

# Topologie algébrique pour l’analyse d’images en niveau de gris

Rabih ASSAF<sup>1,2</sup>, Alban GOUPIL<sup>1</sup>, Mohammad KACIM<sup>2</sup>, Benoit WATTELLIER<sup>3</sup>, Valeriu VRABIE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CRESTIC, Université de Reims Champagne-Ardenne, 51100 Reims, France

<sup>2</sup>Département de mathématiques, Université Saint Esprit de Kaslik, B.P. 446 Jounieh, Liban

<sup>3</sup>PHASICS SA, 91190, Saint-Aubin, France

rabih.assaf@etudiant.univ-reims.fr, alban.goupil@univ-reims.fr  
mohamadkacim@usek.edu.lb, bw@phasics.fr, valeriu.vrabie@univ-reims.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous montrons que la topologie algébrique peut être appliquée pour effectuer la segmentation d’images en niveaux de gris ainsi que la détection d’objets. D’une part, la combinaison de caractéristiques topologiques avec d’autres statistiques améliore la segmentation. D’autre part, la construction topologique basée sur des superpixels permet de détecter des objets dans les images, par exemple des cellules dans les images médicales.

**Abstract** – In this paper we demonstrate that algebraic topology can be applied to perform grayscale image segmentation as well as object detection. On the one hand, the combination of topological features with other statistical ones enhance the segmentation. On the other hand, the topological construction based on superpixels permit to detect interesting objects in images, like cells in medical images for example.

## 1 Introduction

Au cours des dernières années, des efforts concertés ont été déployés pour utiliser les théories fondamentales de la topologie algébrique et les développer pour des aspects plus appliqués comme la topologie algorithmique [1] et l’analyse topologique des données [2]. Ces efforts, introduits notamment par [3], ont rendu possible l’utilisation de puissants concepts mathématiques dans des nombreuses applications telles que l’analyse des images [4], le traitement du signal [5], l’apprentissage automatique [6] etc. Il a été montré que la topologie algébrique représente un des domaines les plus prometteurs pour le développement des outils d’analyse d’images [4, 2].

La topologie algébrique fournit des structures algébriques discrètes telle que des classes d’homologie. Celles-ci peuvent être associées à des espaces topologiques comme des complexes cellulaires construits sur un ensemble de pixels ou de nuage de points. Ces complexes permettent de comprendre la connectivité des structures dans n’importe quelle dimension tels que le nombre de trous, de vides, de tunnels, etc. Parmi les méthodes de topologie algébrique, l’homologie persistante représente un des plus puissants outils algébriques. Par ailleurs elle est calculatoirement accessible dans l’évaluation des caractéristiques topologiques.

L’homologie persistante a été utilisée dans diverses tâches d’analyse d’images, par exemple pour la classification ou la segmentation. Dans [7] et [8], les auteurs utilisent l’homologie persistante pour classer des formes dans des images issues du domaine médical. Au niveau de la segmentation d’images, une méthode de division et de fusion des régions a été étu-

diée dans [9] en utilisant la notion de persistance topologique. Dans [10], les auteurs introduisent un algorithme qui effectue la segmentation hiérarchique des images et des vidéos en utilisant la topologie et la méthode du mean shift. Dans [11], les auteurs introduisent “Topocut”, une nouvelle façon d’intégrer les connaissances sur les propriétés topologiques dans le champ aléatoire de mode de segmentation d’image.

L’objectif de cet article est d’introduire la notion de l’homologie persistante et de montrer son apport dans l’analyse des images sur deux aspects. Un concerne l’association de caractéristiques topologiques et statistiques classiques, ce qui permet d’améliorer la segmentation des images en niveaux de gris. L’autre vise la détection des objets intéressants dans les images en basant la construction topologique sur des superpixels au lieu des pixels d’une image.

## 2 Méthodes

Les outils topologiques présentés par la suite suivent une démarche qui consiste à transformer une image en un complexe cellulaire. Une filtration construit ensuite une série de sous-complexes imbriqués sur laquelle l’homologie persistante est calculée. Cela permet de trouver des classes d’homologie et leurs durées de vie.

### 2.1 Le complexe cellulaire

L’homologie est un moyen de mesurer la connectivité d’un espace pour différentes dimensions notamment en découvrant des “trous.” Cela implique d’imposer une structure algébrique

sur un espace topologique construit.

Il existe de nombreux types de complexes cellulaires : les complexes cubiques, dans le cas d'utilisation de pixels d'une image, les complexes simpliciaux (qui représentent des triangulations de l'espace) dans le cas des superpixels, etc. Nous n'allons pas fournir d'explication détaillée sur les types de complexes cellulaires et leurs constructions préférant rediriger le lecteur vers [12]. Dans la suite de ce papier, les complexes considérés sont soit cubiques soit simpliciaux. Ils sont alors composés de points vus comme des cellules de dimension zéro, d'arêtes ou de côtés pour la dimension un et des carrées ou des triangles par la dimension deux.

La structure topologique d'un espace combinatoire  $X$  est algébriquement encodée par des espaces vectoriels binaires et par des applications linéaires associées sous la forme d'un complexe<sup>1</sup>. En effet, nous pouvons définir l'espace vectoriel  $C_k(X)$  des  $k$ -chaînes comme étant celui des séries formelles des cellules de dimension  $k$ , avec des coefficients dans  $\mathbb{F}_2$ , et muni de son opération d'addition naturelle. Les relations entre les chaînes de différentes dimensions sont assurées par les opérateurs de bords. L'opérateur de bord  $\partial_k : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$  entre  $C_k(X)$  et  $C_{k-1}(X)$  est une application linéaire qui associe à une  $k$ -chaîne la somme des chaînes aux bords de chaque cellule de dimension inférieure. Par exemple, à un triangle est associé la somme de ses trois arêtes. Par construction, les opérateurs de bords satisfont  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ . Le complexe de chaîne est la séquence  $C_k(X)$  avec les applications  $\partial_k$ . Pour le cas 2D, le complexe de chaîne est résumé par

$$0 \xrightarrow{\partial_3=0} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0=0} 0. \quad (1)$$

## 2.2 Groupes d'homologie

Les  $k$ -chaînes sans bords sont significatives dans notre construction. Elles forment un sous-groupe de  $C_k$ , que nous appelons groupe de  $k$ -cycles, formellement défini par :

$$Z_k = \ker \partial_k = \{x \in C_k \mid \partial_k x = 0\}. \quad (2)$$

Nous considérons aussi les groupes qui entourent des chaînes. Ils forment ce qu'on appelle le groupe de  $k$ -bords :

$$B_k = \text{im } \partial_{k+1} = \{x \in C_k \mid \exists y \in C_{k+1}, x = \partial_{k+1} y\}. \quad (3)$$

Par construction  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ , ce qui implique l'inclusion  $B_k \subset Z_k$ . On peut définir le  $k$ -ème groupe d'homologie  $H_k$  comme étant groupe de quotient  $Z_k/B_k$ . C'est le groupe des cycles qui ne sont pas des bords. Il représente donc les cycles qui entourent un trou et non un morceau d'espace plein.

Un élément  $[z]$  de  $H_k$  est une classe d'équivalence qui regroupe les cycles homologues c'est-à-dire que leur différence est un bord d'une chaîne. Le nombre de Betti  $\beta_k$  qui est le rang de  $H_k$  mesure le nombre de trous de dimension  $k$  linéairement indépendants dans le complexe.

1. La construction qui suit est généralisable en choisissant des espaces vectoriels sur des corps différents de  $\mathbb{F}_2$ , voire en utilisant des modules sur des anneaux commutatifs.

## 2.3 Homologie persistante

Grâce à la notion de filtration et à la fonctorialité de l'homologie, il est possible de suivre l'évolution des "trous" dans une séquence d'espace à travers l'homologie persistante.

### 2.3.1 Filtration

Une filtration est simplement une suite finie d'espaces topologiques imbriqués :

$$X_0 \subset \dots \subset X_i \subset \dots \subset X_j \subset \dots \subset X. \quad (4)$$

La construction d'une filtration est souvent réalisée par une fonction numérique  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dans ce cas la droite réelle  $\mathbb{R}$  est partitionnée en intervalles  $]t_{i-1}, t_i]$  et les espaces  $X_i$  de la filtration sont les ensembles de sous-niveaux, les hypographes,  $X_i = f^{-1}(]-\infty, t_i])$ . Ainsi, la condition  $X_i \subset X_{i+1}$  est naturellement vérifiée.

Dans le cas d'un espace  $X$  combinatoire comme un complexe simplicial ou cubique, la fonction  $f$  est représentée comme un poids associé à chaque cellule comme par exemple la valeur de pixel. Les hypographes  $X_i$  sont alors l'ensemble des cellules de poids inférieurs à un seuil  $t_i$ . Toutefois, il faut que les  $X_i$  soient aussi des sous-complexes de  $X$  pour pouvoir utiliser les groupes d'homologie. Cette contrainte est vérifiée si les poids des cellules de dimension  $k$  sont supérieurs à ceux de leur bord. Cette condition sera mise en œuvre dans la suite en fixant le poids d'une cellule de dimension  $k$  comme étant le maximum des poids de ses bords. Ce faisant, la fonction  $f$  est complètement définie sur  $X$  à partir des valeurs associés aux sommets.

### 2.3.2 Persistence

En suivant l'évolution topologique d'une filtration via l'homologie, on obtient une séquence de groupes d'homologie qui sont reliés par des applications linéaires induites par les inclusions :

$$H_k(X_0) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(X_i) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(X). \quad (5)$$

On peut calculer l'homologie  $H_k(X_i)$  pour tous les niveaux  $i$  afin de connaître les classes d'homologie. Mais nous perdons alors l'information concernant l'évolution de chaque classe particulière. Or, la mesure de la "durée de vie" des classes d'homologie lors de la filtration est plus instructive. En effet, au cours de la filtration, l'addition d'une cellule de dimension  $k$  peut modifier la topologie selon deux scénarios. Soit il "remplit" un trou de dimension  $k-1$  soit il en "crée" un de dimension  $k$ . Ainsi, les "trous" apparaissent et disparaissent pendant la filtration. Des dates d'apparition et de disparition peuvent alors leur être associées. Celles-ci sont calculables grâce à la suite de groupe d'homologies (5) par des algorithmes dédiés [1, 3].

Les classes d'homologie ayant une grande durée de vie indiquent la présence de phénomènes topologiques intéressants tandis que celles de courtes durées de vie sont vues comme du bruit topologique. L'évolution des classes d'homologie peut être visualisée à l'aide d'un diagramme de persistance. Une classe d'homologie  $y$  est représentée par un point dont l'abscisse fournit la date d'apparition et l'ordonnée celle de sa disparition.

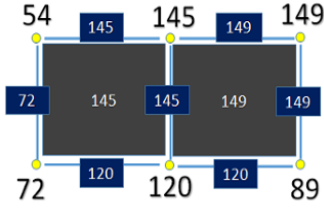


FIGURE 1 – Un complexe cubique composé de 6 pixels qui sont les sommets, 7 côtés et 2 carrées.

Par conséquent, sa distance à la diagonale indique la durée de vie. Les points loin de diagonale représentent des objets topologiquement significatifs tandis que ceux qui sont proches sont considérés comme du bruit. Cette mécanique est renforcée par la stabilité de diagramme de persistance sous les transformations continues de l'image [13].

### 3 Applications

Cette section est consacrée à la présentation des résultats obtenus par la construction topologique sur les pixels d'une image et sur des superpixels.

#### 3.1 Segmentation d'image basée sur les pixels

Pour la segmentation, nous analysons les images avec des fenêtres glissantes superposées. Pour chaque fenêtre nous construisons un complexe cubique dont les sommets sont les pixels, les côtés relient les pixels voisins, tandis que les carrées complètent 4 côtés voisins. Les poids des sommets pour la filtration sont donnés par le niveau de gris tandis que les côtés et les carrées portent la valeur maximale de leurs sommets et côtés respectivement comme le montre la figure 1. Dans chaque fenêtre on calcule ensuite plusieurs caractéristiques classiques qui sont la moyenne et la variance des niveaux de gris auxquelles s'ajoutent des caractéristiques topologiques comme la moyenne et la variance des durées de vie des trous de dimensions 0 et 1 ainsi que leurs entropies persistantes. Cette dernière est définie dans [14] pour chaque dimension par  $-\sum_{i \in I} p_i \log p_i$ , où  $I$  représente les intervalles des durées de vie,  $p_i = l_i/L$ ,  $l_i$  = date de disparition - date d'apparition et  $L = \sum_{i \in I} l_i$ . Ces 8 caractéristiques forment des vecteurs associés à chaque fenêtre. Ensuite, l'ensemble de ces vecteurs caractéristiques est classé en  $N$  classes. Pour simplicité, nous avons considéré une classification non supervisée par la méthode  $k$ -means, d'autres méthodes supervisées ou non étant envisageables. Chaque fenêtre est alors classée dans une classe, ce qui permet de réaliser une segmentation de l'image.

La figure 2 montre le résultat obtenu sur une image biomédicale. Nous voyons clairement que les valeurs de l'entropie persistante définissent quatre distributions bien distinctes selon les classes, ce qui montre l'apport des caractéristiques topologiques pour la segmentation d'image. Ainsi, les taches de

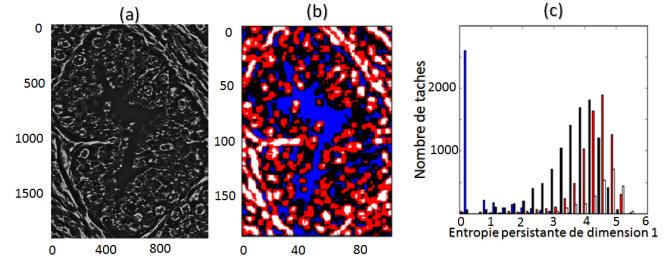


FIGURE 2 – a) Image de phase quantitative d'une glande de prostate de taille  $1324 \times 1880$  pixels. b) Segmentation par classification en 4 classes de caractéristiques classiques et topologiques avec des fenêtres glissantes de taille  $50 \times 50$  et un chevauchement de 10 pixels. c) Histogramme de l'entropie persistante de dimension 1 pour chaque classe.

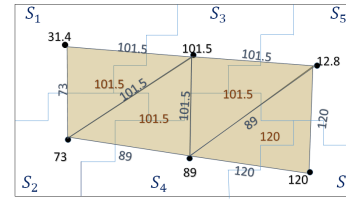


FIGURE 3 – Un complexe simplicial construit sur des superpixels  $S_i$  et composé de 6 sommets, 9 côtés et 4 triangles.

la classe colorée en bleu ont une entropie proche de 0, celles colorées en noir, rouge et blanc sont proches de 4, 4.5 et 5 respectivement. Cela permet donc d'isoler le tissu et d'identifier dans celui-ci les cellules et la stroma quand cette caractéristique est accompagnée des autres présentées.

#### 3.2 Détection d'objets utilisant des superpixels

Autre que sa forme de grille de pixels habituelle, une image peut être considérée comme un ensemble de superpixels. Chaque superpixel est représenté par un sommet qui est son centre. Nous construisons notre complexe topologique sur ces superpixels. Ainsi, nous considérons deux superpixels comme voisins si un pixel de l'un est adjacent à un pixel de l'autre tenant compte les 8 voisins de chaque pixel. Nous relient les deux sommets des superpixels par un côté et chaque 3 adjacents côtés forment un triangle. Ensuite, nous attribuons la moyenne des valeurs de pixels contenants dans chaque superpixel  $S_i$  pour les sommets et nous construisons le complexe simplicial comme le montre la figure 3. En suivant les étapes de calcul de l'homologie persistante, nous obtenons les classes d'homologie de dimension 1 qui apparaissent et disparaissent tout au long de filtration. La mise en évidence des classes qui ont la plus grande durée de vie permet de détecter des objets dans l'image.

Nous illustrons cette méthode sur une image test de  $400 \times 300$  pixels comportant 24 pièces de taille, texture et niveaux de gris moyen différents comme le montre la Fig. 4. On calcule l'homologie

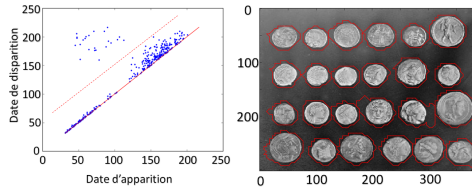


FIGURE 4 – Le diagramme de persistance des classes d’homologie de dimension 1 de l’image des pièces (gauche) et la mise en évidence des classes d’homologie les plus importantes pour détecter les objets (droite).

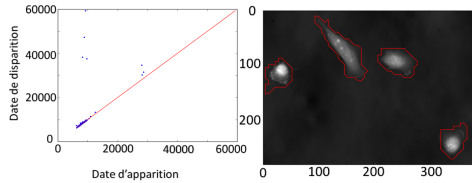


FIGURE 5 – Le diagramme de persistance de dimension 1 (gauche) de l’image biomédicale et la détection des cellules (droite) via les classes d’homologie de longue durée de vie.

logie persistante après la présegmentation en 5000 superpixels en utilisant la technique appelée SLIC décrite dans [15] et qui génère des superpixels d’une manière plus rapide que les méthodes existantes, plus efficace en mémoire, et qui dépasse l’état de l’art d’adhérence des bords. Les points éloignés de la diagonale désignent les 24 pièces de monnaies. Les chaînes qui représentent ces classes sont colorées en rouge, ce qui permet de détecter les pièces dans la Fig. 4.

Nous considérons ensuite une application réelle, une image bio-médicale représentée dans la Fig. 5 qui a été prise par une technique d’imagerie quantitative de phase introduite dans [16]. Après présegmentation de l’image de taille  $400 \times 300$  en 3000 superpixels avec la technique SLIC, l’homologie persistante permet de détecter les cellules comme le montre le diagramme. Les 4 points éloignés de la diagonale correspondent aux chaînes qui forment la base des classes d’homologie de longue durée de vie, donc aux objets d’intérêt.

## 4 Conclusion

La topologie algébrique a plusieurs propriétés intéressantes et permet de construire des nouveaux outils d’analyse d’images. L’association des caractéristiques topologiques amène de nouveaux moyens de segmentation des images de niveau de gris, comme le montre le résultat sur une image acquise sur une section de tissu non colorée. La construction de complexe cellulaire sur des superpixels simplifie le calcul et permet de détecter des objets intéressants dans les images à travers les classes d’homologie les plus importantes. Nous avons illustré ce concept sur une image de test comportant plusieurs pièces et sur une image réelle comportant des cellules. Ces outils doivent être

testés sur d’autres images, tout en sachant que des améliorations pourraient être obtenues en utilisant des invariants topologiques tels que la théorie des faisceaux et la persistance multidimensionnelle. **Remerciement** : La recherche pour cet article a été soutenue par le programme de bourses CNRS-L /USEK.

## Références

- [1] H. Edelsbrunner and J. L. Harer, “Computational topology :an introduction,” *American Mathematical Society*, 2010.
- [2] G. Carlsson, “Topological pattern recognition for point cloud data,” *Acta Numerica*, vol. 23, pp. 289–368, 005 2014.
- [3] A. Zomorodian, *Computational topology*. Atallah, M., Blanton, M. (eds.) Algorithms and Theory of Computation Handbook, 2nd edn. CRC, Boca Raton, 2010.
- [4] R. Ghrist, “Barcodes : The persistent topology of data,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 45, pp. 61–75, 2008.
- [5] M. Robinson, *Topological Signal Processing*, ser. Mathematical Engineering. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [6] G. Carlsson, R. Jardine, D. Feichtner-Kozlov, and D. Morozov, “Topological data analysis and machine learning theory,” Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, Tech. Rep., 2009.
- [7] O. Dunaeva, H. Edelsbrunner, A. Lukyanov, M. Machin, D. Malkova, R. Kuvaev, and S. Kashin, “The classification of endoscopy images with persistent homology,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 83, Part 1, pp. 13 – 22, 2016, geometric, topological and harmonic trends to image processing.
- [8] T. Qaiser, K. Sirinukunwattana, K. Nakane, Y. W. Tsang, D. Epstein, and N. Rajpoot, “Persistent homology for fast tumor segmentation in whole slide histology images,” *Procedia Computer Science*, vol. 90, pp. 119 – 124, 2016, 20th Conference on Medical Image Understanding and Analysis (MIUA 2016).
- [9] D. Letscher and J. Fritts, *Image Segmentation Using Topological Persistence*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 587–595.
- [10] S. Paris and F. Durand, “A topological approach to hierarchical segmentation using mean shift,” in *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, Jun. 2007, pp. 1–8.
- [11] C. Chen, D. Freedman, and C. H. Lampert, “Enforcing topological constraints in random field image segmentation,” in *CVPR 2011*, June 2011, pp. 2089–2096.
- [12] A. Hatcher, “Algebraic topology,” *Cambridge Univ. Press*, November 2001.
- [13] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer, “Stability of persistence diagrams,” *Discrete Comput. Geom.* 37 (2007), no. 1, 103 120. MR 2279866 (2008i :68130), 2007.
- [14] E. Merelli, M. Rucco, P. Sloot, and L. Tesei, “Topological characterization of complex systems : Using persistent entropy,” *Entropy*, vol. 17, no. 10, pp. 6872–6892, 2015.
- [15] R. Achanta, K. Smith, and A. L. P. Fua, “Slic superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods.”
- [16] P. Bon, G. Maucort, B. Wattellier, and S. Monneret, “Quadriwave lateral shearing interferometry for quantitative phase microscopy of living cells,” *Opt. Express*, vol. 17, no. 15, pp. 13 080–13 094, Jul 2009.