

Analyse d'un GLRT pour la détection de cibles étendues

Timothée ROUFFET^{1,2}, Pascal VALLET², Eric GRIVEL², Bernard JOSEPH¹, Cyrille ENDERLI³, Stéphane KEMKEMIAN³

THALES Systèmes Aéroportés S.A., ^[1]Pessac, FRANCE, ^[3]Elancourt, FRANCE
^[2]Université de Bordeaux, Bordeaux INP, IMS, UMR CNRS 5218, Talence, FRANCE

{timothee.rouffet,bernard.joseph,cyrille-jean.enderli,stephane.kemkemian}@fr.thalesgroup.com
{pascal.vallet,eric.grivel}@ims-bordeaux.fr

Résumé – Dans le domaine du radar, lorsque la résolution en distance est suffisamment fine, une cible dite « étendue » n'est caractérisée que par quelques réflecteurs élémentaires prépondérants non nécessairement consécutifs et répartis sur plusieurs cases distance. Tenir compte de cette propriété dans le développement de tests de détection et localiser précisément ces réflecteurs constituent un problème d'intérêt. Dans cet article, nous étudions un détecteur fondé sur le test du rapport de vraisemblance généralisé intégrant la contrainte de localisation des réflecteurs. A partir du test obtenu et en utilisant des résultats issus des statistiques d'ordre, nous déduisons des approximations de la probabilité de fausse alarme, de la probabilité de détection et de la probabilité de détection et de localisation qui constitue une mesure de performance pertinente dans ce contexte. Enfin, nous effectuons une étude comparative avec d'autres détecteurs comme le détecteur dit « quadratique ».

Abstract – In radar, when the range resolution is high enough, an “extended” target is characterized by a few main scatterers not necessarily consecutive and spread over several range cells. Taking into account this property when developing detection tests and achieving a precise scatterer location are of particular interest. For this reason, we study a detector based on the generalized likelihood ratio test (GLRT) considering the location constraint. Given this test and using order statistics results, we derive approximations of the probability of false alarm, the probability of detection and the probability of detection and location which can be a relevant measure of performance in this context. Finally, a comparative study is carried out with other existing detectors such as the integrator.

1 Introduction

En traitement radar, les enjeux actuels concernent, entre autres, la détection de cibles lentes en dépit d'interférences telles que le fouillis [1], le suivi mono ou multi-senseurs d'une ou de plusieurs cibles manœuvrantes [2], ou encore la mise en œuvre d'une chaîne d'émission-réception pour des radars à haute résolution. Dans ce dernier cas, les problématiques à traiter sont multiples : on peut être amené à optimiser la forme d'onde à émettre [3], à développer des traitements multi-voies, à traiter simultanément les cibles étendues et les cibles ponctuelles, etc. Dans ce papier, il s'agit de développer des outils statistiques permettant conjointement la détection et la localisation des réflecteurs élémentaires caractérisant la cible. Ce type d'outils permet d'établir le profil distance de la cible en vue de son identification.

Parmi les détecteurs existants, deux types sont couramment utilisés. Pour une cible répartie sur Q cases distance, le détecteur dit « quadratique » s'appuie sur l'hypothèse que chaque case distance contient un réflecteur. A partir du test du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT), il s'agit de sommer les puissances du signal reçu après filtrage adapté des Q cases distance, puis de comparer le résultat à un seuil fixé pour une probabilité de fausse alarme (PFA) donnée [4]. Ce détecteur est simple à mettre en œuvre. Toutefois, en pratique, une cible étendue sur Q cases distance ne contient que quelques réflecteurs prépondérants [5]. Un modèle de cible plus réaliste appelé « cible (Q, K) » considère alors K réflecteurs non-nécessairement consécutifs répartis sur Q cases distance. Dans ce cas, le détecteur dit « K/Q » consiste à effectuer une détec-

tion pour chaque case distance et à décider la présence d'une cible lorsqu'au moins K réflecteurs sur Q cases sont détectés. Pour une cible (Q, K) telle que $K \approx Q$, le détecteur quadratique présente de meilleures performances de détection tandis que le détecteur K/Q est plus pertinent lorsque $K \ll Q$. Pour le détecteur K/Q , K est fixé *a priori* mais pourrait être estimé. Aussi, des approches alternatives [6] [7] ont été proposées où les auteurs étudient la détection d'une cible (Q, K) en présence de bruit blanc gaussien circulaire. Ainsi, dans [6], Gerlach *et al.* proposent un détecteur fondé sur le GLRT où le nombre K de réflecteurs est supposé aléatoire et distribué selon une distribution *a priori*. Ce détecteur réalise un compromis en termes de performances de détection entre le détecteur quadratique et le détecteur K/Q . Toutefois, comme le détecteur quadratique, il ne permet pas de déterminer les positions des K réflecteurs parmi les Q cases. Dans [7], les auteurs étudient un test de détection reposant sur la somme des K cases les plus énergétiques, où K est estimé à partir du critère d'information d'Akaike. Cependant, le seuil est fixé de manière *ad hoc*.

Dans cet article, nous considérons le même contexte que [7] et étudions un GLRT pour la détection d'une cible (Q, K) . En supposant K connu et en intégrant la localisation inconnue des K réflecteurs, nous tirons avantage des statistiques d'ordre [8] et déduisons des approximations de la PFA et de la probabilité de détection (PD). De plus, nous analysons la « probabilité de détection et de localisation » (PDL) prenant en compte conjointement les détections et localisations correctes des réflecteurs. Enfin, nous menons une étude comparative avec le détecteur quadratique et le détecteur proposé par Gerlach *et al.* [6] en nous fondant sur la PD.

La suite de cet article s'organise comme suit : le modèle de signal et le test de détection et de localisation sont présentés dans la section 2. Puis, nous explicitons des approximations de la PFA, de la PD et de la PDL dans la section 3. Enfin, des résultats de simulation viennent illustrer l'étude théorique.

Dans la suite, \mathbf{I}_K est la matrice identité de taille K . $\lfloor \cdot \rfloor$ correspond à la partie entière inférieure. \xrightarrow{D} désigne la convergence en distribution. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est la loi normale complexe circulaire de variance σ^2 , et $\text{Exp}(\lambda)$ est la loi exponentielle de paramètre λ . Enfin, Ω_Q désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, Q\}$.

2 Modèle de signaux et GLRT

Soient s le signal émis par le radar de durée T et de bande-passante B et $N = \lfloor \frac{T}{T_s} \rfloor$ le nombre d'échantillons avec T_s la période d'échantillonnage. Après rétrodiffusion sur la cible et sous l'hypothèse de bande étroite, l'enveloppe complexe du signal reçu, notée y et échantillonnée à T_s , se modélise comme suit :

$$y(lT_s) = \sum_{k=1}^K \alpha_k s(lT_s - \tau_k) e^{j2\pi f_c \frac{2v_c l T_s}{c}} + v(lT_s) \quad (1)$$

avec f_c la fréquence porteuse, c la vitesse de propagation de la lumière, v_c la vitesse de la cible, $v(lT_s)$ une réalisation d'une variable aléatoire gaussienne complexe circulaire de variance σ^2 , $\{\alpha_k\}_{k=1, \dots, K}$ et $\{\tau_k\}_{k=1, \dots, K}$ les facteurs complexes d'atténuation et les retards distincts associés aux K réflecteurs prépondérants.

Dans la suite, on fait l'hypothèse que K , v_c et σ^2 sont connus. De plus, on suppose que $\tau_k = i_k d$ où d est la durée proportionnelle à la largeur d'une case et $i_k \in \llbracket 1; Q \rrbracket$ avec Q le nombre de cases distance correspondant à l'étendue de la cible (Cf. Fig. 1).

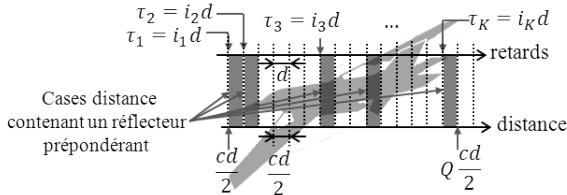


FIGURE 1 – Schéma d'une cible (Q, K)

En concaténant L échantillons successifs de y , (1) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v} \quad (2)$$

avec $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y((L-1)T_s)]^T$, $\mathbf{v} = [v(0), \dots, v((L-1)T_s)]^T$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_K]^T$ et \mathbf{X}_i la matrice de taille $L \times K$ définie par :

$$\mathbf{X}_i = \text{diag} \left(1, \dots, e^{j2\pi f_c \frac{2v_c}{c} (L-1)T_s} \right) [\mathbf{s}(\tau_1) \cdots \mathbf{s}(\tau_K)] \quad (3)$$

où $\mathbf{s}(\tau_k) = [s(-\tau_k), \dots, s((L-1)T_s - \tau_k)]^T$ pour $k = 1, \dots, K$ et $\mathbf{i} = [i_1, \dots, i_K]^T$ est le vecteur des indices distincts définissant les positions des réflecteurs.

Disposant du modèle de signal reçu, nous dérivons le GLRT qui consiste à comparer le rapport de vraisemblances à un seuil ϵ pour les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{v} \quad H_1 : \mathbf{y} = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v} \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{i} sont inconnus avec $\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K$ et i_1, \dots, i_K distincts.

En notant f_0 et f_1 les vraisemblances sous les hypothèses H_0 et H_1 respectivement, le rapport des vraisemblances peut s'écrire, après avoir remplacé $\boldsymbol{\alpha}$ par son estimée au sens du maximum de vraisemblance, comme suit :

$$S_N = \frac{\max_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}} f_1(\mathbf{y}; \mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}{f_0(\mathbf{y}, \sigma^2)} = \frac{2}{\sigma^2} \max_{\mathbf{i}} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \quad (5)$$

où $\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H$ désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les vecteurs $\mathbf{s}(\tau_1), \dots, \mathbf{s}(\tau_K)$.

3 Performances théoriques asymptotiques

Pour analyser théoriquement la PFA et la PD, il est courant de supposer que les signaux transmis présentent une certaine décorrélation¹ pour des durées NT_s suffisamment grandes. Ainsi, nous supposons que dans le régime asymptotique où le nombre N d'échantillons tend vers l'infini, et pour \mathbf{i} , K et Q fixes, on a :

$$\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbf{I}_K \quad (6)$$

Sous cette hypothèse de décorrélation, on montre que (5) s'écrit :

$$S_N = \frac{2}{\sigma^2} \max_{\mathbf{i}} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 + o(1) \text{ presque sûrement} \quad (7)$$

Remarques : Les composantes du vecteur $\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}$ sont les sorties des filtres adaptés pris aux instants $i_1 d, \dots, i_K d$. De plus, lorsque $K = Q$, on retrouve le détecteur quadratique.

Dans la suite, nous étudions la PFA, la PD et la PDL dans le régime asymptotique précédent en nous fondant sur la statistique de test (7) sous H_0 pour la PFA et dans le scénario suivant pour la PD et la PDL :

- $\boldsymbol{\alpha} \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2 \mathbf{I}_K)$, où² nous avons considéré la même variance γ^2 pour $\{\alpha_k\}_{k=1, \dots, K}$ afin de présenter dans ce papier des expressions simples pour les PFA, PD et PDL. L'extension au cas de variances différentes peut également être traitée sans difficulté ;
- sans perte de généralité pour la PD et la PDL, nous faisons l'hypothèse que la cible est sur les K premières cases distance.

Dans ce cas :

$$S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S = \frac{2}{\sigma^2} \max_{i_1, \dots, i_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \quad (8)$$

où z_1, \dots, z_Q sont Q variables aléatoires indépendantes telles que :

- en l'absence de cible : $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,
- en présence de cible : $z_1, \dots, z_K \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 + \gamma^2)$ et $z_{K+1}, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Nous étudions alors la loi de la statistique asymptotique S pour en déduire des approximations des PFA, PD et PDL.

3.1 Probabilité de fausse alarme

Partant de (8), le niveau du test est fixé à partir de l'expression asymptotique de la PFA donnée par :

$$\mathbb{P}_0(S > \epsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0(S_N > \epsilon) \quad (9)$$

En tenant compte de l'ensemble des ordonnancements possibles de $|z_1|^2, \dots, |z_Q|^2$, $\mathbb{P}_0(S > \epsilon)$ peut s'écrire comme suit :

$$\sum_{(i_1, \dots, i_Q) \in \Omega_Q} \mathbb{P}_0 \left(\left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2) > \epsilon \right\} \cap \left\{ |z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2 \right\} \right) \quad (10)$$

1. Cette hypothèse est notamment vérifiée lorsque s est une impulsion modulée linéairement en fréquence : $s(t) = e^{j\pi \frac{B}{T} t^2} \Pi_{[0, T]}(t)$, avec $\Pi_{[0, T]}(t)$ la porte de largeur T qui vaut $\frac{1}{\sqrt{T}}$ pour $t \in [0, T]$ et zéro sinon. Dans ce cas, on montre que l'on a $\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right)$.

2. La statistique de test S_N est développée dans le cas général où $\boldsymbol{\alpha}$ est déterministe inconnue. Dans cette section, nous étudions les performances de détection pour $\boldsymbol{\alpha}$ gaussien circulaire. Ce modèle usuel en radar est appelé modèle de Swerling I.

Puis, sachant que $|z_1|^2, \dots, |z_Q|^2$ sont indépendantes et identiquement distribuées, il vient :

$$\mathbb{P}_0(S > \epsilon) = Q! \mathbb{P}_0 \left(\frac{2}{\sigma^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_K|^2) > \epsilon, |z_1|^2 > \dots > |z_Q|^2 \right) \quad (11)$$

En remarquant que $\{\frac{2}{\sigma^2} |z_q|^2\}_{q=1, \dots, Q} \sim \text{Exp}(1/2)$ puis en appliquant successivement les lemmes 1 et 2 donnés en annexe, on montre que $\mathbb{P}_0(\frac{2}{\sigma^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_K|^2) > \epsilon, |z_1|^2 > \dots > |z_Q|^2)$ est liée à la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont l'une est distribuée selon une loi Gamma et l'autre selon une loi hypo-exponentielle³. Après développement, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S > \epsilon) = 1 + \frac{Q!}{K! 2^K} \sum_{q=1}^{Q-K} \beta_q \left(\frac{-K}{q} \right)^K \left[\frac{2K}{K+q} \left(e^{-\frac{K+q}{2K} \epsilon} - 1 \right) \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=0}^{K-1} \frac{1}{m!} \left(\frac{-q}{K} \right)^m \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2}; m+1 \right) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

avec Γ la fonction Gamma incomplète inférieure⁴ et $\beta_q = \frac{(-1)^{q-1}}{(Q-K-q)!(q-1)!}$.

3.2 Probabilité de détection

A partir de (8), la PD s'approche asymptotiquement par :

$$\mathbb{P}_1(S > \epsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1(S_N > \epsilon) \quad (13)$$

En opérant de la même manière qu'en 3.1, $\mathbb{P}_1(S > \epsilon)$ devient :

$$\sum_{(i_1, \dots, i_Q) \in \Omega_Q} \mathbb{P}_1 \left(\left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2) > \epsilon \right\} \cap \left\{ |z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2 \right\} \right) \quad (14)$$

où $\frac{2}{\sigma^2} |z_q|^2 \sim \text{Exp}(\lambda_q)$ avec $\lambda_q = 1/2$ pour $q = K+1, \dots, Q$ et $\lambda_q = \rho/2$ pour $q = 1, \dots, K$ avec :

$$\rho = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2} \quad (15)$$

Pour un Q -uplet donné, chaque terme de la somme (14) vérifie, à partir du changement de variable décrit dans le lemme 1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 \left(\left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2) > \epsilon \right\} \cap \left\{ |z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2 \right\} \right) \\ \propto \mathbb{P}_1(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \quad (16) \end{aligned}$$

où les variables $\{\Delta_{i_q}\}_{q=1, \dots, Q}$ sont indépendantes et distribuées selon des lois exponentielles de paramètres $(\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q})/q$ pour $q = 1, \dots, K$ et $(\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q})/K$ pour $q = K+1, \dots, Q$.

Etant donné (16), on s'appuie sur des développements similaires à la section 3.1 pour obtenir l'expression analytique de $\mathbb{P}_1(S > \epsilon)$. Celle-ci étant relativement longue, nous l'omettons par manque de place.

3. Soient Q variables aléatoires X_1, \dots, X_Q indépendantes telles que $X_1 \sim \text{Exp}(\phi_1), \dots, X_Q \sim \text{Exp}(\phi_Q)$ avec ϕ_1, \dots, ϕ_Q tous distincts. La loi de la variable $X_1 + \dots + X_Q$ est appelée loi « hypo-exponentielle » et sa densité de probabilité p_{hypoExp} est définie par :

$$p_{\text{hypoExp}}(x) = \sum_{q=1}^Q \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^Q \frac{\phi_j}{\phi_j - \phi_q} \phi_q \exp(-\phi_q x), \quad x \geq 0$$

4. Lorsque le paramètre m de Γ est un entier, Γ s'écrit :

$$\Gamma(y; m+1) = \int_0^y x^m \exp(-x) dx = m! \left(1 - e^{-y} \sum_{n=0}^m \frac{y^n}{n!} \right)$$

3.3 Analyse de la probabilité de détection et de localisation

En posant $(i_1^{(S_N)}, \dots, i_K^{(S_N)}) = \underset{i_1, \dots, i_K}{\text{argmax}} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$,

la PDL est définie comme la probabilité d'avoir simultanément $S_N > \epsilon$ et une localisation correcte, à savoir $i_1^{(S_N)} = 1, \dots, i_K^{(S_N)} = K$.

A partir de (8), et si $(i_1^{(S)}, \dots, i_K^{(S)}) = \underset{i_1, \dots, i_K}{\text{argmax}} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2$,

on montre que la PDL s'approche asymptotiquement par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 \left(\{S > \epsilon\} \cap \{i_1^{(S)} = 1, \dots, i_K^{(S)} = K\} \right) \\ = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1 \left(\{S_N > \epsilon\} \cap \{i_1^{(S_N)} = 1, \dots, i_K^{(S_N)} = K\} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

De manière similaire aux sections 3.1 et 3.2, on montre alors que la probabilité $\mathbb{P}_1(\{S > \epsilon\} \cap \{i_1^{(S)}, \dots, i_K^{(S)} \in \Omega_K\})$ est liée à la somme de deux variables aléatoires dont l'une est distribuée selon une loi hypo-exponentielle et l'autre selon une loi Gamma. Après développement, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 \left(\{S > \epsilon\} \cap \{i_1^{(S)}, \dots, i_K^{(S)} \in \Omega_K\} \right) \\ = \frac{(Q-K)!}{(K\rho+1) \dots (K\rho+Q-K)} + \frac{(Q-K)!}{2K} \rho^K \sum_{q=1}^{Q-K} \beta_q \left(\frac{-K}{q} \right)^K \\ \left[\frac{2K}{K\rho+q} \left(e^{-\frac{K\rho+q}{2K} \epsilon} - 1 \right) + 2 \sum_{m=0}^{K-1} \frac{1}{m!} \left(\frac{-q}{K\rho} \right)^m \Gamma \left(\frac{\rho\epsilon}{2}; m+1 \right) \right] \quad (18) \end{aligned}$$

où les grandeurs $\{\beta_q\}_{q=1, \dots, Q-K}$ sont définies en section 3.1.

Etant donné (18), la PDL relative à S pour $\epsilon \rightarrow 0$ correspond à la probabilité de localiser correctement les réflecteurs, et vaut $\frac{(Q-K)!}{(K\rho+1) \dots (K\rho+Q-K)}$.

4 Simulations

En Fig. 2, nous avons tracé les PDL pour S et S_N en fonction du rapport signal-à-bruit (RSB) défini par $\frac{\sigma^2}{\epsilon}$. Pour le test fondé sur S_N , le signal utilisé est une impulsion modulée linéairement en fréquence de bande-passante $B=2\text{MHz}$ et de durée $T=100\mu\text{s}$. Le seuil ϵ est obtenu à partir de (12) pour $\mathbb{P}_0(S > \epsilon) = 10^{-3}$. Nous avons pris $Q=15$, $K=2$, $T_s = \frac{1}{2B}$, i.e. $N=400$ et avons effectué 40 000 simulations de Monte Carlo.

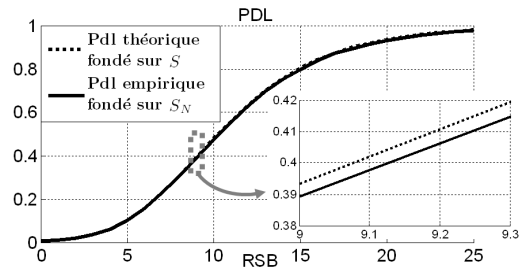


FIGURE 2 – PDL en fonction du seuil

En Fig. 2, les courbes pour S et S_N se superposent, confirmant que la PDL relative à S est proche de la PDL relative à S_N . Nous avons effectué les mêmes simulations pour différentes valeurs de Q , de K et de N et nous avons obtenu des résultats similaires tant que $N > 10$.

Dans un second temps, nous effectuons une comparaison en terme de PD avec le détecteur quadratique et avec le détecteur de Gerlach [6]. Pour cela, nous traçons les PD en fonction du

RSB dans le cas d'une cible composée de deux réflecteurs situés sur les cases 1 et 10. En pratique, la vraie valeur de K est inconnue. Afin de mener une étude de sensibilité au paramètre K , nous traçons les PD pour $K = 2$, $K = 5$ et $K = 1$ sur les Fig. 3, 4 et 5 respectivement. Les seuils sont obtenus à partir des PFA, c'est-à-dire une loi du χ^2 à $2Q$ degrés de liberté pour le détecteur quadratique et la PFA empirique du test décrit en [6] pour le détecteur de Gerlach.

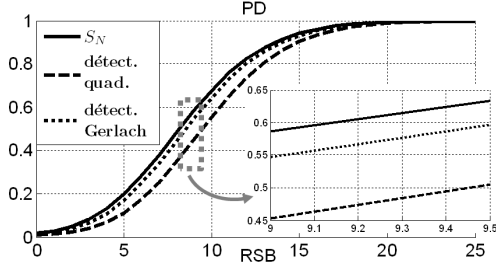


FIGURE 3 – Cible avec deux réflecteurs, $K = 2$

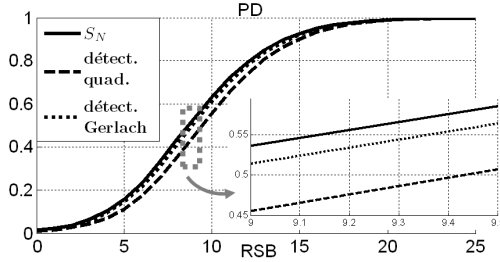


FIGURE 4 – Cible avec deux réflecteurs, K sur-estimé

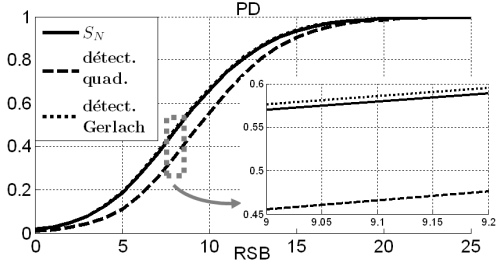


FIGURE 5 – Cible avec deux réflecteurs, K sous-estimé

D'après les Fig. 3 et 4, pour un RSB donné, la PD pour le détecteur proposé est supérieure à la PD du détecteur quadratique et du détecteur de [6] lorsque K est correctement estimé et lorsqu'il est sur-estimé. Lorsque K est sous-estimé, à RSB fixé, la PD du détecteur de Gerlach est sensiblement proche de la PD du détecteur proposé car l'écart entre les probabilités de détection est inférieur à 0,01. Cf. Fig. 5.

5 Conclusions et perspectives

Dans le cadre de la détection d'une cible (Q, K) , nous avons étudié un GLRT prenant en compte la localisation des réflecteurs. Pour le test de détection obtenu, nous avons déterminé les expressions théoriques approchées de la PFA, de la PD et de la PDL. Nous avons également comparé les performances de détection du détecteur proposé avec le détecteur quadratique et le détecteur de Gerlach [6].

Parmi les perspectives, nous envisageons d'intégrer la non-connaissance de K dans le détecteur étudié.

Annexes

Lemme 1 Soient Q variables aléatoires X_1, \dots, X_Q indépendantes et telles que $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1), \dots, X_Q \sim \text{Exp}(\lambda_Q)$. Soient $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(Q)}$ les variables aléatoires ordonnées telles que $X_{(1)} > X_{(2)} > \dots > X_{(Q)}$. Alors :

$$\mathbb{P}(X_{(1)} + \dots + X_{(K)} > \epsilon) = \sum_{(i_1, \dots, i_Q) \in \Omega_Q} g(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_Q}) \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon)$$

avec $g(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_Q}) = \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{\lambda_{i_1} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) \dots (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q})}$ et $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$ les Q variables aléatoires satisfaisant $\Delta_{i_q} = q(X_{(q)} - X_{(q+1)})$ pour $q=1, \dots, K$, $\Delta_{i_q} = K(X_{(q)} - X_{(q+1)})$ pour $q=K+1, \dots, Q-1$ et $\Delta_{i_Q} = KX_{(Q)}$. Ces variables sont indépendantes et distribuées selon des lois exponentielles dont les Q paramètres valent $\frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{q}$ pour $q=1, \dots, K$ et $\frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{K}$ pour $q=K+1, \dots, Q$.

Pour la démonstration, Cf. [8, ch. 11].

Lemme 2 Soient Q variables aléatoires indépendantes notées Z_1, \dots, Z_Q telles que $Z_1, \dots, Z_K \sim \text{Exp}(\phi_0)$ et $Z_{K+1} \sim \text{Exp}(\phi_1), \dots, Z_Q \sim \text{Exp}(\phi_{Q-K})$. Dans ce cas, la somme $S_1 = Z_1 + \dots + Z_K$ est distribuée selon une loi Gamma de paramètres K et ϕ_0 et la somme $S_2 = Z_{K+1} + \dots + Z_Q$ est distribuée selon une loi hypo-exponentielle de paramètres $\phi_1, \dots, \phi_{Q-K}$.

La densité de probabilité $p_{S_0}(y)$ de la somme $S_0 = S_1 + S_2$, définie pour $y \geq 0$, est alors donnée par :

$$p_{S_0}(y) = \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_q}{(\phi_0 - \phi_q)^K} e^{-\phi_q y} \Gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K)$$

où Γ est la fonction Gamma incomplète inférieure, $\mu = \prod_{j=1}^{Q-K} \phi_j$ et $\beta_q = \prod_{j=1, j \neq q}^{Q-K} \frac{1}{\phi_j - \phi_q}$.

Le lemme (2) s'obtient en convoluant les densités de probabilité d'une loi Gamma et d'une loi hypo-exponentielle.

Références

- [1] J.-F. Degurse, L. Savy, S. Marcos, *Reduced-rank STAP for target detection in heterogeneous environments*. IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst., Vol. 50, no.2, pp.1153-1162, 2014.
- [2] W. Cao, J. Lan, X. R. Li, *Joint tracking and classification of extended object based on recursive joint decision and estimation using multi-sensor data*. Int. Conf. on Information Fusion, pp.1-8, 2014.
- [3] T. Rouffet, E. Grivel, P. Vallet, C. Enderli, S. Kemkemian, *Combining two phase codes to extend the radar unambiguous range and get a trade-off in terms of performance for any clutter*. ICASSP 2015.
- [4] G. A. Van Der Spek. *Detection of a distributed target*. IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst., Vol. AES-7, No. 5, pp. 922-931, 1971.
- [5] Q. Li, E. J. Rothwell, K.-M. Chen, D. P. Nyquist. *Scattering center analysis of radar targets using fitting scheme and genetic algorithms*. IEEE Trans. on Ant. and Prop., Vol. 44, No. 2, pp.198-207, 1996.
- [6] K. Gerlach, M. Steiner, F. C. Lin. *Detection of a spatially distributed target in white noise*. IEEE Sig. Proc. Letters, Vol. 4, No. 7, pp. 198-200, 1997.
- [7] T. Long, L. Zheng, Y. Li, X. Yang. *Improved double threshold detector for spatially distributed target*. IEICE Trans. on Comm., Vol. E95-B, No. 4, pp. 1475-1478, 2012.
- [8] N. Balakrishnan, E. Castillo, J. S. Sarabia. *Advances in distribution theory, order statistics and inference*. Birkhäuser, 2006.