

# Estimation bayésienne de la corrélation de Green; application à l'estimation passive de distances inter-capteurs

Rémy VINCENT<sup>1,2</sup>, Régis PERRIER<sup>1</sup>, Mikael CARMONA<sup>1</sup>, Olivier MICHEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CEA, Leti, 38054 Grenoble, France

<sup>2</sup>Univ. Grenoble-Alpes, Gipsa-lab, F-38000 Grenoble, France  
prenom.nom@cea.fr -- prenom.nom@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

**Résumé** – Un algorithme de régression polynomiale par morceaux est appliqué sur une corrélation de Green, fonctionnelle caractéristique d'un milieu de propagation linéaire. Cet outil, récemment introduit, ouvre de nouvelles perspectives pour le contrôle non destructif de structures et la localisation d'un réseau de capteurs, à partir de sources d'opportunités (dont les positions et le contenu spectral en temps et en espace sont non contrôlés). Dans les travaux présentés nous montrons comment un paramètre essentiel tel que la distance entre deux capteurs peut ainsi être estimé à partir de la corrélation de Green.

**Abstract** – A piecewise bayesian polynomial regression algorithm is used against the Green correlation of a linear propagation medium. This tool has never been used before in the passive estimation context while it offers promising perspectives for Structural Health Monitoring applications (SHM) using uncontrolled sources of opportunity. In this work, we focus on retrieving inter-sensor distances.

## 1 Formulation du problème

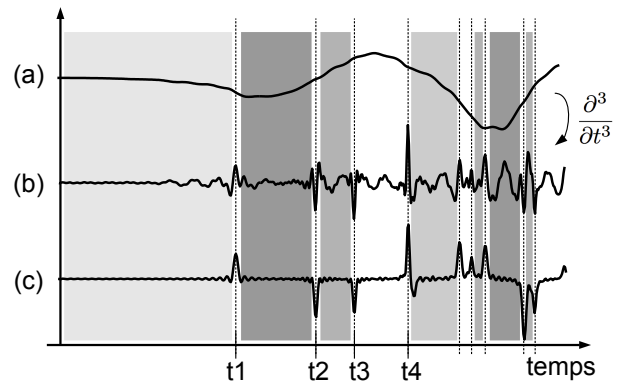
Estimer la distance qui sépare deux capteurs est une problématique aux applications variées telles que le Contrôle Non Destructif de structure et le SHM ou encore la localisation d'un réseau de capteurs. Récemment, une technique d'estimation a été proposée dans ces optiques, dans un contexte « passif » pour des ondes acoustiques aériennes dans un milieu confiné, voir [13, 14]. L'identification d'un paramètre est dite « passive » si l'estimation est réalisée à partir de l'information apportée par des sources non contrôlées par l'utilisateur (localisation, contenu spectral en temps et en espace), ce qui empêche donc l'utilisation des techniques actives classiques telles que TDOA ou RSSI pour estimer un temps de propagation par exemple [2].

La faisabilité de l'approche en acoustique aérienne est étudiée dans [4, 5]. En acoustique aérienne confinée, la fonction de Green  $\mathcal{G}$  (généralisation d'une réponse impulsionnelle  $h(t)$  en temps et en espace) entre les points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , est reliée à la corrélation de Green  $\mathcal{CG}$  (généralisation de l'inter-corrélation des réponses impulsionnelles  $h(t) * h(-t)$ ) par la relation suivante :

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto \frac{\partial^3}{\partial t^3} \mathcal{CG}(t \geq 0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (1)$$

Dans l'état de l'art [1, 3, 10], des techniques expliquent comment estimer  $\mathcal{CG}$  à partir de sources d'opportunité, auquel cas l'identité (1) est employée pour construire un estimateur  $\hat{\mathcal{G}}$  de la fonction de Green entre deux capteurs. Ensuite, des paramètres tels que le temps de propagation

$t_1$  entre les deux capteurs (ou de manière équivalente la distance inter-capteurs, à vitesse de propagation connue) peuvent être extraits de  $\hat{\mathcal{G}}$ . La Figure 1 illustre ceci.



**FIG. 1:** Présentation du problème. (a) Corrélation de Green estimée. (b) Fonction de Green estimée à partir de (a), par application de l'estimateur (1). (c) Fonction de Green théorique. Les patches plus ou moins foncés indiquent l'emplacement des temps de propagation  $t_1, \dots, t_4, \dots$

Une étude de performances de l'estimation passive du temps de propagation en acoustique aérienne confinée est présentée dans [15]. Une extension de la borne de Cramér-Rao est proposée et quantifie l'amélioration attendue des performances si l'estimation de paramètres était réalisée à partir de la corrélation de Green plutôt qu'à partir de la

fonction de Green, l'idée sous-jacente étant de ne pas subir la propagation des erreurs qui accompagnent la chaîne d'estimateurs présentée plus haut.

L'objectif de cet article est donc de présenter une telle approche, qui permettra d'estimer dans un contexte passif la distance entre deux capteurs à partir de la corrélation de Green du milieu de propagation. Nos travaux s'appuient sur un modèle récemment obtenu de la corrélation de Green, voir [5]. En régime de propagation hautes fréquences, la fonction de Green peut être modélisée par un ensemble de retards associés à des amplitudes décroissantes dues à l'atténuation causée par la propagation,

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_i a_i \delta(t - t_i). \quad (2)$$

Ainsi, comme présenté dans [5], par l'intégration triple de (1), la corrélation de Green  $\mathcal{CG}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  peut être modélisée par un polynôme d'ordre 2 par morceaux,

$$\mathcal{CG}(t_{i+1} \geq t \geq t_i, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = a_i t^2 + b_i t + c_i. \quad (3)$$

En possession de ce modèle de la corrélation de Green, le problème peut être approché par une méthode de régression polynomiale d'ordre 2, par morceaux, où les ruptures entre les morceaux sont des paramètres à estimer. Pour ce faire, et contrairement au protocole présenté dans l'introduction, voir l'équation (1), l'approche suivie tire partie d'*a priori* sur les données (des lois modélisant les paramètres et le bruit de mesure) et place l'approche dans un contexte d'inférence Bayésienne. La densité de probabilité de la position des ruptures sera estimée par un processus de type « Markov Chain Monte Carlo » [9].

L'algorithme employé est inspiré de plusieurs travaux récents, voir [16, 12, 7]. Dans l'algorithme présenté, la dimension du modèle est fixée (le nombre de ruptures et l'ordre des polynômes n'évoluent pas). En revanche, nous considérons un résidu d'estimation hétéroscédastique car provenant d'une estimation de corrélation à temps fini et qui a donc une variance qui dépend du retard considéré.

## 2 Modèle Bayésien hiérarchique

### 2.1 Modèle des données

La corrélation de Green est donc modélisée par un polynôme d'ordre 2 de  $K$  morceaux, dont les ruptures sont les temps de propagation  $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_{K-1}]$  permettant de construire la matrice de design  $\mathbf{S}$ , telle que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{w} \quad (4)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\in \mathbb{R}^N, \text{ observations} \\ \mathbf{S} &\in \mathbb{R}^{N \times 3(K+1)}, \text{ matrice de design} \\ \boldsymbol{\beta} &\in \mathbb{R}^{3(K+1)}, \text{ coefficients polynomiaux} \\ \mathbf{w} &\in \mathbb{R}^N, \text{ résidu d'estimation.} \end{aligned}$$

Les  $\mathbf{y}$  sont les échantillons d'une corrélation estimée. Le résidu d'estimation  $\mathbf{w}$  est hétéroscédastique et peut être modélisé par une loi normale,

$$\mathbf{w}[n] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{f_s} n\right), \quad n = 1 \dots N \quad (5)$$

où  $f_s$  est la fréquence d'échantillonnage, auquel cas la vraisemblance du modèle s'écrit

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{f_s}{N!}} \exp\left(-\frac{f_s}{2\sigma^2} \mathbf{w}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{w}^t\right), \quad (6)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  sont les paramètres du modèle et  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(1, \dots, N)$ .

### 2.2 Lois *a priori* sur les paramètres

Il est intéressant de modéliser les coefficients  $\boldsymbol{\beta}$  à l'aide un *g-prior* conjugué à la vraisemblance, celui-ci entraînant entre autre une invariance de la densité postérieure au changement d'échelle de la base de régression, voir [16] :

$$p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{t}, \sigma^2, g) \sim \mathcal{N}\left(0, g\sigma^2[\mathbf{S}^t\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}]^{-1}\right), \quad (7)$$

où des *a priori* peu informatifs (de Jeffrey) sont choisis pour les hyper-paramètres que sont la variance du résidu d'estimation  $\sigma^2$  et  $g$  (ici, des lois inverse-gamma avec des paramètres étalant fortement les densités).

### 2.3 Densité cible

Nous proposons d'estimer la densité  $p(\mathbf{t}, g|\mathbf{y})$ , la distribution jointe de  $g$  avec les positions des transitions entre les morceaux. Elle est obtenue en marginalisant la distribution *a posteriori* des paramètres,  $p(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, g|\mathbf{y})$ , grâce à la loi de Bayes :

$$p(\mathbf{t}, g|\mathbf{y}) = p(\mathbf{t})p(g) \int \mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, g)p(\boldsymbol{\beta}|\sigma, g)p(\sigma)d\boldsymbol{\beta}d\sigma.$$

La distribution *a posteriori* marginalisée obtenue est

$$p(\mathbf{t}, g|\mathbf{y}) \propto \frac{p(\mathbf{t})p(g)(1+g)^{-\frac{3(K+1)}{2}}}{\left[\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \{\mathbb{1}_N - M\} \mathbf{y}\right]^{\frac{N}{2}}}, \quad (8)$$

où

$$M = \frac{g}{1+g} \mathbf{S}[\mathbf{S}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1}. \quad (9)$$

Cette densité ne permet pas de déduire l'expression analytique d'un estimateur Bayésien classique  $\mathbf{t}$ . Un algorithme de type MCMC [9] est donc employé pour échantillonner cette distribution (voir section 3). Les paramètres d'intérêt  $\mathbf{t}$  seront estimés en allant extraire le maximum *a posteriori* (MAP) sur les densités estimées.

## 3 Algorithme m.c.m.c.

### 3.1 Description de l'algorithme

Une chaîne de Markov est construite avec pour cible stationnaire la densité  $p(\mathbf{t}, g|\mathbf{y})$ , voir l'algorithme 1. Dans

cette chaîne, le seul mouvement à définir est la mise à jour des  $K$  ruptures  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_K\}$ , décrit dans la section 3.2. Ce mouvement est accepté avec la probabilité  $\alpha$  proposée par Hastings [9] et que Peskun [11] prouve être à variance asymptotique minimale,

$$\alpha = \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{t}^*, g^* | \mathbf{y})}{p(\hat{\mathbf{t}}, \hat{g} | \mathbf{y})} \times \frac{p(\hat{\mathbf{t}}, \hat{g})}{p(\mathbf{t}^*, g^*)}\right\}, \quad (10)$$

où  $\mathbf{t}^*, g^*$  sont les paramètres mis à jours durant le mouvement et  $\hat{\mathbf{t}}, \hat{g}$  étaient les valeurs des paramètres au début du mouvement. Dans ce ratio,  $p(\mathbf{t}^*, g^* | \mathbf{y})$  et la probabilité  $p(t_i)$  sont présentées dans les équations (11), (14).

L'estimation est effectuée après une période de chauffe de  $n_{burn\ in}$  (choisi empiriquement) mouvements de la chaîne acceptés. Les variations d'une quantité centrale au problème :  $\mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \{\mathbb{1}_n - M\} \mathbf{y}$ , sont exposées Figure 2.

**Tant que** ( $n \leq n_{est} + n_{burn\ in}$ ) **faire**

- mise à jour aléatoire d'une rupture  $t_i$
- mise à jour des paramètres
- calcul du score obtenu avec la modification
- mouvement accepté avec la probabilité  $\alpha$

**Si** (mouvement accepté) **alors**

- incrémenter  $n$
- Si** ( $n \geq n_{burn\ in}$ ) **alors**
  - ajouter l'échantillon à  $\hat{p}(\mathbf{t} | \mathbf{y}, k)$

**Fin Si**

**Fin Si**

**Fait**

**Algorithme 1:** évolution de la chaîne

### 3.2 Mise à jour des paramètres

La rupture  $t_i$  à mettre à jour est choisie uniformément parmi le jeu de ruptures. La nouvelle valeur est le résultat d'un déplacement aléatoire à partir de la position précédente. Par exemple,

$$t_i^* = \hat{t}_i + \mathcal{N}(0, N/L). \quad (11)$$

où  $L = 200$  dans notre cas, choisi empiriquement afin de contrôler le temps de calcul.

Après cette mise à jour, les autres paramètres du modèle doivent être mis à jour en conséquence pour évaluer la qualité du mouvement. En particulier, pour obtenir la probabilité d'acceptation  $\alpha$ , il faut échantillonner un nouveau  $g$ , obtenu ici par un échantillonnage de type « partially collapsed Gibbs sampling », de  $\sigma^2$  puis de  $\beta$  :

- tirage de  $\sigma^2$  suivant :

$$\sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{t}, g \sim \mathcal{IG}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \{\mathbb{1}_n - M\} \mathbf{y})\right) \quad (12)$$

- tirage de  $\beta$  suivant :

$$\beta | \mathbf{y}, \sigma^2, \mathbf{t}, g \sim \mathcal{N}\left(M \mathbf{y}, \sigma^2 \frac{g}{1+g} \mathbf{S} [\mathbf{S}^T \Lambda^{-1} \mathbf{S}]^{-1}\right) \quad (13)$$

- tirage de  $g$  suivant :

$$g | \sigma^2, \mathbf{t}, \beta \sim \mathcal{IG}\left(A + \frac{3K}{2}, B + \frac{1}{2\sigma^2} \beta^T \mathbf{S}^T \Lambda^{-1} \mathbf{S} \beta\right) \quad (14)$$

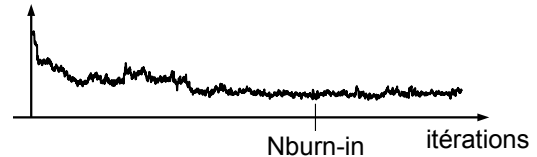
où  $A = 1, B = 100$  sont fixés empiriquement, témoignant un *a priori* peu informatif sur  $g$ .

## 4 Résultats de simulations

L'algorithme est appliqué sur l'exemple de simulation 1, dans une configuration où la triple dérivation de la corrélation estimée à faible SNR ne permet pas d'estimer les temps de propagation, voir Figure 3 (a').

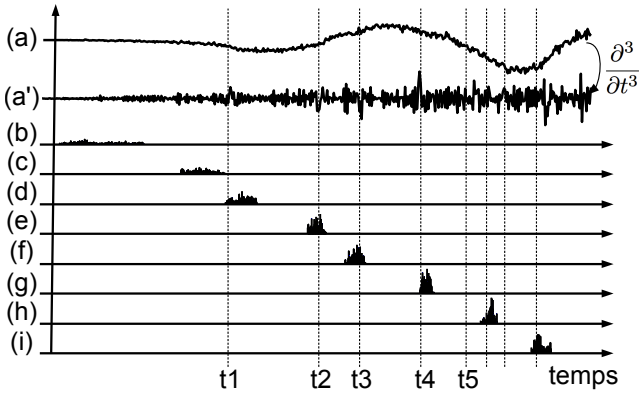
Dans une première étape « de calibration », la période de burn-in occupe 5000 mouvements acceptés de la chaîne; les densités cibles sont estimées sur les 10000 mouvements acceptés suivants. Pour initialiser cette étape, le nombre  $K$  de ruptures recherché est fixé à 8, au-delà de la valeur attendue (contexte physique) et les positions initiales des ruptures sont uniformément réparties sur  $[0, N]$ . Les résultats de cette étape sont montrés dans la figure 3. Il est ainsi visible que les ruptures (b) et (c) présentent une variance bien plus grande que les autres, ce qui signifie que le positionnement d'une rupture dans ce voisinage influence peu la reconstruction (puisque aucune position n'est plus vraisemblable qu'une autre). Une règle empirique conduit donc à éliminer ces deux ruptures ou à les recombinaison (à l'instar de ce que tendrait à faire une méthode de sélection automatique de modèle comme le Bayes Factor ou un algorithme de Reversible-Jump MCMC).

Dans une seconde étape « d'estimation » de  $\mathbf{t}$  et  $\beta$ , la période de burn-in occupe seulement 1000 mouvements de la chaîne, puisque cette dernière est initialisée à partir des résultats de l'étape de calibration:  $K$  est réduit à 6 et les temps initiaux des positions des ruptures sont les valeurs maximales *a posteriori* des densités estimées à l'issue de la calibration. Les résultats sont représentés sur la figure 4.

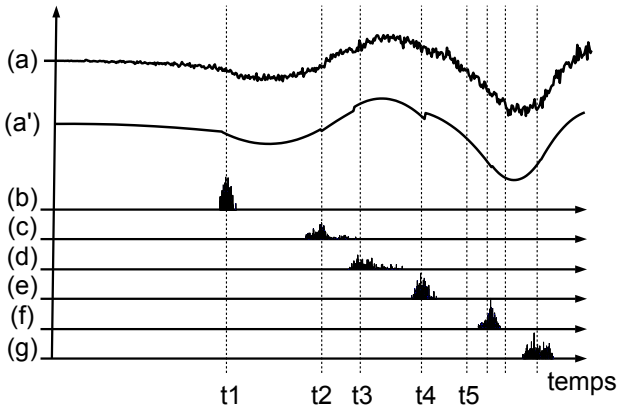


**FIG. 2:** Convergence de  $\mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \{\mathbb{1}_n - M\} \mathbf{y}$  pendant la période de burn-in.

Les temps de propagation sont correctement estimés, dans un contexte où la triple dérivation de la corrélation de Green, voir l'équation (1), estimée n'aboutit à aucun résultat. En revanche, les trois ruptures proches  $t_5, t_6, t_7$  ne sont représentées que par une seule rupture; la forme de la corrélation montre que l'ajout de ruptures dans ce voisinage ne contribue pas significativement à augmenter la vraisemblance (6). Le caractère hétéroscédastique du bruit de modèle ayant été intégré dans la modélisation des



**FIG. 3:** Calibration. (a) Corrélation de Green cible. (a') Corrélation de Green estimée. (b) - (i) Distribution *a posteriori* des positions des ruptures.



**FIG. 4:** Estimation. (a) Corrélation de Green cible. (b) - (f) Distribution *a posteriori* des positions des ruptures. (a') Corrélation de Green reconstruite en utilisant l'estimation MAP.

données, la variance des densités estimées n'augmente pas avec le temps. Enfin, la corrélation de Green reconstruite, théoriquement de classe  $C^1$ , n'est pas continue car aucune contrainte de continuité n'a été définie dans l'algorithme. Dans les travaux futurs, l'intérêt de cette contrainte de continuité dans le protocole de régression sera évalué.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous exploitons les résultats récents sur la modélisation de la corrélation de Green, nous proposons un algorithme MCMC pour l'estimation dans un cadre bayésien hiérarchisé des paramètres physiques du modèle. C'est un angle d'approche nouveau et prometteur; l'estimation des temps  $t$  caractérise la géométrie du milieu de propagation dans un contexte passif.

L'extension immédiate de ces travaux doit porter sur l'introduction dans le modèle d'un processus de vie/mort permettant d'estimer  $K$ .

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier Florent Chatelain, Céline Meillier et Raphael Bacher pour leurs conseils scientifiques et bibliographiques.

## Références

- [1] K. Aki and B. Chouet, *Origin of coda waves: source, attenuation and scatterin effects*, J. Geophys. Res., vol. 80, pp. 3322–3342 (1975).
- [2] C. Blandin, A. Ozerov, E. Vincent, Multi-source TDOA estimation in reverberant audio using angular spectra and clustering, Signal Processing, vol. 92, no. 8 (2012).
- [3] M. Campillo, A. Paul, *Long-range correlations in the diffuse seismic coda*, Science, vol. 299, pp. 547–549 (2003).
- [4] M. Carmona, O. Michel, J-L. Lacoume, B. Nicolas, N. Sprynski, *Ward identities for visco-acoustic and visco-elastic propagation media*, Wave Motion, vol. 49, pp. 484–489 (2012).
- [5] M. Carmona, O. Michel, J-L. Lacoume, R. Vincent, *On Green correlation of Stokes' equation*, Wave Motion 2015.
- [6] M. Carmona, O. Michel, J.L. Lacoume, B. Nicolas, *Identification passive en milieux acoustiques faiblement visqueux*, GRETSI (2013).
- [7] N. Dobigeon, J. Y. Tournet and M. Davy, *Joint segmentation of piecewise constant autoregressive processes using a hierarchical model and a bayesian sampling approach*, IEEE Transactions on signal processing, vol. 55, no. 4 (2007).
- [8] C.R. Farrar, G.H. James III, System Identification from Ambient Vibration Measurements on a Bridge, Journal Sound and Vibration, vol. 1 (1999).
- [9] W. K. Hastings, *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*, Biometrika, vol. 57, no. 1, p. 97 (1970).
- [10] O. Lobkis, R. Weaver, On the emergence of the Green function in the correlations of a diffuse field, J. Acoust. Soc. Am., vol. 110, pp. 3011–3017 (2001).
- [11] P. H. Peskun, *Optimum Monte-Carlo sampling using Markov chains*, Biometrika, vol. 60, no. 3, pp. 607 (1973).
- [12] E. Punskeya, C. Andrieu, A. Doucet and W. J. Fitzgerald, *Bayesian curve fitting using MCMC with applications to signal segmentation*, IEEE Transaction on Signal Processing, vol.50, no. 3 (2002).
- [13] R. Vincent, M. Carmona, O. Michel, *Passive acoustic sensor network localization; application to structural geometry monitoring*, EWSHM (2014).
- [14] R. Vincent, M. Carmona, O. Michel, *Passive acoustic sensor network localiation; a lower bound*, EUSIPCO (2014).
- [15] R. Vincent, M. Carmona, O. Michel, J. L. Lacoume, *Inter-sensor propagation delay estimation using sources of opportunity*, soumis à Elsevier SP, disponible sur arXiv.com.
- [16] M. Sanquer, F. Chatelain, M. El-Guedri, N. Martin, *A smooth transition model for multiple-regime time series*, IEEE Transactions on signal processing, vol. 61, no. 7 (2013).