

Estimateur H_∞ -Taylor pour le diagnostic des engrenages en régime non stationnaire

Amadou ASSOUMANE¹, Edgard SEKKO¹, Philippe RAVIER², Cécile CAPDESSUS¹,

¹Laboratoire PRISME, Université d'Orléans
21 rue de Loigny-La-Bataille, 28000 Chartres, France

²Laboratoire PRISME, Université d'Orléans
12 rue de Blois, 45067 Orléans, France

amadou.assoumane@etu.univ-orleans.fr,
{edgard.sekko, philippe.ravier, cecile.capdessus}@univ-orleans.fr

Résumé – La présence d'un défaut sur une dent d'engrenage engendre une modulation d'amplitude et de phase du signal d'engrènement. Ces modulations informent de manière pertinente sur l'état de l'engrenage d'où la nécessité de procéder à leur estimation. Cet article présente une nouvelle approche pour estimer les signaux de modulation en régime non stationnaire en utilisant l'estimateur H_∞ combiné avec un développement en série de Taylor. Cet estimateur est connu pour minimiser la pire amplification possible de l'effet des perturbations externes, notamment le bruit d'état et le bruit de mesure, sur l'erreur d'estimation. Une telle approche n'impose aucune hypothèse sur les propriétés statistiques des bruits contrairement à l'estimateur de Kalman. Cette approche est donc plus robuste et plus appropriée pour le diagnostic des engrenages. La performance de l'approche proposée est évaluée en l'appliquant sur un signal de synthèse et un signal expérimental.

Abstract – It is well known that a faulty gearbox vibration signal exhibits an amplitude modulation (AM) as well as a phase modulation (PM). These modulations carry out a lot of useful information about health condition. This paper presents a new approach to estimate these modulations using the H_∞ estimation combined with the Taylor series approximation. The H_∞ estimation is designed to minimize the worst possible amplification effects of disturbances (measurement and modeling noises) on the estimation error. Such an approach does not require any assumption on the statistic properties of the noises. Since additive noises in gearbox vibration signal are non Gaussian and non white, this approach is more robust and more suitable in practical gearbox diagnosis. To evaluate the efficiency of the proposed approach over a previous one, we use a synthetic and an experimental gearbox vibration signal.

1 Introduction

Lorsqu'un défaut apparaît sur une dent d'engrenage, le signal de vibration présente une modulation d'amplitude et une modulation de phase caractéristique du défaut. McFadden a proposé une technique très efficace pour estimer ces modulations en utilisant une moyenne synchrone temporelle et la transformée de Hilbert [1]. Cette méthode s'applique uniquement aux signaux stationnaires et requiert la sélection de la largeur de la bande de démodulation [2]. L'analyse des signaux non stationnaires nécessite donc des traitements spécifiques. Une des méthodes pour traiter ces types de signaux en analyse vibratoire est la poursuite des ordres. Deux classes de méthodes ont été développées dans ce cadre : les méthodes d'estimation non paramétrique et les méthodes d'estimation paramétrique. La première classe utilise une approche temps-fréquence pour l'analyse des signaux vibratoires non stationnaires. Et la plupart des méthodes non paramétriques utilisent la distribution de Wigner-Ville ou la transformée en ondelettes. Ces dernières sont limitées respectivement par : 1) l'apparition de termes croisés dénués de sens physique et la présence d'une énergie

négative [3] et 2) l'amplitude et la bande de fréquence du signal [4].

L'une des méthodes paramétriques très usitée dans l'analyse vibratoire en régime non stationnaire est l'estimateur de Kalman combiné avec une modélisation des signaux de modulation basée sur l'hypothèse de leur dérivée seconde nulle. Cette approche est proposée par Pan et Wu [5]. Elle requiert des hypothèses contraignantes sur les statistiques des bruits de mesure et d'état (centrés, blancs et gaussiens) et résulte de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Quant à l'estimateur H_∞ , il ne nécessite guère ces hypothèses et exploite un critère de minimisation de type "minmax". Cette méthode suppose uniquement que les bruits sont à énergie finie. L'estimateur H_∞ est obtenu en minimisant la pire amplification possible de l'effet des bruits sur l'erreur d'estimation [6]. Une nouvelle approche [7] combinant l'estimateur H_∞ et une modélisation des signaux de modulation par un polynôme constitué de monômes fonction des puissances du temps avec les coefficients suivant un modèle de type "marche aléatoire" (modèle 1) a donné de meilleurs résultats que la modélisation proposée par Pan et Wu [5]. Dans cet article, nous investiguons les performances d'une

nouvelle méthode d'estimation des signaux de modulation à partir de leur modélisation en série de Taylor. Cette nouvelle méthode ne requiert aucune hypothèse sur les coefficients du polynôme (modèle 2).

2 L'estimateur H_∞ -Taylor

2.1 Du signal de vibration au modèle d'état

Le signal de vibration d'un système d'engrenage peut être modélisé par un signal modulé en amplitude et en phase où la fréquence porteuse est la fréquence d'engrènement [1]. Lorsqu'un défaut est localisé sur une dent de l'engrenage, les fonctions de modulations sont affectées et varient à la fréquence de rotation de la roue défectueuse. Dans des conditions non stationnaires, le signal modulé peut être décrit dans le domaine continu par l'équation suivante :

$$s(t) = \sum_{i=1}^M A_i(t) \cos \left(2\pi i \int_0^t f_m(u) du + \phi_i(t) \right) \quad (1)$$

où :

- M est le nombre *a priori* de composantes significatives du signal,
- f_m est la fréquence d'engrènement,
- A_i et ϕ_i sont respectivement la fonction de modulation d'amplitude et de phase de la i ème composante variable au cours du temps.

En posant $\theta_i(t) = 2\pi i \int_0^t f_m(u) du$ le déplacement angulaire instantané pour $i = 1 \dots M$, le signal bruité y s'écrit

$$y(t) = s(t) + v(t) \quad (2)$$

dans lequel v est le bruit de mesure ou la partie non désirée du signal. En terme de représentation complexe, le signal $s(t)$ se met sous la forme

$$\tilde{s}(t) = \sum_{i=1}^M p_i(t) e^{j\theta_i(t)} \quad (3)$$

dans laquelle $p_i(t) = A_i(t) e^{j\phi_i(t)}$ est la i ème amplitude complexe et j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Cette amplitude complexe peut être approchée par une série de Taylor de degré d autour de $t = t_0$ par [8]

$$p_i(t) = \sum_{n=0}^d p_i^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!} \quad (4)$$

où $p_i^{(n)}$ est la dérivée n ème de p_i et $p_i^{(0)} = p_i$. Les dérivées successives de p_i sont évaluées à partir de (4) comme suit :

$$\begin{aligned} p_i^{(1)}(t) &= \sum_{n=1}^{d-1} p_i^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ p_i^{(2)}(t) &= \sum_{n=2}^{d-2} p_i^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\vdots \\ p_i^{(d)}(t) &= p_i^{(d)}(t_0) \end{aligned} \quad (5)$$

et la forme matricielle est

$$C_i(t) = \Phi(\tau) C_i(t_0) \quad (6)$$

où $\tau = t - t_0$, $C_i(t) = \begin{bmatrix} p_i(t) & \dots & p_i^{(d)}(t) \end{bmatrix}^T$ est le i ème vecteur d'état et

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^d}{d!} \\ & 1 & \tau & \dots & \frac{\tau^{d-1}}{(d-1)!} \\ & & 1 & \dots & \frac{\tau^{d-2}}{(d-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

est la matrice de transition. La i ème composante complexe du signal de vibration s'écrit alors

$$\tilde{s}_i(t) = h C_i(t) e^{j\theta_i(t)} = h r_i(t) \quad (8)$$

avec $r_i(t)$ le i ème vecteur de rotation et $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ le vecteur qui extrait la première composante de r_i .

En posant $t_0 = (k-1)T_e$ et $t = kT_e$, où T_e est la période d'échantillonnage, nous obtenons la transition

$$r_i(k) = \Phi(T_s) \psi_i(k) r_i(k-1) \quad (9)$$

où $\psi_i(k) = e^{2\pi j i f_m(k) T_e}$ est la i ème fréquence porteuse. Finalement nous obtenons la transition d'état discrète suivante

$$\begin{bmatrix} r_i(k) \\ \bar{r}_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(T_s) \psi_i(k) & 0 \\ 0 & \Phi(T_s) \bar{\psi}_i(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i(k-1) \\ \bar{r}_i(k-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

et la i ème composante discrète du signal réel

$$y_i(k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i(k) \\ \bar{r}_i(k) \end{bmatrix} + v_i(k) \quad (11)$$

où v_i est le bruit additif de la i ème composante et $\bar{\psi}_i$ et \bar{r}_i sont respectivement les conjugués complexes de ψ_i et r_i .

Pour estimer simultanément les M composantes du signal de vibration, l'équation (10) s'écrit de manière symbolique comme suit

$$x_k = F_k x_{k-1} \quad (12)$$

où $x_k = \begin{bmatrix} r_1(k) & \bar{r}_1(k) & \dots & r_M(k) & \bar{r}_M(k) \end{bmatrix}^T$ est la variable d'état de dimension $2M(d+1) \times 1$ à l'instant k et F_k est la matrice de transition de dimension $2M(d+1) \times 2M(d+1)$ telle que

$$F_k = \begin{bmatrix} \Phi(T_s) \psi_1(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(T_s) \bar{\psi}_1(k) & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \Phi(T_s) \psi_M(k) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Phi(T_s) \bar{\psi}_M(k) \end{bmatrix}$$

Vu que le développement en série de Taylor induit une erreur d'approximation, communément appelée reste de Taylor, nous la modélisons par un bruit non stationnaire w_k . Ce bruit affecte uniquement les amplitudes complexes p_i et \bar{p}_i . L'équation précédente devient donc

$$x_k = F_k x_{k-1} + w_k \quad (13)$$

et le signal de vibration donné par (11) se met sous la forme

$$y_k = H x_k + v_k \quad (14)$$

avec $H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & h & \dots & h & h \end{bmatrix}$ la matrice de transition de taille $1 \times 2M(d+1)$.

2.2 Algorithme de l'estimation H_∞

Considérons le modèle d'état composé de l'équation (13) et (14). Aucune hypothèse statistique n'est émise sur les quantités w_k et v_k . Elles doivent uniquement avoir une énergie bornée. Soit $e_k = x_k - \hat{x}_k$ l'erreur d'estimation lorsque \hat{x}_k est l'estimé de x_k . Contrairement au filtre de Kalman qui minimise cette erreur d'estimation, l'estimation H_∞ consiste à déterminer le minimum de l'erreur quelles que soient les quantités w_k , v_k et x_1 pour tout $k \in [1, N]$. La fonction objective pour cette estimation est donnée par

$$J_1 = \frac{\sum_{k=1}^N \|x_k - \hat{x}_k\|^2}{\|x_1 - \hat{x}_1\|_{P_1}^2 + \sum_{k=1}^N (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2)} \quad (15)$$

avec $((x_1 - \hat{x}_1), w_k, v_k) \neq 0$ et P_1 , Q et R des matrices de pondérations définies positives. La notation $\|x_k\|_S$ définit la norme L_2 pondérée (par S) de x_k telle que $\|x_k\|_S = x_k^T S x_k$. Notre objectif est de trouver une estimation \hat{x}_k de x_k qui minimise J_1 . Et la minimisation directe de J_1 n'étant pas facile, nous choisissons une borne de performance que doit satisfaire la stratégie de minimisation de J_1 . Cette stratégie consiste à trouver une estimation \hat{x}_k parmi tous les x_k possibles telle que

$$\|J_1\|_\infty \leq 1/\gamma \quad (16)$$

avec $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie et γ la borne de performance définie par l'utilisateur. Cette stratégie conduit à un problème "min-max" de telle sorte que le critère de performance soit équivalent à

$$\min_{\hat{x}_k} \max_{(v_k, w_k, x_1)} \frac{1}{\gamma} \|x_1 - \hat{x}_1\|_{P_1}^2 + \sum_{k=1}^N \|x_k - \hat{x}_k\|^2 - \frac{1}{\gamma} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) \quad (17)$$

La solution à ce problème "minmax" est donnée par le théorème suivant [6].

Théorème : Soit γ la borne de performance donnée par l'utilisateur. Le problème de l'estimation H_∞ admet une solution si et seulement si il existe une matrice stable symétrique définie positive satisfaisant l'équation discrète de Riccati

$$P_k = F_k P_{k-1} [I - \gamma P_{k-1} + H^T R^{-1} H P_{k-1}]^{-1} F_k^T + Q \quad (18)$$

avec I étant la matrice identité. Alors, l'estimation H_∞ donne

$$\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + G_k (y_k - H \hat{x}_k) \quad (19)$$

et le gain G_k de l'estimation H_∞ s'écrit

$$G_k = F_k P_k [I - \gamma P_{k-1} + H^T R^{-1} H P_{k-1}]^{-1} H^T R^{-1} \quad (20)$$

γ , R et Q doivent être choisis de sorte que P_k soit stable et définie positive.

3 Application

3.1 Signal synthétique

Afin d'évaluer les performances de la nouvelle approche par rapport à celle utilisée dans [7] nous avons généré un signal de

vibration synthétique. Le signal de vibration, échantillonné à 10 kHz pendant 3 s, est généré en utilisant l'équation 1. Il est composé d'un harmonique dont la fréquence d'engrènement varie selon la fonction $f_{m,k} = 500 + 250 \sin(2\pi t_k)$ avec t_k étant le temps discretisé. L'objectif est d'estimer les fonctions de modulation en utilisant l'estimateur H_∞ -Taylor d'une part et d'autre part avec le modèle (modèle 1) présenté dans [7]. Pour cela nous estimons les modulations dans le cas où les bruits additifs sont blancs ou colorés (rose) avec un rapport signal sur bruit en entrée, RSB_e , variant de 10 à 0 dB. Comme critère d'évaluation des performances de chacune des méthodes, nous utilisons le rapport signal sur bruit à la sortie qui est égal à la variance du signal s_k normalisée par la variance de l'erreur d'estimation $s_k - \hat{s}_k$.

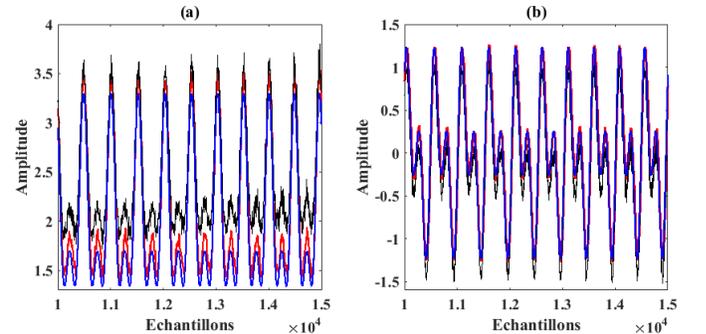
Dans cette simulation nous avons pris $\gamma = 10^{-6}$, $R = 10$, $Q = I$, $P_1 = I$ et $x_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Le tableau 1, obtenu après 300 simulations, montre la différence de performance entre les deux modèles. Le modèle 2 proposé supplante de loin le modèle 1 avec un écart d'environ 5 à 6 dB. La fi-

TABLE 1 – Comparaison de la performance des deux modèles

Modèle pour l'estimation	RSB_e (dB)	RSB_s (dB)	
		Bruit blanc	Bruit coloré
Modèle 1	10	8.83	8.28
Modèle 2	10	14.71	14.45
Modèle 1	5	6.13	5.27
Modèle 2	5	11.60	11.22
Modèle 1	0	2.22	1.15
Modèle 2	0	7.44	6.97

gure 1 montre l'estimation des fonctions de modulation par les deux modèles. Nous remarquons que le modèle 1 peine suivre les modulations dans les zones de variation rapide du signal. Quant au modèle 2, il permet de garantir une erreur d'estimation presque uniforme. Cet avantage permet de confirmer que cette nouvelle modélisation proposée dans le cadre du diagnostic des engrenages est plus efficace que la modélisation utilisant les fonctions de puissance du temps avec les coefficients du polynôme modélisés par une marche aléatoire (modèle 1) [7].

FIGURE 1 – Estimation de l'amplitude (a) et de la phase (b) lorsque le bruit est rose avec un $RSB_e = 0$ dB



3.2 Signal expérimental

L'efficacité de l'approche proposée a été évaluée sur des signaux acquis sur un banc d'essai du laboratoire LVA de l'Université de Lyon¹. Il comprend un moteur d'entraînement et un moteur frein qui sont liés par un étage d'engrenage de rapport de réduction 45/24. Un capteur d'accélération fixé sur le palier de roulement a été utilisé pour mesurer le signal de vibration et un codeur optique pour l'estimation de la vitesse de rotation du moteur. Deux signaux de vibrations, l'un pour l'engrenage sain et l'autre lorsqu'une dent de la roue de sortie est cassée, ont été enregistrés pendant 10 s et échantillonnés à 52 kHz lorsque la vitesse de rotation du moteur croissait de 300 tr/min à 1200 tr/min. Seulement trois harmoniques d'engrènement ont été modélisés dans cette analyse. Et pour des raisons de simplicité, l'amplitude démodulée ici est la moyenne pondérée des trois amplitudes démodulées. La détection du défaut va consister à chercher dans le spectre d'ordre de l'amplitude démodulée l'apparition d'harmoniques à l'ordre $\frac{45}{24} \approx 1.875$. L'ordre est le rapport entre la vitesse de rotation du moteur et celle de la roue défectueuse et le spectre d'ordre d'un signal est le spectre du signal échantillonné dans le domaine angulaire [9].

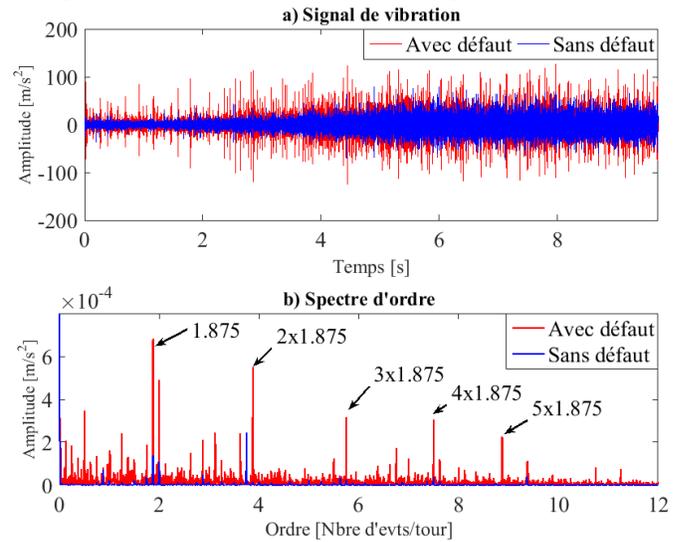
La figure 2.a est la superposition des deux signaux de vibration. Nous observons une nette amplification du signal de l'engrenage défectueux. Pour l'estimation des modulations, nous avons choisi $R = 150$, $Q = 1$, $P_1 = I$ et $\gamma = 10^{-6}$. La figure 2.b montre le spectre d'ordre de l'amplitude démodulée des deux signaux. Lorsque l'engrenage est sans défaut, deux harmoniques émergent avec une faible amplitude à l'ordre 1.875. Lorsque l'engrenage est défectueux, le spectre d'ordre présente plus d'harmoniques avec des amplitudes bien plus élevées. Ce résultat permet d'établir un diagnostic sur l'état des engrenages utilisés dans cette expérience. Cette analyse confirme donc l'efficacité de l'approche proposée en situation réelle.

4 Conclusion

Dans cet article nous avons présenté une nouvelle méthode pour le diagnostic des engrenages en régime non stationnaire basée sur une estimation H_∞ et un développement en série de Taylor des modulations. Cette méthode est proposée pour améliorer celle que nous avons exposée dans l'un de nos précédents travaux. L'apport de cette nouvelle méthode a été évalué grâce à un signal synthétique traduisant un défaut d'engrenage. Les résultats ont montré que la nouvelle méthode améliore de manière significative l'approche de modélisation présentée dans [7] d'un rapport signal sur bruit en sortie d'au moins 5 dB. La méthode proposée a été aussi appliquée à des signaux réels pour la détection d'un défaut de denture. Et nous avons pu établir avec succès un diagnostic de l'état de l'engrenage. Cette nouvelle approche est donc adéquate pour l'analyse des défauts d'engrenage en régime non stationnaire.

¹ **Remerciements** : Nous remercions M. Jérôme Antoni de nous avoir donné l'opportunité d'utiliser le banc d'essai du LVA pour cette étude.

FIGURE 2 – Analyse du signal réel (a) Signal de vibration, (b) Spectre d'ordre des modulations d'amplitude



Références

- [1] McFadden, P. D. (1986). Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 108(2), 165-170.
- [2] Dalpiaz, G., Rivola, A., and Rubini, R. (2000). Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. *Mechanical systems and signal processing*, 14(3), 387-412.
- [3] Hammond, J. K., and White, P. R. (1996). The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3), 419-447.
- [4] Tang, S. K. (2000). On the time-frequency analysis of signals that decay exponentially with time. *Journal of sound and vibration*, 234(2), 241-258.
- [5] Pan, M. C., and Wu, C. X. (2007). Adaptive Vold-Kalman filtering order tracking. *Mechanical systems and signal processing*, 21(8), 2957-2969.
- [6] Shen, X., and Deng, L. (1999). A dynamic system approach to speech enhancement using the H_∞ filtering algorithm. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 7(4), 391-399.
- [7] A. Assoumane, E. Sekko, C. Capdessus, and P. Ravier, Order tracking using H_∞ estimator and Taylor series approximation. 5ième colloque d'analyse vibratoire expérimentale, 2016, Blois, France.
- [8] de la O Serna, J. A., and Rodriguez-Maldonado, J. (2012). TaylorKalmanFourier filters for instantaneous oscillating phasor and harmonic estimates. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(4), 941-951.
- [9] Fyfe, K. R., and Munck, E. D. S. (1997). Analysis of computed order tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2), 187-205.