $R_k(A_k)$ sont choisies en fonction des composés. On utilisera dans la section 4 une régularisation l_1 sur les pixels qui traduit la parcimonie spatiale de chaque carte de concentration : $R_k(A_k) = \lambda_k \|A_k\|_1$. Notons que la méthode et l'implémentation présentées permettent d'utiliser des régularisations comme la variation totale.

3.2 Estimation de cartes de concentration via un algorithme proximal à métrique variable

De manière générale, nous avons donc un terme de régularisation $R(A)$ qui est la somme de contraintes de boîtes et de régularisations non-différentiables mais convexes, ce terme est donc convexe non-différentiable. Le terme d'attache aux données $G(A)$ est quant à lui C^∞ mais non convexe. On peut toutefois montrer qu'il possède la propriété de Kurdyka-Lojasiewicz

[6, 7]. Nous avons donc affaire à un problème de minimisation non-convexe mais pour lequel les méthodes de descente proximales - initialement développées dans le cas convexe - ont récemment été étendues avec succès [8].

Dans l'optique d'appliquer cette méthodologie à des données tomographiques spectrales réelles et tridimensionnelles, il est essentiel que l'algorithme proposé converge rapidement. Or un simple schéma *implicite-explicite* (*forward-backward*) ou même accéléré (FISTA) se révèle lent à converger dans le contexte de la TDM monochromatique [9]. En TDM polychromatique [10], l'incorporation d'information d'ordre deux sur G permet d'accélérer les schémas de type *région de confiance* [11] de manière substantielle. Ceux-ci ne peuvent malheureusement pas incorporer de régularisations non différentiables. Nous proposons ici de recourir à des *schémas proximaux à métrique variable* [12, 13], qui permettent par l'incorporation d'une métrique bien choisie d'accélérer nettement la convergence de la descente proximale.

Étant donné le résultat à l'itération t , noté A^t , un algorithme *implicite-explicite à métrique variable* procède en trois étapes pour calculer A^{t+1} :

1. On choisit une métrique \mathcal{M}^t de $\mathbb{R}^{D \times K}$ dans $\mathbb{R}^{D \times K}$.
2. On calcule un pas de descente de gradient sur G préconditionné par \mathcal{M}^t :

$$B^t = A^t - \alpha^t (\mathcal{M}^t)^{-1} \nabla G(A^t) \quad (10)$$

3. On calcule un point proximal selon la métrique \mathcal{M}^t :

$$A^{t+1} = \text{prox}_{\alpha^t R}^{\mathcal{M}^t}(B^t) \quad (11)$$

$$A^{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{X}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \langle X - B^t, \mathcal{M}^t(X - B^t) \rangle + \alpha^t R(X)$$

Dans notre problème, le gradient de G est :

$$\nabla G(A) = 2S^T ([Y - e^{-SA\Sigma} F] F^T \odot e^{-SA\Sigma}) \Sigma^T, \quad (12)$$

où \odot est le produit de Hadamard. Son coût computationnel est dominé par les applications de S et S^T qui correspondent aux projections et rétroprojections tomographiques.

On cherche une métrique \mathcal{M}^t qui permette de calculer à moindre coût computationnel B^t et le point proximal A^{t+1} tout en assurant une bonne décroissance de J . Sur ce dernier point, choisir \mathcal{M}^t une métrique qui approximerait la hessienne de G , par exemple l'approximation de Gauss-Newton serait la plus efficace. Celle-ci s'écrit :

$$H^{gn}(A) = (\Sigma \otimes S^T) (D(A) (FF^T \otimes I_K) D(A)) (\Sigma^T \otimes S)$$

avec $D(A)$ la matrice diagonale de diagonale $e^{-SA\Sigma}$ et I_K l'identité de dimension K . Elle dépend de A et change à chaque itération, ce qui a un coût computationnel. Nous y préférons la majorante suivante :

$$\mathcal{M} = (\Sigma FF^T \Sigma^T \otimes S^T S).$$

Elle est constante et factorisée en produit de Kronecker donc son implémentation est rapide. Celle de son inverse l'est aussi. En effet, $\Sigma FF^T \Sigma^T$ est de petite taille ($K \times K$) et l'opérateur

$S^T S$ qui agit sur \mathbb{R}^D est un candidat naturel [14] dans le cadre monochromatique. Son inverse, appelé le filtre conique est facilement implémentable car diagonal dans l'espace de Fourier dans le cas d'un faisceau à géométrie parallèle (cf. section 4).

Notons que le calcul du point proximal de l'Eq. (11) n'est pas analytique ici, nous l'approximons par un schéma itératif accéléré (FISTA) et implémentons un algorithme *implicite-explicite à métrique variable* avec calcul inexact du point proximal : VMILAn [13].

4 Résultats

4.1 Protocole expérimental

Nous simulons numériquement un fantôme de contraste contenant un grand cylindre d'eau (c'est le premier composé), et six tubes remplis d'agent de contraste, trois d'yttrium (composé deux) à différentes concentrations, un d'iode (composé trois) et deux de l'argent (composé quatre). L'eau joue typiquement le rôle de tissus mous dans le dictionnaire. Les $K = 4$ cartes spatiales sont composées de $D = 128^2$ voxels.

Les mesures tomographiques polychromatiques sont simulées en utilisant 5 filtres spectraux f^m , qui sont des filtres passe-bande idéaux autour des discontinuités spécifiques aux agents de contrastes présents i.e.

$$\begin{aligned} f^1(E) &= \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[13,17]}(E), & f^2(E) &= \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[17,21]}(E), \\ f^3(E) &= \frac{1}{4.5} \mathbb{1}_{[21,25.5]}(E), & f^4(E) &= \frac{1}{7.7} \mathbb{1}_{[25.5,33.2]}(E), \\ f^5(E) &= \frac{1}{6.8} \mathbb{1}_{[33,2,40]}(E), \end{aligned}$$

avec E en keV et où $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a, b]$ et 0 sinon. Nous rappelons que dans le cas réel les détecteurs à pixels hybrides [1, 3] permettent de fixer un seuil en énergie ce qui rend réalisables les filtres f^m ci-dessus. Les efficacités des détecteurs sont identiques et constantes et le spectre de source est supposé constant sur la bande d'énergie [13, 40] keV. Pour chaque filtre, on acquiert une projection tomographique selon 180 angles et pour 128 pixels en géométrie parallèle (on a $M = 5$, $D = 128^2$ and $N = 43$). Les mesures sont corrompues avec un bruit additif blanc gaussien de même variance pour chaque filtre.

4.2 Résultats

L'expérience est faite avec un bruit d'écart-type 10^{-6} pour des mesures Y d'amplitude comprise entre $[.999, 1]$. Le SNR en sortie mesure la performance. Les résultats sont présentés sur la figure 1 après 200 itérations avec une initialisation identiquement nulle.

On observe que le schéma proximal à métrique variable avec la métrique \mathcal{M} (VMILAn) permet une convergence significativement plus rapide qu'un schéma FISTA (i.e accéléré mais sans métrique), ce qui est confirmé par les valeurs de SNR obtenues avec et sans bruit. Des résultats similaires ont été obtenus sur des problèmes plus simples (cas monochromatique) et confirment eux aussi l'utilité d'une métrique associée à l'opérateur de projection-réprojection $S^T S$.

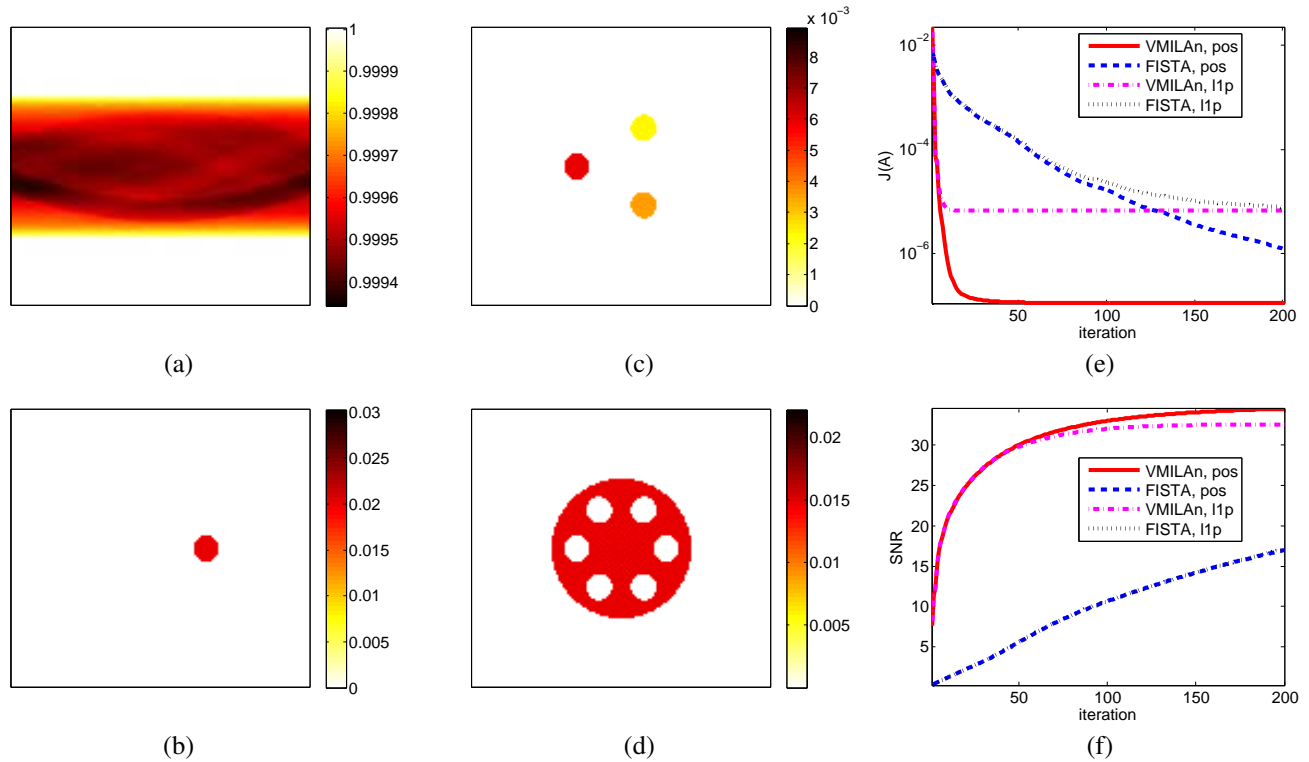


FIGURE 1 – (a) Données bruitées à $\sigma = 1e - 6$. Résultats : Iode (b), Yttrium (c), eau (d). (e) Valeur de la fonctionnelle J avec $R(A) = \chi_{\{\geq 0\}}(A)$ (noté “pos”) et $R(A) = \chi_{\{\geq 0\}}(A) + \sum_{k=1}^K \lambda_k \|A_k\|_1$ noté “l1p”, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, 2.5, 0.086, 1.5) \cdot 10^{-6.8}$. (f) SNR global sur les 4 composantes.

Références

- [1] F. Cassol et al. First K-Edge Imaging With a Micro-CT Based on the XPAD3 Hybrid Pixel Detector. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 60 :103 – 108, 2013.
- [2] J. P. Schlomka et al. Experimental feasibility of multi-energy photon-counting k-edge imaging in pre-clinical computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 53(15) :4031, 2008.
- [3] M. Dupont et al. Component Separation for Spectral X-Ray Imaging Using the XPAD3 Hybrid Pixel Camera. In *2013 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, October 2013. Poster.
- [4] C. Cai et al. A full-spectral bayesian reconstruction approach based on the material decomposition model applied in dual-energy computed tomography. *Medical physics*, 40(11), 2013.
- [5] R.F. Barber et al. An algorithm for constrained one-step inversion of spectral ct data. *Physics in Medicine and Biology*, 61(10) :3784, 2016.
- [6] S. Lojasiewicz. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. *Editions du centre National de la Recherche Scientifique*, pages 87–89, 1963.
- [7] K. Kurdyka. On gradients of functions definable in o-minimal structures. *Annales de l’institut Fourier*, 48(3) :769–783, 1998.
- [8] H. Attouch et al. Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems : proximal algorithms, forward–backward splitting, and regularized gauss–seidel methods. *Mathematical Prog.*, 137(1) :91–129, 2013.
- [9] S. Anthoine et al. Some proximal methods for CBCT and PET tomography. *Inverse Problems in Imaging*, 6(4), Nov. 2012.
- [10] S. Tairi et al. Simultaneous reconstruction and separation in a spectral ct framework. In *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, 2016.
- [11] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization, second edition*. World Scientific, 2006.
- [12] E. Chouzenoux et al. Variable metric forward–backward algorithm for minimizing the sum of a differentiable function and a convex function. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 162(1) :107–132, 2014.
- [13] S. Bonettini et al. On the convergence of a linesearch based proximal-gradient method for nonconvex optimization. *Inverse Problems*, 2017. Accepted.
- [14] Alessandro Perelli et al. Denoising message passing for x-ray computed tomography reconstruction. *CoRR*, abs/1609.04661, 2016.