

# Sur la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager Kaiser

Yves PRÉAUX et Abdel-Ouahab BOUDRAA

IRENav (EA3634), Ecole Navale/Arts-Métiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest Cedex 9, France

(yves.preaux,boudra)@ecole-navale.fr

**Résumé** – Dans ce travail nous nous intéressons au problème de la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser en dimension un. Cet opérateur et ses extensions ont prouvé leur efficacité pour la démodulation d'une large classe de signaux AM-FM, en particulier pour le traitement de la parole et des images. Cela étant, en tant qu'opérateur d'énergie une sortie négative de l'opérateur n'a pas de sens physique et par conséquent se pose le problème de son interprétation et de l'établissement de certaines propriétés mathématiques appropriées. Nous présentons dans ce papier les conditions suffisantes de positivité de l'opérateur, fondées sur une approche géométrique alternative de l'application de l'opérateur à des signaux AM-FM.

**Abstract** – In this work we address the problem of the positivity conditions of the Teager-Kaiser energy operator in one dimension. This operator and its extensions have been shown to be effective for AM and FM demodulation in various useful classes of signals particularly in speech and image signals. However, a negative output of the operator is essentially meaningless and thus prevents it from having some useful mathematical properties. We present sufficient conditions, based on geometrical approach, such that the output of the Teager-Kaiser energy operator for continuous-time signals be non-negative.

## 1 Introduction

L'opérateur, communément appelé de Teager-Kaiser, fondé sur l'analogie avec l'énergie totale d'un oscillateur harmonique, a été introduit par Teager [7],[8] et ses propriétés ont été explorées par Kaiser [5],[6] dans les cas discret et continu. La question du signe de cet opérateur se pose, d'une part pour son interprétation en terme d'énergie, d'autre part pour son utilisation, par exemple, pour la démodulation des signaux ou la mesure de similarité entre deux signaux [9]. Des conditions générales pour cette positivité ont été énoncées par Bovik et Maragos [1] et complétées dans le cas d'un signal modulé en amplitude et en phase (AM-FM) par Larkin [4]. Cette classe de signaux AM-FM permet de modéliser une large classe de phénomènes physiques et biologiques (mammifères marins,...) et les systèmes de transmission de l'information, les Radar et Sonar. Nous présentons ici des conditions suffisantes de positivité, fondées sur une approche géométrique alternative de l'application de l'opérateur à des signaux AM-FM.

## 2 Cas général - Théorème 1

Nous noterons  $\Psi_c$ , l'opérateur de Teager-Kaiser continu, défini par  $\Psi_c x(t) = (x'(t))^2 - x(t)x''(t)$  et nous l'appliquerons ici à un signal AM-FM, de la forme  $x(t) = e^{\rho(t)} \cos \phi(t)$  où  $a(t) = e^{\rho(t)}$  et  $\phi(t)$  sont, respectivement, l'amplitude et la phase instantanée du signal.

### Théorème 1 : Condition suffisante de positivité

$\Psi_c x(t) > 0$  pour toutes les valeurs de  $t$  telles que la condition  
**CSI** :  $\phi'^2 > \frac{1}{2}(\rho'' + \sqrt{\phi''^2 + \rho''^2})$  soit vérifiée.

**Preuve** : On a  $x' = e^\rho (\rho' \cos \phi - \phi' \sin \phi)$  et  $x'' = e^\rho (\rho'' \cos \phi + \rho'^2 \cos \phi - 2\rho' \phi' \sin \phi - \phi'' \sin \phi - \phi'^2 \cos \phi)$ , d'où, après simplification  
 $x'^2 - xx'' = e^{2\rho} [\phi'^2 + \phi'' \sin \phi \cos \phi - \rho'' \cos^2 \phi]$ .

On a ainsi  $\Psi_c x(t) = e^{2\rho} g(t)$  et le signe de  $\Psi_c$  est celui de la fonction

$$g(t) = \phi'^2 + \phi'' \sin \phi \cos \phi - \rho'' \cos^2 \phi. \quad (1)$$

Puisque  $\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$  et que  $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi)$ , si  $\rho''$  et  $\phi''$  ne sont pas tous deux simultanément nuls, on a

$$g(t) = \phi'^2 - \frac{\rho''}{2} + \frac{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}}{2} \left( \frac{\phi''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}} \sin 2\phi - \frac{\rho''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}} \cos 2\phi \right), \quad (2)$$

or, puisque  $\left( \frac{2\phi''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}} \right)^2 + \left( \frac{2\rho''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}} \right)^2 = 1$ , il existe un unique  $\psi \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $\cos \psi = \frac{\phi''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}}$

$$\text{et } \sin \psi = \frac{\rho''}{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}}.$$

La fonction  $g$  peut donc s'écrire

$$g(t) = \left( \phi'^2 - \frac{\rho''}{2} \right) + \frac{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}}{2} \sin(2\phi - \psi). \quad (3)$$

Cette quantité est positive si  $\left| \phi'^2 - \frac{\rho''}{2} \right| > \frac{\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2}}{2}$ ,  
et, puisque  $\sqrt{\phi''^2 + \rho''^2} > \rho''$ , cette dernière condition se  
ramène à  $\phi'^2 > \frac{1}{2}(\rho'' + \sqrt{\phi''^2 + \rho''^2})$ .

**Corolaire 1.1** Si  $\phi'' \neq 0$ , en posant  $\lambda = \frac{\rho''}{|\phi''|}$ ,  $\mu = \frac{\phi'^2}{|\phi''|}$ , la  
condition **CS1** est équivalente à la condition **CS2** :  $\mu > h(\lambda)$ ,  
avec  $h(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})$ .

Preuve : Il suffit de diviser les deux membres de **CS1** par  $|\phi''|$

Interprétation : La positivité de  $\Psi_c$  est ramenée à une relation  
entre les deux rapports  $\lambda = \frac{\rho''}{|\phi''|}$  et  $\mu = \frac{\phi'^2}{|\phi''|}$

La Condition **CS2** garantit la positivité de  $\Psi_c$  en dehors de  
la zone hachurée :

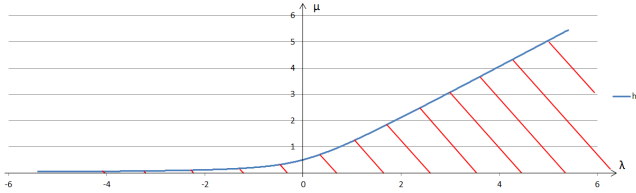


Figure 1: Condition CS2

Remarque : La condition **CS2** se simplifie selon l'ordre de  
grandeur de  $\lambda$ .

En effet  $h(\lambda) \sim \frac{1}{2}(1 + \lambda)$ ,  $\lambda$ , ou  $-\frac{1}{4\lambda}$  selon que, respec-  
tivement  $\lambda \sim 0$ ,  $\lambda \gg 1$  ou  $\lambda \ll -1$ .

Ainsi, par exemple, le cas  $\lambda \gg 1$  donne la condition suffisante  
de positivité :  $\phi'^2 > \rho'' \gg |\phi''|$ .

### 3 Cas quadratique

Nous allons donc considérer maintenant un signal que nous  
qualifierons de quadratique, c'est à dire dont la phase et le log-  
arithme de l'amplitude sont polynomiaux d'ordre 2 :

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 \quad \text{et} \quad \phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2, \quad \phi_2 \neq 0.$$

Remarquons qu'un tel type d'expression peut toujours être obtenu  
localement par un développement de  $\rho$  et  $\phi$ .

#### 3.1 Représentation géométrique alternative

**Théorème 2** : Lorsque le signal  $x$  est quadratique, l'inéquation  
 $\Psi_c x(t) > 0$  sur un domaine  $\mathcal{D}_t \subset \mathbb{R}$  est équivalente à l'inéquation  
 $(au + b) - k \sin(\Omega u + \Psi) > 0$  sur un domaine  $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^+$ , avec  
 $a, k$  et  $\Omega$  positifs.

Preuve : Dans le cas quadratique, l'expression 3 devient  $g(t) =$   
 $(\phi'^2 - \rho_2) + \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} \sin(2\phi - \psi)$ , où  $\psi = \psi(\rho_2, \phi_2) = \text{C}^{\text{te}}$ .  
On effectue le changement de paramètre non bijectif  $u = (t - d)^2$

avec  $d = -\phi_1 / 2\phi_2$ . Lorsque  $t$  prend ses valeurs sur l'intervalle  
 $I_t = [T_0; T_F] \subset \mathbb{R}$ , alors  $u$  prend ses valeurs sur l'intervalle  
 $I_u = [u_0; u_F] \subset \mathbb{R}^+$ , avec

- si  $d \notin I_t$  :  $u_0 = \inf \{ (T_0 - d)^2; (T_F - d)^2 \}$  et  
 $u_F = \sup \{ (T_0 - d)^2; (T_F - d)^2 \}$  ;
- si  $d \in I_t$  :  $u_0 = 0$  et  $u_F = \sup \{ (T_0 - d)^2; (T_F - d)^2 \}$ .

En remarquant que  $\phi = \phi_2 u + \phi_0 - d^2$  et  $\phi'^2 = 4\phi_2^2 u$ , on a  
 $g(u) = (4\phi_2^2 u - \rho_2) + \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} \sin(2\phi_2 u + 2\phi_0 - 2d^2 - \psi)$ .

En procédant à un déphasage afin de rendre positif le coefficient  
de  $u$  dans le sinus et à faire apparaître une différence, on obtient  
finalement :

$$g(u) = (au + b) - k \sin(\Omega u + \varphi) \quad (4)$$

avec

- $u = (t - d)^2 > 0$                       -  $\Omega = 2|\phi_2| > 0$
- $a = 4\phi_2^2 = \Omega^2 > 0$                     -  $b = -\rho_2$
- $k = \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} > 0$
- $\varphi = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) + (2\phi_0 - 2\phi_2 d^2) & \text{si } \phi_2 \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) - (2\phi_0 - 2\phi_2 d^2) & \text{si } \phi_2 < 0 \end{cases}$

Interprétation géométrique : Ce choix permet de faire ap-  
paraître la fonction  $g(u)$  comme la différence entre deux fonc-  
tions : une fonction affine  $l(u) = au + b$  et une fonction  
sinusoïdale  $s(u) = k \sin(\Omega u + \varphi)$ . Résoudre  $(au + b) -$   
 $k \sin(\Omega u + \Psi) > 0$  sur un domaine  $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^+$  revient alors,  
d'un point de vue géométrique, à déterminer les valeurs de  
 $u$  pour lesquelles la demi-droite (ou le segment) d'équation  
 $y = au + b$  est au-dessus de la sinusoïde  $y = k \sin(\Omega u + \Psi)$ .

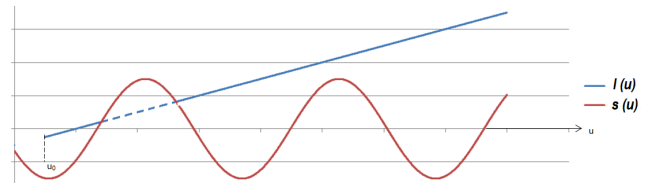


Figure 2: Représentation géométrique

#### 3.2 Intervalle critique

**Théorème 3** : Lorsque le signal  $x(t)$  est quadratique

(1)  $\Psi_c x(t) > 0$  en dehors d'un intervalle de temps

$$I_c = [d - \gamma, d + \gamma];$$

(2) si  $t \in I_c$ , il existe des valeurs de la phase initiale  $\phi_0$  pour  
lesquelles  $\Psi_c x(t) < 0$ ;

Preuve (1) :  $s(u)$  est une fonction prenant ses valeurs sur  
 $[-k; k]$ .  $g(u)$  sera donc positive lorsque  $l(u) > k$ .

Exprimée en fonction de  $t$ , cette condition s'écrit

$$4\phi_2^2(t - d)^2 - \rho_2 > \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2},$$

soit encore  $|t - d| > \frac{1}{2|\phi_2|} \sqrt{\rho_2 + \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2}}$ .

En notant  $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{|\phi_2|}}\sqrt{\lambda_q + \sqrt{1 + \lambda_q^2}}$ , et  $\lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$  on obtient la condition  $|t - d| > \gamma$ , ce qui revient à dire que  $t$  ne doit pas appartenir à l'intervalle  $[d - \gamma, d + \gamma]$ .

**Preuve (2) :** Compte tenu de l'expression de  $\varphi$  (cf. 4), lorsque la phase initiale  $\phi_0$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi$  décrit  $[-\pi; \pi]$  et, donc,  $s(t) = k \sin(\Omega t + \varphi)$  décrit l'intervalle  $[-k; k]$ . Par ailleurs, si  $I = I_t \cap [d - \gamma, d + \gamma] \neq \emptyset$ , pour  $T \in I$ , on a  $U = (t - d)^2$  et  $l(U) < k$ . Il existe alors, une valeur  $\phi_0$  pour laquelle  $s(U) > l(U)$  et, donc,  $g(U) < 0$ .

**Remarque :** Une telle valeur de  $\phi_0$  n'est pas unique. Si  $[T_0; T_F] \cap [d - \gamma, d + \gamma] \neq \emptyset$ , il y a un intervalle non vide de valeurs de  $\phi_0$  pour lesquelles  $\Psi_c x(t) < 0$ . Cet intervalle n'est réduit à un singleton que dans les cas limite où  $T_F = d - \gamma$  ou où  $T_0 = d + \gamma$ .

**Interprétation :** La partie de la demi-droite représentée ci-dessous en pointillés correspond à un intervalle de valeurs de  $t$ , que nous qualifions d'intervalle critique, pour lequel il existe des phases initiales du signal rendant  $\Psi_c$  négatif. En revanche, en dehors de cet intervalle, la positivité de  $\Psi$  est garantie.

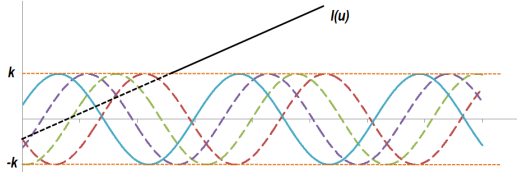


Figure 3: Intervalle critique

**Corollaire 3.1 :** Lorsque le signal  $x(t)$  est quadratique, il existe une valeur critique  $\tau$  à partir de laquelle  $\Psi_c x(t)$  est positif.

**Preuve :** si  $t > d + \gamma$ ,  $\Psi_c x(t) > 0$  donc, à partir de  $\tau = d + \gamma$ ,  $\Psi_c x(t) \geq 0$  et pour  $t > \tau$ ,  $\Psi_c x(t) > 0$ .

**Corollaire 3.2 :** Lorsque le signal  $x(t)$  est quadratique,  $\Psi_c x(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont de même signe et que la condition **CS3** :  $\mu_q > h(\lambda_q)$  est vérifiée, avec  $\mu_q = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2|}$ ,  $\lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$  et  $h(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})$ .

**Preuve :** si la valeur critique  $\tau$  est négative, compte tenu du corollaire 4, on aura  $\Psi_c x(t) > 0$  sur  $]\tau; +\infty[$  avec  $\mathbb{R}^+ \subset ]\tau; +\infty[$ , or  $\tau < 0$ , puisque  $\gamma$  est toujours positif, équivaut aux deux conditions simultanées  $d < 0$  et  $d^2 > \gamma^2$ .

D'une part  $d$  est négatif si, et seulement si,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont de même signe, d'autre part l'inégalité  $d^2 < \gamma^2$  équivaut à

$$\frac{\phi_1^2}{4\phi_2^2} > \frac{1}{4|\phi_2|} \left( \lambda_q + \sqrt{1 + \lambda_q^2} \right), \text{ avec } \lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}. \text{ Il suffit}$$

alors de noter  $\mu_q = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2^2|}$  pour obtenir le résultat escompté.

### Corollaire 3.3 : positivité en zéro

Lorsque le signal  $x(t)$  est quadratique, si la condition **CS3** est vérifiée, alors  $\Psi_c x(0) > 0$ .

**Preuve :** On doit avoir  $0 \notin I_c$ , ce qui est le cas, soit si  $d + \gamma < 0$ , cas qui a été traité plus haut et qui est vérifié si  $d < 0$  et que la condition **CS3** est réalisée, soit si  $d - \gamma > 0$ , qui nécessite de manière analogue la réalisation simultanée de  $d > 0$  et de la condition **CS3**, d'où l'énoncé du corollaire.

### 3.3 Modèle quadratique local

Soit  $x(t) = e^\rho \cos \phi$  un signal AM-FM quelconque, en approchant, autour d'une valeur  $t_0$ ,  $\rho$  et  $\phi$  par leur développement limité d'ordre 2, on a

$$\begin{aligned} \phi(t) &\simeq \phi(t_0) + (t - t_0)\phi'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\phi''(t_0), \\ \rho(t) &\simeq \rho(t_0) + (t - t_0)\rho'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\rho''(t_0). \end{aligned}$$

En notant  $\phi_0 = \phi(t_0)$ ,  $\phi_1 = \phi'(t_0)$ ,  $\phi_2 = \frac{1}{2}\phi''(t_0)$ ,  $\rho_0 = \rho(t_0)$ ,  $\rho_1 = \rho'(t_0)$  et  $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho''(t_0)$ , on a alors  $x(t) \simeq x_q(t - t_0)$  avec  $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2$ ,  $\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2$  et  $x_q(t) = e^\rho \cos \phi$ , la positivité de  $\Psi_c x$  en  $t_0$  se ramène à celle de  $\Psi_c x_q$  en zéro. Cette dernière est vérifiée dès lors que zéro n'appartient pas à l'intervalle  $I_c = [d - \gamma, d + \gamma]$ , ce qui, en utilisant le corollaire 3.2, revient à la condition **CS3**.

Compte tenu des expressions des  $\rho_i$  et des  $\phi_i$ , on constate que  $\mu_q = \mu(t_0)$  et  $\lambda_q = \lambda(t_0)$ . On retrouve alors la condition de positivité **CS2** énoncée dans le cas général AM-FM.

## 4 Application : chirp linéaire

Un signal  $x(t) = a(t) \cos \phi(t)$  est appelé chirp [2] s'il vérifie les conditions

$$(C1) : \left| \dot{a}(t) / a(t)\dot{\phi}(t) \right| \ll 1 \text{ et } (C2) : \left| \ddot{\phi}(t) / \dot{\phi}^2(t) \right| \ll 1.$$

En notant l'amplitude  $a(t) = e^{\rho(t)}$  ces conditions deviennent

$$(C11) : \left| \dot{\rho}(t) / \dot{\phi}(t) \right| \ll 1 \text{ et } (C21) : \left| \ddot{\phi}(t) / \dot{\phi}^2(t) \right| \ll 1.$$

Nous qualifierons ce chirp de linéaire si les variations de  $\rho$  et  $\phi$  sont linéaires, c'est à dire si  $x(t)$  est, de plus, quadratique.

**Proposition :** L'opérateur  $\Psi_c$  est positif pour une signal chirp, linéaire sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Preuve :** Pour un signal quadratique, en posant  $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$ ,

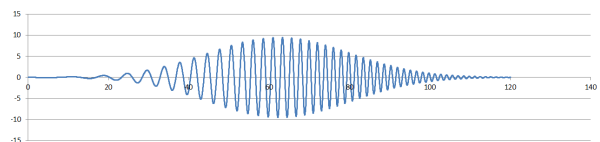


Figure 4: Chirp  $x(t)$

$m = -\frac{\rho_1}{2\rho_2}$  et  $\lambda = \frac{\phi_2}{|\rho_2|}$ , ces conditions s'écrivent

$$(C12) : \left| \lambda \frac{t-m}{t-d} \right| \ll 1 \text{ et } (C22) : \left| \frac{1}{2\phi_2(t-d)^2} \right| \ll 1$$

La condition (C22) ne peut pas être vérifiée sur  $\mathbb{R}$  puisque le premier membre tend vers l'infini lorsque  $t$  est proche de  $d$ . Plaçons nous, donc, dans  $\mathbb{R}^+$  :

On doit avoir  $d < 0$  pour que (C22) soit vérifiée sur  $\mathbb{R}^+$ , donc

$$\phi_1 \text{ et } \rho_1 \text{ doivent être de même signe. (R1).}$$

Par ailleurs, lorsque  $t$  tend vers l'infini, la condition (C1) impose  $|\lambda_s| \ll 1$  et lorsque  $t$  est proche de zéro, la condition (C22) impose  $\mu \gg 1$  On a donc

$$\mu \gg h(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) \quad (R2).$$

Compte tenu de (R1) et (R2), les conditions du corollaire 3.3 sont vérifiées et  $\Psi_c$  est donc positif.

Les graphiques 4 et 5 présentent un chirp linéaire  $x(t)$  sur  $\mathbb{R}^+$  ainsi que l'opérateur  $\Psi_c$  correspondant. Pour une bonne visibilité du signe de  $\Psi_c$ , nous avons affiché  $\ln \left( \frac{10 \Psi_c x(t)}{\sup(\Psi_c x(t))} \right)$ .

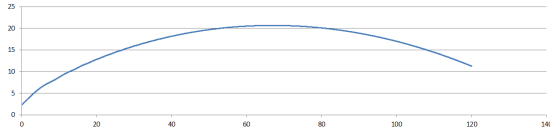


Figure 5: Teager Kaiser appliqué à  $x(t)$

## 5 Discussion et conclusion

Nous avons obtenu, dans le cas d'un signal AM-FM quadratique, une condition suffisante de positivité pour l'opérateur  $\Psi_c$ . Cette condition s'avère de plus nécessaire pour que la positivité soit indépendante de la phase initiale. Le graphique 6 présente l'enveloppe des valeurs prises par  $\Psi_c x(t)$ , lorsque la phase initiale varie, pour un signal  $x(t)$  quadratique vérifiant les critères du corollaire 3.2. L'opérateur reste positif sur  $\mathbb{R}^+$ . En revanche, dans le graphique 7, ces critères ne sont pas vérifiés. On constate qu'il existe des phases initiales pour lesquelles  $\Psi_c x(t)$  est négatif dans l'intervalle critique centré autour du paramètre  $d$  (ici  $d = 5$ ).

Nous avons établi par ailleurs, dans le cas général d'un signal AM-FM  $x(t)$ , une condition suffisante de positivité de  $\Psi_c x$  se traduisant par le corollaire 1.1. Cette condition est équivalente, localement, à celle de positivité en zéro (corollaire 3.3) du signal quadratique  $x_q$  obtenu par développement limité de  $x$ . Relativement aux résultats reportés dans [1], l'approche géométrique proposée permet de mieux évaluer a priori avec précision l'intervalle de temps où la positivité de l'opérateur est garantie. L'étude locale permet de mieux appréhender les conditions de positivité et

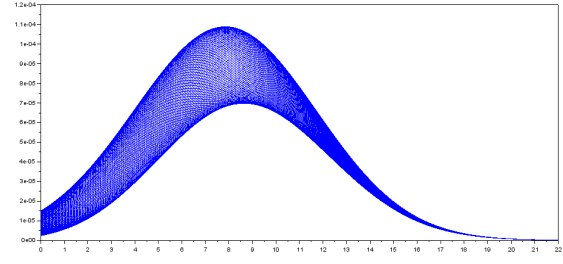


Figure 6: Corollaire 3.2 vérifié

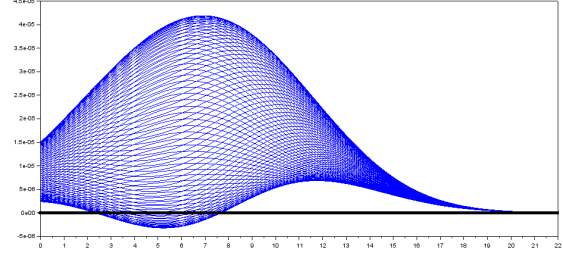


Figure 7: Corollaire 3.2 non vérifié

fera l'objet de développements ultérieurs ainsi que la transposition discrète de ces conditions pour un signal échantillonné.

## References

- [1] A.C. Bovik and P. Maragos, "Conditions for Positivity of an Energy Operator," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 42, pp. 469-471, 1994.
- [2] E. Chassande-Mottin and P. Flandrin, "On the time-frequency detection of chirps," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 6, no. 2, pp 252-281, 1999.
- [3] P. Flandrin, "Time frequency and chirps," *Proc. SPIE 4391, Wavelet Application.*, vol. VIII, 161, 2001.
- [4] K.G. Larkin, "On the positivity of an energy operator", *Occasional Texts in the Pursuit of Clarity and Simplicity in Research*. Series 1, no. 2, pp. 1-5, 2015.
- [5] J.F. Kaiser, "On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal," in *Proc. ICASSP*, pp. 381-384, 1990.
- [6] J.F. Kaiser, "On Teager's energy algorithm and its generalization to continuous signals," in *Proc. IEEE DSP Workshop*, (New Paltz, NY), 1990.
- [7] H M. Teager, private communication, 1985.
- [8] H.M. Teager and S.M Teager, Evidence for Nonlinear Sound Production Mechanisms in the Vocal Tract, *Speech Production and Speech Modelling*, NATO ASI Series, vol. 55, pp 241-261, 1989.
- [9] A.O. Boudraa, Y. Préaux, J.C. Cexus et I. Fujino, "Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée," *GRETSI*, 2017 (Accepté).