

Approximation de l'information mutuelle de précodeurs MIMO basée sur la distance minimale et sa probabilité

Baptiste VRIGNEAU et Olivier BERDER

IRISA UMR CNRS 6074, équipe GRANIT, 6, rue de Kerampont, CS 80518, 22305 Lannion Cedex
baptiste.vrigneau@irisa.fr, olivier.berder@irisa.fr

Résumé – Durant la dernière décennie, les précodeurs MIMO avec connaissance du canal ont été largement étudiés offrant une variété de solutions basées sur l'optimisation de différents critères comme la capacité, la distance minimale, l'erreur quadratique moyenne, l'information mutuelle... Ces solutions peuvent compliquer l'étude théorique à mener pour approximer la probabilité d'erreur ou calculer les rapports de vraisemblance (LLR). Si cela reste possible pour certains précodeurs dits diagonaux ou à allocation de puissance, cette étude est plus complexe pour des solutions qui peuvent prendre des formes différentes afin de s'adapter au canal (exemple choisi ici du $\max-d_{\min}$). Dans ce papier, nous proposons une nouvelle approximation de l'information mutuelle (IM) pour des précodeurs multiformes dont l'expression dépend de la distance minimale. Dans des travaux précédents, nous avons proposé le calcul de la densité de probabilité de cette distance permettant de différencier les formes d'un précodeur. Ceci nous permet d'obtenir l'IM moyenne du précodeur $\max-d_{\min}$ pour un canal de Rayleigh, quel que soit le système MIMO et la taille de la constellation.

Abstract – The linear closed-loop MIMO precoding technique employs the channel state information at both sides of the link to optimize various criteria such as the capacity, the mean square error, the mutual information... However, the complexity may be increased and the theoretical study of such a system can be difficult, i.e. obtain the Bit Error Rate or Logarithm of Likelihood Ratio (LLR). This study is available for some precoders (diagonal form) but it is difficult to deal with a precoder that chooses between different forms to adapt to the channel state ($\max-d_{\min}$ is the selected precoder in this work). In this paper, we propose a new approximation of the mutual information (MI) which is expressed as a function of the minimal distance. Indeed, our recent works permit us to obtain the probability density function of the minimal distance, including the multi-forms. Next, the MI can be averaged over the statistics of the channel and the result is available for any MIMO system and any modulation size.

1 Introduction

Les systèmes Multiple Input-Multiple Output ou MIMO sont maintenant inévitables dans les nouveaux standards de communications sans fils. De nombreuses solutions ont été présentées et nous considérons dans cet article les solutions basées sur un lien retour donnant la connaissance du canal à l'émission (Channel State Information at Transmitter ou CSIT) et mettant en place un précodage linéaire. Le signal reçu peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{GHFs} + \mathbf{Gn} \quad (1)$$

où $\mathbf{H}[n_r \times n_t]$ est la matrice de canal, n_t et n_r sont les nombres d'antennes à l'émission et à la réception, $\mathbf{F}[n_t \times b]$ et $\mathbf{G}[b \times n_r]$ sont les matrices de précodage et décodage, b est le nombre de symboles transmis, $\mathbf{s}[b \times 1]$ est le vecteur des symboles émis et $\mathbf{n}[n_r \times 1]$ est un bruit blanc additif gaussien (BBAG) indépendant et identiquement distribué (iid). Les matrices \mathbf{F} et \mathbf{G} sont alors les solutions de l'optimisation d'un critère pertinent. Cependant, une étape de diagonalisation basée sur une SVD est commune et la relation matricielle devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d \mathbf{s} + \mathbf{n}_v \quad (2)$$

où $\mathbf{H}_v[b \times b]$ est la matrice de canal diagonale liée aux valeurs singulières de \mathbf{H} , $\mathbf{F}_d[b \times b]$ est la matrice de précodage

et $\mathbf{n}_v[b \times 1]$ est un BBAG iid. Parmi les précodeurs historiques figure le Waterfilling ou WF [1] qui maximise la capacité ergotique et débouchant sur une allocation de puissance, c'est-à-dire une matrice \mathbf{F}_d diagonale. Ce précodeur considère que les symboles ont une distribution optimale gaussienne, ce qui n'est pas vrai en pratique car les constellations sont à taille finie, comme la MAQ- M par exemple avec M le nombre d'états. Plus récemment, le Mercury Waterfilling ou MWF a été défini [2, 3] pour des constellations à taille finie en prenant en compte l'information mutuelle ou IM définie par :

$$\mathcal{I} = b \log_2(M) - \frac{b}{\log(2)} - \frac{1}{M^b} \sum_{k=1}^{M^b} \mathbf{E}_{\mathbf{n}_v} \left[\log_2 \left(\sum_{m=1}^{M^b} e^{-\epsilon_{k,m}} \right) \right] \quad (3)$$

avec $\epsilon_{k,m} = \|\sqrt{\text{RSB}} \cdot \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m) + \mathbf{n}_v\|^2$ et RSB signifie rapport signal à bruit. La maximisation de l'IM peut se rapprocher de la maximisation de la distance minimale lorsque le RSB devient grand. Ainsi, les précodeurs basés sur ce critère comme le $\max-d_{\min}$ optimal [4] ou sous-optimal [5], le $E-d_{\min}$ [6] ou encore la solution basée sur la théorie des treillis [7] sont intéressants à étudier du point de vue de l'IM. D'autre part, la

probabilité de la distance minimale du $\max\text{-}d_{\min}$ pour un canal de Rayleigh décorrélé a été calculée dans [8] et permet de gérer le fait que le précodeur puisse prendre deux formes. L'exemple donné était le calcul de la capacité ergodique exprimée en fonction de la distance minimale de la constellation de réception (d_{\min}).

L'idée présentée dans ce papier est d'appliquer un principe analogue en exprimant l'IM comme une fonction de la distance minimale. Pour cela, le premier paragraphe traitera du calcul des espérances mathématiques de l'équation (3) avec une proposition d'approximation heuristique selon une loi de chi 2 non centrée définie par ses moments d'ordre 1 et 2. Le second paragraphe présentera les expressions en fonction de la distance minimale. Nous présenterons ensuite des résultats montrant une amélioration de l'approximation par rapport à celles de la littérature. De plus, la solution s'applique d'autant mieux à des précodeurs dont la constellation reste constante quel que soit le RSB comme le $\max\text{-}d_{\min}$ ou le Lattice. L'intérêt de ce nouveau résultat est de pouvoir évaluer rapidement ce critère pour des précodeurs compliqués et notamment multiformes et pourrait conduire au calcul de la probabilité des logarithmes des rapports de vraisemblances (LLR), tout en considérant une constellation à taille finie contrairement à [9].

2 Problème et idée d'approximation

Comme évoqué précédemment, la difficulté de la résolution de l'équation (3) réside dans le calcul de l'espérance mathématique d'une fonction non linéaire de variables corrélées construites à partir d'un vecteur aléatoire complexe gaussien. L'idéal serait d'avoir la distribution de la variable Z_k définie par :

$$Z_k = -\log \left(\sum_{m=1}^N e^{-\epsilon_{k,m}} \right) \quad (4)$$

Dans [10], Zeng et al. ont proposé d'appliquer l'inégalité de Jensen permettant d'inverser l'espérance mathématique et le logarithme, ce qui conduit à une expression plus facilement exploitable d'une borne supérieure. Cependant, les résultats de cette borne appliquée au $\max\text{-}d_{\min}$ se sont révélés décevants [8] et il était alors nécessaire de trouver une approximation plus précise. La solution proposée ici est une idée heuristique issue de deux observations. La première est que $\epsilon_{k,m}$ est une variable aléatoire connue avec une distribution de χ^2 non centrée (notation $\chi^2(\lambda_k, 2b)$). Elle est alors définie par deux paramètres : le nombre de degrés de liberté, ici $2b$, et sa constante de décentralisation λ définie comme la somme des valeurs moyennes des composantes gaussiennes, dans notre cas $\text{RSB} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}_d(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m)\|^2$. Or, en observant l'expression de $\epsilon_{k,m}$, cette valeur moyenne est directement liée à la distance entre deux symboles de la constellation de réception. La seconde observation est qu'il faut calculer le logarithme d'une somme de variables corrélées. Un cas similaire peut être trouvé dans [11] où une somme de variables log-normales corrélées est approximée par une variable log-normale. Dans la même lignée, nous appliquerons la même idée, à savoir approximer le logarithme de la

somme de variables du χ^2 non centrée corrélées par une variable du χ^2 non centrée. Le nombre de degrés de liberté sera le même et une constante sera ajoutée pour ajuster le domaine de définition :

$$Z_k = -\log \sum_{m=1}^{M^b} e^{-\epsilon_{k,m}} \simeq \frac{X_k}{2} + \beta_k \quad (5)$$

avec X_k une variable aléatoire $\chi^2(\lambda_k, 2b)$ et β_k une constante (le coefficient de 1/2 est dû à la variance de 1/2 de chaque dimension réelle du bruit complexe). Comme deux paramètres sont à déterminer, λ_k et β_k , il faut deux équations qui seront issues de l'égalité des moments d'ordre 1 et 2.

3 Calcul de l'approximation

3.1 Moment d'ordre 1

Posons $Y_k = e^{-Z_k}$ et calculons son moment d'ordre t :

$$\mathcal{M}_{k,t} = \mathbb{E}[Y_k^t] = \mathbb{E}[e^{-tZ_k}] = e^{-t\beta_k} \mathbb{E}[e^{-\frac{tX_k}{2}}]. \quad (6)$$

Comme la variable X_k est connue et que l'on retrouve la fonction génératrice des moments, il vient :

$$\log(\mathcal{M}_{k,t}) = -t\beta_k - \frac{\lambda_k t}{2(1+t)} - b \log(1+t). \quad (7)$$

D'un autre côté, le moment peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{M}_{k,t} = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{m=1}^{M^b} e^{-\epsilon_{k,m}} \right)^t \right]. \quad (8)$$

Le calcul de cette expression peut vite devenir fastidieux et c'est pourquoi nous nous limitons aux ordres 1 et 2. Ainsi, le résultat de (8) est simple pour l'ordre 1 :

$$\mathcal{M}_{k,1} = \sum_{m=1}^{M^b} \frac{e^{-\frac{\text{RSB} d_{\min}^2}{2} \delta_{k,m}}}{2^b}. \quad (9)$$

avec $\delta_{k,m} = \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}_d(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m)\|^2 / d_{\min}^2$ la distance au carré normalisée entre les symboles de la constellation. En conclusion de ce paragraphe, voici la première équation de notre système :

$$-\beta_k - \frac{\lambda_k}{4} = \log \left(\sum_{m=1}^{M^b} e^{-\frac{\text{RSB} d_{\min}^2}{2} \delta_{k,m}} \right). \quad (10)$$

3.2 Moment d'ordre 2

Si l'équation (7) est simple à mettre en œuvre, la seconde (8) demande un peu plus d'attention. Pour $t = 2$, il vient :

$$\mathcal{M}_{k,2} = \sum_{m=1}^{M^b} \sum_{l=1}^{M^b} \mathbb{E} \left[e^{-(\epsilon_{k,m} + \epsilon_{k,l})} \right]. \quad (11)$$

Il apparait un problème semblable avec la somme de deux variables corrélées et nous allons appliquer le même principe, à savoir approximer la variable dans l'exponentielle par :

$$U_k = \epsilon_{k,m} + \epsilon_{k,l} \simeq V_k + \alpha_k \quad (12)$$

avec V_k une variable aléatoire $\chi^2(\eta_k, 2b)$ et α_k une constante, η_k et α_k sont déterminés avec les moments d'ordre 1 et 2. En utilisant les expressions de $\epsilon_{k,m}$ et $\epsilon_{k,l}$, il vient :

$$\mathbb{E}[U_k] = 2b + \delta_{k,m} + \delta_{k,l} \quad (13)$$

$$\mathbb{E}[U_k^2] = (\text{RSB}d_{\min}^2(\delta_{k,m} + \delta_{k,l}) + 2b + 1)^2 - 1 + 4\zeta_{k,m,l}\text{RSB}d_{\min}^2 \quad (14)$$

où $\zeta_{k,m,l} = \text{Re}\{(\mathbf{H}_v\mathbf{F}_d(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m))^H(\mathbf{H}_v\mathbf{F}_d(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l))\} / d_{\min}^2$ est un terme croisé normalisé par rapport à d_{\min}^2 . En utilisant l'approximation de (12) et les résultats pour une variable χ^2 non centrée, il vient :

$$\mathbb{E}[U_k] = 2b + \eta_k + \alpha_k \text{ et } \mathbb{E}[U_k^2] - \mathbb{E}[U_k]^2 = 4(b + \eta_k) \quad (15)$$

Les équations (13) à (15) forment un système dont la résolution donne :

$$\eta_k = \text{RSB}d_{\min}^2((\delta_{k,m} + \delta_{k,l})/2 + \zeta_{k,m,l}) \quad (16)$$

$$\alpha_k = \text{RSB}d_{\min}^2((\delta_{k,m} + \delta_{k,l})/2 - \zeta_{k,m,l}) \quad (17)$$

On peut donc en déduire que

$$\mathbb{E}\left[e^{-(\epsilon_{k,m} + \epsilon_{k,l})}\right] \simeq \frac{e^{-(\alpha_k + \eta_k/3)}}{3^b} \quad (18)$$

puis que

$$\mathcal{M}_{k,2} \simeq \sum_{m=1}^{M^b} \sum_{l=1}^{M^b} \frac{e^{-\frac{2\text{RSB}d_{\min}^2}{3}(\delta_{k,m} + \delta_{k,l} - 2\zeta_{k,m,l})}}{3^b} \quad (19)$$

L'expression est très facile à programmer. En outre, pour les précodeurs dont la constellation n'est pas modifiée avec le RSB, ce calcul n'est réalisé qu'une seule fois et hors ligne. De plus, le précodeur max- d_{\min} se prête bien car les distances liées aux $\delta_{k,m}$ sont des multiples de d_{\min}^2 et un travail de simplification est possible afin de regrouper les mêmes distances. En conclusion de ce paragraphe, voici enfin la seconde équation de notre système :

$$-2\beta_k - \frac{\lambda_k}{3} = \log\left(\sum_{m=1}^{M^b} \sum_{l=1}^{M^b} e^{-\frac{2\text{RSB}d_{\min}^2}{3}(\delta_{k,m} + \delta_{k,l} - 2\zeta_{k,m,l})}\right). \quad (20)$$

3.3 Expression de l'information mutuelle

À l'aide des équations (10) et (20), les expressions des paramètres de X_k peuvent être trouvés :

$$\lambda_k = 6(b \log(3/4) - \log(\mathcal{M}_{k,1}^2) + \log(\mathcal{M}_{k,2})) \quad (21)$$

$$\beta_k = -\lambda_k/4 - b \log(2) - \log(\mathcal{M}_{k,1}) \quad (22)$$

et sachant que la valeur moyenne de Z_k approximée est $\mathbb{E}[Z_k] = b + \lambda_k/2 + \beta_k$, l'expression de l'information mutuelle devient :

$$\mathcal{I} = b \log_2(M) - \frac{b}{\log(2)} + \frac{1}{\log(2)M^b} \sum_{k=1}^{M^b} \mathbb{E}[Z_k] \quad (23)$$

Enfin, en utilisant les équations (21), et (22) dans (23), il vient notre approximation \mathcal{I}_{ap} de \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ap} = & b \log_2(M) + \\ & \frac{1}{M^b} \sum_{k=1}^{M^b} \frac{3}{2} \log_2 \left(\sum_{m=1}^{M^b} \sum_{l=1}^{M^b} e^{-\frac{2\text{RSB}d_{\min}^2}{3}(\delta_{k,m} + \delta_{k,l} - 2\zeta_{k,m,l})} \right) \\ & - 4 \log_2 \left(\sum_{m=1}^{M^b} e^{-\frac{\text{RSB}d_{\min}^2}{2}\delta_{k,m}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Ce dernier résultat permet d'exprimer l'IM en fonction de la distance minimale de la constellation utilisée. Un moyennage sur cette distance minimale comme dans [8] peut alors prendre en compte la statistique du canal. Pour le moment, la densité de probabilité (ddp) de la distance minimale au carré est disponible pour le précodeur max- d_{\min} pour un canal de Rayleigh décorréolé quelles que soient les valeurs de n_t , n_r et M . L'impact d'un précodeur avec plusieurs formes sera sur les constellations et se traduira par des expressions différentes des moments. Le calcul à réaliser pour le précodeur max- d_{\min} basé sur deux formes \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 est le suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}_{ap}(\text{RSB}) = & \int_0^{+\infty} \mathcal{I}_{ap,\mathbf{F}_1}(\text{RSB}, \tau) \text{Part}_{\mathbf{F}_1}(\tau) d\tau \\ & + \int_0^{+\infty} \mathcal{I}_{ap,\mathbf{F}_2}(\text{RSB}, \tau) \text{Part}_{\mathbf{F}_2}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

avec $\bar{\mathcal{I}}_{ap}(\text{RSB})$ l'information mutuelle moyenne, $\mathcal{I}_{ap,\mathbf{F}_i}(\text{RSB}, d_{\min}^2)$ l'expression de l'équation (24) appliquée à la forme i du précodeur, $\text{Part}_{\mathbf{F}_i}(d_{\min}^2)$ la partie de la ddp correspondant au précodeur i ($\text{Part}_{\mathbf{F}_1}(d_{\min}^2) + \text{Part}_{\mathbf{F}_2}(d_{\min}^2)$) donne la ddp complète de la distance minimale au carré, cf [8].

4 Résultats

La figure 1 affiche les courbes de l'IM pour les deux formes du précodeur max- d_{\min} avec un RSB de 1 pour les trois cas suivants : simulations, approximation de Zeng et notre approximation. Nous pouvons observer que notre approximation est plus proche de la simulation avec une erreur la plus importante pour des d_{\min}^2 autour de 5. En comparant le détail des expressions des deux approximations, la différence vient de la double somme avec le terme $\zeta_{k,m,l}$. Le second axe de la figure 1 affiche les ddp de la distance obtenues théoriquement comme indiqué dans [8]. Il est alors possible de réaliser le moyennage à l'aide d'une méthode numérique afin d'obtenir l'IF mutuelle moyenne affichée dans la figure 2. En comparaison avec l'approximation de Zeng, nous pouvons voir que le comportement de l'IM moyen est bien représenté par notre proposition pour les différents systèmes MIMO. Ces résultats sont très rapides à obtenir pour n'importe quels nombres d'antennes n_t et n_r et n'importe quelle taille de constellation MAQ- M .

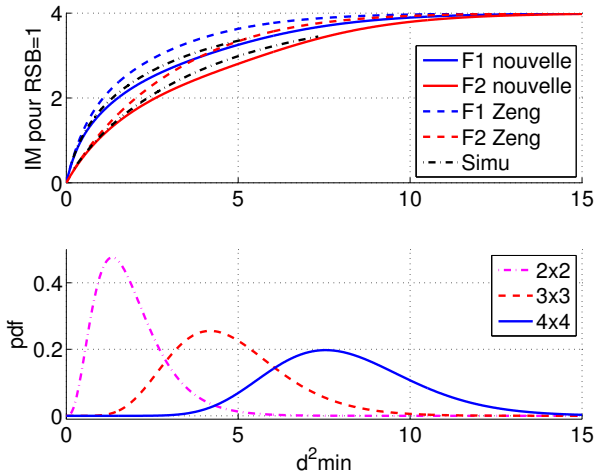


FIGURE 1 – IM approchée pour les deux formes du $\max-d_{\min}$ et les ddp de d_{\min}^2 pour différents systèmes, MAQ-4

5 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle approximation de l'information mutuelle d'un système MIMO précodé qui est plus précise que l'état de l'art. De plus, le résultat est une fonction de la distance minimale qui s'applique très bien aux solutions dont les constellations ne dépendent pas du RSB comme le $\max-d_{\min}$. De plus, il est possible de coupler cette expression avec la densité de probabilité de d_{\min} afin de moyennner l'IM sur un canal et, surtout, en prenant en compte un précodage avec plusieurs formes. Ces résultats ouvrent la porte à des perspectives intéressantes : appliquer cette méthode à des précodageurs compliqués comme le $E-d_{\min}$ ou le précodageur de [7], regarder si il est possible de trouver une expression du MWF, prendre en compte l'influence de la corrélation ou d'une autre statistique du canal, trouver la ddp de l'IM puis l'étendre au LLR qui a une forme similaire afin d'approximer le TEB et de relier le précodage au codage de canal.

Références

- [1] H. Sampath, P. Stoica, and A. Paulraj, "Generalized linear precoder and decoder design for MIMO channels using the weighted MMSE criterion," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 2198–2206, Dec. 2001.
- [2] D. Guo, S. Shamai, and S. Verdú, "Mutual information and minimum mean-square error in gaussian channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, Apr. 2005.
- [3] A. Lozano, A. M. Tulino, and S. Verdú, "Optimum power allocation for parallel gaussian channels with arbitrary input distributions," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, Jul. 2006.
- [4] L. Collin, O. Berder, P. Rostaing, and G. Burel, "Optimal minimum distance-based precoder for MIMO spa-

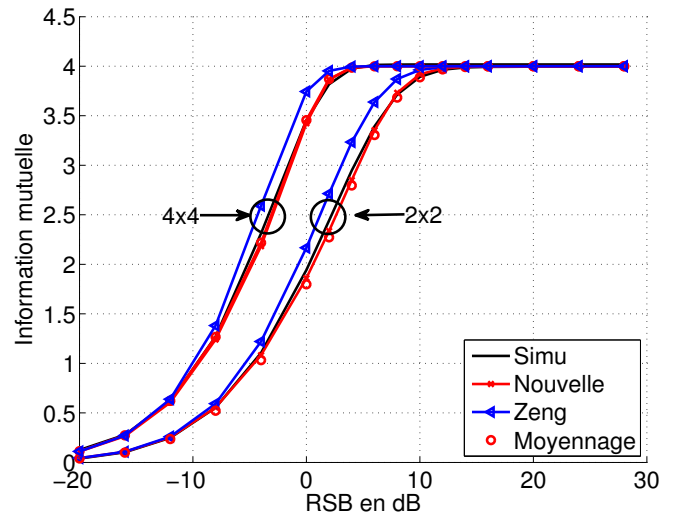


FIGURE 2 – Comparaison de la simulation de l'IM dans un canal de Rayleigh pour le $\max-d_{\min}$ avec 2 approximations, MIMO 2×2 et 4×4 , MAQ-4

tial multiplexing systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 3, 2004.

- [5] Q.-T. Ngo, O. Berder, and P. Scalart, "Minimum euclidean distance based precoders for MIMO systems using rectangular QAM modulations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 3, 2012.
- [6] B. Vrigneau, J. Letessier, P. Rostaing, L. Collin, and G. Burel, "Extension of the MIMO precoder based on the minimum euclidean distance : A cross-form matrix," *IEEE J. Sel. Areas Signal Process.*, vol. 2, pp. 135–146, Apr. 2008.
- [7] D. Kapetanovic, F. Rusek, T. Abrudan, and V. Koivunen, "Construction of minimum euclidean distance MIMO precoders and their lattice classifications," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 8, pp. 4470–4474, 2012.
- [8] J. O. Oyedapo, B. Vrigneau, R. Vauzelle, and H. Boeglen, "Performance analysis of closed-loop MIMO precoder based on the probability of minimum distance," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, Mars 2015.
- [9] F. Rusek, A. Lozano, and N. Jindal, "Mutual information of iid complex gaussian signals on block rayleigh-faded channels," *ISIT*, 2010.
- [10] W. Zeng, C. Xiao, and J. Lu, "A low-complexity design of linear precoding for MIMO channels with finite-alphabet inputs," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 1, Feb. 2012.
- [11] N. B. Mehta, A. F. Molisch, J. Wu, and J. Zhang, "Approximating the sum of correlated lognormal or lognormal-rice random variables," *IEEE ICC*, 2006.