

# Coordination d'appareils autonomes dans un réseau décentralisé

Maël LE TREUST<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ETIS, UMR 8051 / ENSEA, Université Cergy-Pontoise, CNRS,  
6, avenue du Ponceau, 95014 CERGY-PONTOISE CEDEX, France

mael.le-treust@ensea.fr

**Résumé** – Cet article s'intéresse à la coordination que des appareils autonomes peuvent mettre en œuvre dans un réseau décentralisé. Les outils de la théorie de l'information servent à caractériser la transmission d'information et à déterminer les actions coordonnées qui peuvent être mises en œuvre. La clé du problème consiste à étudier les fréquences empiriques de symboles. Une distribution de probabilité cible est dite réalisable s'il existe une suite de codes telle que les distributions empiriques de symboles convergent vers une distribution de probabilité cible. Le problème de la coordination est très prometteur pour l'étude des réseaux décentralisés. L'objectif est de déterminer la quantité d'information minimale qui doit être échangée par des appareils autonomes pour qu'un tel réseau fonctionne. Du point de vue théorique, ce problème correspond au codage conjoint source-canal avec des informations adjacentes corrélées avec la source d'information et observées par l'encodeur et par le décodeur.

**Abstract** – This paper investigates the coordination between autonomous devices in a decentralized network. Information theory provides interesting methods in order to characterize the transmission of information and the coordination of actions of autonomous devices. The key issue is to examine the empirical frequencies of symbols. A target probability distribution is achievable if there exists a code such that the empirical distribution converges to the target probability distribution. The problem of coordination is very promising for the study of decentralized networks. The objective is to determine the minimum amount of information that must be exchanged for such a network operates. From a theoretical point of view, this problem corresponds to the joint source-channel coding with two-sided state information correlated with the information source.

## 1 Introduction

Le problème de la coordination est fondamental pour l'étude des réseaux décentralisés. Les appareils sont considérés comme des agents autonomes qui interagissent de manière coordonnée afin de réaliser un objectif commun, par exemple la transmission de l'information. Cette étude est basée sur une approche en deux temps [1], [2]. La première étape consiste à caractériser l'ensemble des distributions de probabilité conjointes qui sont réalisables, *i.e.* pour lesquelles il existe un codage induisant une distribution empirique de symboles qui tend vers la distribution cible. La seconde étape consiste à optimiser l'espérance d'une fonction d'utilité, par exemple la distorsion pour la source d'information ou le coût pour les entrées d'un canal, en considérant l'ensemble des distributions empiriques qui sont réalisables.

La coordination a été étudiée dans [3], [4] avec un point de vue débit-distorsion. Dans la littérature de la théorie des jeux, les agents coordonnent leurs actions en utilisant un schéma de codage [5]. Les relations entre la coordination et les réseaux décentralisés ont été approfondies dans [6] pour un canal parfait, dans [7] pour l'encodage causal, dans [8] pour les réseaux multi-utilisateurs avec espion, dans [9] pour les codes polaires, dans [10], [11], [2] pour le décodage causal, dans [12] pour le décodage sans perte, dans [13], [14] avec information adjacente et dans [15] pour un canal de rétroaction.

La caractérisation de l'ensemble des distributions de proba-

bilité réalisables est un problème équivalent au codage source-canal conjoint avec des informations adjacentes corrélées avec la source d'information et observées par l'encodeur et par le décodeur [16], [17]. Ce problème, représenté par la figure 1, se rapproche également du problème de la communication de l'état du canal, étudié dans [18].

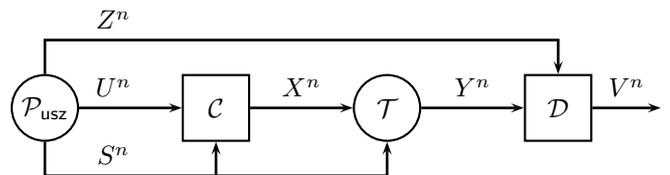


FIGURE 1 – Les variables aléatoires sont notées :  $U$  pour la source d'information,  $S$  pour l'état du canal,  $Z$  pour l'information adjacente observée par le décodeur,  $X$  pour l'entrée du canal,  $Y$  pour la sortie du canal et  $V$  pour la sortie du décodeur. La source  $\mathcal{P}_{usz}$  est i.i.d. et le canal  $\mathcal{T}_{y|xs}$  est sans-mémoire. La fonction d'encodage  $f : \mathcal{U}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$  et la fonction de décodage  $g : \mathcal{Y}^n \times \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$  sont non-causales.

La section 2 présente le modèle, les définitions et les résultats. La section 3 présente un exemple avec une source binaire et un canal binaire symétrique. Les cas de l'encodage causal et du décodage causal sont présentés dans la section 4. La section 5 conclut cet article.

## 2 Modèle

Le problème à l'étude est représenté figure 1. Les majuscules  $U$  désignent les variables aléatoires, les minuscules  $u \in \mathcal{U}$  désignent leurs réalisations et  $\mathcal{U}^n$  désigne le produit cartésien  $n$ -fois.  $U^n, S^n, Z^n, X^n, Y^n, V^n$  désignent les suites de variables aléatoires. Les ensembles  $\mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{V}$  sont discrets.  $\Delta(\mathcal{X})$  représente l'ensemble des distributions de probabilité  $\mathcal{P}(X)$  sur l'ensemble  $\mathcal{X}$ . La distance de la variation totale entre deux distributions de probabilité à support discret  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  s'écrit  $\|\mathcal{Q} - \mathcal{P}\|_{\text{tv}} = 1/2 \cdot \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{Q}(x) - \mathcal{P}(x)|$ . La propriété de chaîne de Markov s'écrit  $Y \dashv\!\!\!\dashv X \dashv\!\!\!\dashv U$  si pour tout  $(u, x, y)$ , nous avons  $\mathcal{P}(y|x, u) = \mathcal{P}(y|x)$ . La source d'information et les informations adjacentes sont corrélées et sont distribuées de manière i.i.d. avec la loi  $\mathcal{P}_{\text{usz}}$ . Le canal  $\mathcal{T}_{y|xs}$  est avec état et sans mémoire. Les statistiques de  $\mathcal{P}_{\text{usz}}$  et de  $\mathcal{T}_{y|xs}$  sont connues par l'encodeur  $\mathcal{C}$  et par le décodeur  $\mathcal{D}$ .

**Définition 2.1** *Un code non-causal  $c = (f, g) \in \mathcal{C}(n)$  est défini par les fonctions d'encodage (1) et de décodage (2) :*

$$f : \mathcal{U}^n \times \mathcal{S}^n \longrightarrow \mathcal{X}^n, \quad (1)$$

$$g : \mathcal{Y}^n \times \mathcal{Z}^n \longrightarrow \mathcal{V}^n. \quad (2)$$

$N(u|u^n)$  désigne le nombre d'occurrences du symbole  $u \in \mathcal{U}$  dans la suite  $u^n$ . La distribution empirique  $Q^n \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$  des suites  $(u^n, s^n, z^n, x^n, y^n, v^n)$  est définie par :

$$Q^n(u, s, z, x, y, v) = \frac{N(u, s, z, x, y, v|u^n, s^n, z^n, x^n, y^n, v^n)}{n}, \quad \forall (u, s, z, x, y, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V}. \quad (3)$$

Fixons un  $\varepsilon > 0$  et une distribution de probabilité cible  $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$ , la probabilité d'erreur du code  $c \in \mathcal{C}(n)$  est définie par :

$$\mathcal{P}_e(c) = \mathcal{P}_c \left( \left\| Q^n - \mathcal{Q} \right\|_{\text{tv}} \geq \varepsilon \right), \quad (4)$$

où  $Q^n \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$  est la variable aléatoire de la distribution empirique induite par le code  $c \in \mathcal{C}(n)$  et les distributions de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}, \mathcal{T}_{y|xs}$ .

**Définition 2.2** *Une distribution de probabilité  $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$  est réalisable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq \bar{n}$ , il existe un code  $c \in \mathcal{C}(n)$  qui satisfait :*

$$\mathcal{P}_e(c) = \mathcal{P}_c \left( \left\| Q^n - \mathcal{Q} \right\|_{\text{tv}} \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Une faible probabilité d'erreur  $\mathcal{P}_e(c)$  signifie que la fréquence empirique des symboles  $(u, s, z, x, y, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V}$  est proche de la distribution cible  $\mathcal{Q}(u, s, z, x, y, v)$ , i.e. les suites  $(U^n, S^n, Z^n, X^n, Y^n, V^n) \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{Q})$  sont conjointement typiques pour la distribution cible  $\mathcal{Q}$ , avec grande probabilité. Dans ce cas, les suites de symboles sont dites empiriquement coordonnées.

**Définition 2.3** *Une distribution de probabilité réalisable  $\mathcal{Q}$  induit une coordination dont les performances sont évaluées à l'aide d'une fonction d'utilité  $\Phi$  et de son espérance :*

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[\Phi] = \sum_{u, s, z, x, y, v} \mathcal{Q}(u, s, z, x, y, v) \cdot \Phi(u, s, z, x, y, v). \quad (7)$$

Les distributions empiriques réalisables permettent d'évaluer directement le niveau de distorsion minimal  $d(u, v)$  [2], le coût de canal minimal  $c(x)$  [12], ou l'utilité maximale d'un réseau décentralisé [5]. Cependant la caractérisation des distributions réalisables est un problème ouvert pour lequel nous présentons une borne inférieure et deux cas particuliers résolus.

**Théorème 2.4 (Encodage et décodage non-causaux)**

1) *Si une distribution de probabilité  $\mathcal{Q}(u, s, z, x, y, v)$  est réalisable alors elle satisfait les conditions marginales :*

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(u, s, z) = \mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z), & \mathcal{Q}(y|x, s) = \mathcal{T}(y|x, s), \\ Y \dashv\!\!\!\dashv (X, S) \dashv\!\!\!\dashv (U, Z), & Z \dashv\!\!\!\dashv (U, S) \dashv\!\!\!\dashv (X, Y), \end{cases} \quad (8)$$

2) *La distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x, y)$  est réalisable si elle satisfait :*

$$\max_{\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}} \left( I(W_1, W_2; Y, Z) - I(W_1, W_2; U, S) \right) > 0, \quad (9)$$

$\mathbb{Q}$  est l'ensemble des distributions de probabilité  $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$  avec les variables aléatoires auxiliaires  $(W_1, W_2)$  telles que :

$$\begin{cases} \sum_{(w_1, w_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} \mathcal{Q}(u, s, z, w_1, w_2, x, y, v) \\ = \mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x, y), \\ Y \dashv\!\!\!\dashv (X, S) \dashv\!\!\!\dashv (U, Z, W_1, W_2), \\ Z \dashv\!\!\!\dashv (U, S) \dashv\!\!\!\dashv (X, Y, W_1, W_2), \\ V \dashv\!\!\!\dashv (Y, Z, W_1, W_2) \dashv\!\!\!\dashv (U, S, X). \end{cases}$$

La distribution de probabilité  $\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}$  se décompose :

$$\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x, w_1, w_2|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|y, z, w_1, w_2).$$

Les supports des variables aléatoires auxiliaires  $(W_1, W_2)$  sont bornés par  $\max(|\mathcal{W}_1|, |\mathcal{W}_2|) \leq (|\mathcal{B}| + 1) \cdot (|\mathcal{B}| + 2)$  avec  $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V}$ .

La démonstration du théorème 2.4 et celles des autres résultats de cet article, sont disponibles dans [19]. Le schéma d'atteignabilité du théorème 2.4 est basé sur le codage hybride [20]. Sans information adjacente  $S = Z = \emptyset$ , le résultat d'atteignabilité est énoncé dans [7] avec une unique variable aléatoire auxiliaire  $W = (W_1, W_2)$ . Ici, la coordination empirique est obtenue en considérant  $(U, S)$  comme une information adjacente observée par l'encodeur et  $(Y, Z)$  comme une information adjacente observée par le décodeur. Ce problème ouvert est également connecté à la communication de l'état du canal [18], qui est résolu pour le canal gaussien [21], mais qui reste un problème ouvert dans le cas général.

### Corollaire 2.5 (Dualité : décodage sans perte - canal parfait)

• Lorsque le décodage est sans perte  $V = U$ , la distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathbb{1}(v|u)$  est réalisable si (10) est satisfaite et la réciproque est vraie.

$$\max_{\mathcal{Q}_{W_1|USX}} \left( I(W_1; Y, Z|U) - I(W_1; S|U) - H(U|Y, Z) \right) > 0, \quad (10)$$

• Lorsque le canal est parfait  $X = Y$ , la distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x)$  est réalisable si (11) est satisfaite et la réciproque est vraie.

$$\max_{\substack{\mathcal{Q}_{W_2|USX} \\ \mathcal{Q}_{V|X,Z,W_2}}} \left( I(W_2; Z|X) - I(W_2; U, S|X) + H(X|U, S) \right) > 0, \quad (11)$$

Les équations (10) et (11) proviennent de (9), en remplaçant respectivement,  $W_2$  par  $V$  et  $W_1$  par  $X$ . La similarité des équations (10) et (11) renvoie au résultat de dualité de [17].

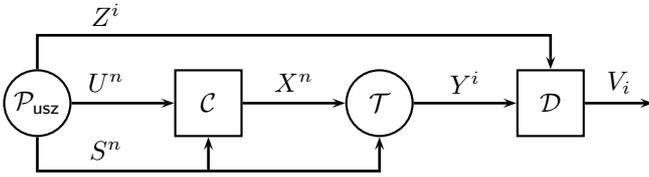


FIGURE 2 – Encodage non-causal  $f : U^n \times S^n \rightarrow \mathcal{X}^n$  et décodage causal  $g_i : \mathcal{Y}^i \times \mathcal{Z}^i \rightarrow \mathcal{V}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

## 3 Causalité à l'encodage ou au décodage

La notation  $Y^i$  correspond à la suite de symboles de longueur  $i$  et  $V_i$  correspond au  $i$ -ème symbole de la suite  $V^n$ . Le décodage (resp. l'encodage) est causal si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons  $V_i = g_i(Y^i, Z^i)$ , (resp.  $X_i = f_i(U^i, S^i)$ ). La figure 2 représente le décodage causal. Nous caractérisons les ensembles des distributions cibles qui sont réalisables pour un décodage et pour un encodage causal et strictement causal.

### Théorème 3.1 (Décodage causal)

1) Si une distribution de probabilité  $\mathcal{Q}(u, s, z, x, y, v)$  est réalisable alors elle satisfait les conditions marginales :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(u, s, z) = \mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z), & \mathcal{Q}(y|x, s) = \mathcal{T}(y|x, s), \\ Y \ominus (X, S) \ominus (U, Z), & Z \ominus (U, S) \ominus (X, Y). \end{cases} \quad (12)$$

2) La distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x, y)$  est réalisable si elle satisfait :

$$\max_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_d} \left( I(W_1; Y, Z|W_2) - I(W_1, W_2; U, S) \right) > 0, \quad (13)$$

3) La distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x, y)$  n'est pas réalisable si :

$$\max_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_d} \left( I(W_1; Y, Z|W_2) - I(W_1, W_2; U, S) \right) < 0, \quad (14)$$

$\mathcal{Q}_d$  est l'ensemble des distributions de probabilité  $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{V})$  avec les variables aléatoires auxiliaires  $(W_1, W_2)$  telles que :

$$\begin{cases} \sum_{(w_1, w_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} \mathcal{Q}(u, s, z, w_1, w_2, x, y, v) \\ = \mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|u, s, z, x, y), \\ Y \ominus (X, S) \ominus (U, Z, W_1, W_2), \\ Z \ominus (U, S) \ominus (X, Y, W_1, W_2), \\ V \ominus (Y, Z, W_2) \ominus (U, S, X, W_1). \end{cases}$$

La distribution de probabilité  $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_d$  se décompose :

$$\mathcal{P}_{\text{usz}}(u, s, z) \otimes \mathcal{Q}(x, w_1, w_2|u, s) \otimes \mathcal{T}(y|x, s) \otimes \mathcal{Q}(v|y, z, w_2).$$

Les supports des variables aléatoires auxiliaires  $(W_1, W_2)$  sont bornés par :  $\max(|\mathcal{W}_1|, |\mathcal{W}_2|) \leq (|\mathcal{B}| + 1) \cdot (|\mathcal{B}| + 2)$ .

Remarquons que  $V$  dépend de  $(Y, Z, W_2)$  mais pas de  $W_1$ . La démonstration du théorème 3.1 est disponible dans [19]. Ce résultat est un cas particulier du théorème IX.1 dans [2] en considérant  $(U, S)$  comme la source d'information et  $(Y, Z)$  comme la sortie du canal. Le problème de la coordination empirique est profondément relié à celui du codage source-canal conjoint avec informations adjacentes corrélées avec la source et observées par l'encodeur et par le décodeur.

Lorsque l'on considère le décodage strictement causal  $V_i = g_i(Y^{i-1}, Z^{i-1})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la solution optimale s'obtient en remplaçant la variable auxiliaire  $W_2$  par la sortie du décodeur  $V$  dans l'équation (13). Le résultat détaillé est énoncé dans [19]. Il est inspiré par le théorème III.1 dans [2] et est mentionné dans des travaux parallèles [10], [11].

### Corollaire 3.2 (Décodage causal sans coordination)

Considérons une fonction de distorsion  $d : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ . Un niveau de distorsion  $D \geq 0$  est réalisable si et seulement si :

$$\max_{\substack{\mathcal{Q}_{XW_1W_2|US}, \mathcal{Q}_{V|YZW_2} \\ \mathbb{E}[d(U, V)] \leq D}} \left( I(W_1; Y, Z|W_2) - I(W_1, W_2; U, S) \right) \geq 0,$$

Le corollaire 3.2 est une conséquence directe du théorème 3.1. Le niveau de distorsion  $D \geq 0$  est réalisable si et seulement s'il existe une distribution de probabilité conjointe  $\mathcal{P}_{\text{usz}} \otimes \mathcal{Q}_{XW_1W_2|US} \otimes \mathcal{T}_{Y|XS} \otimes \mathcal{Q}_{V|YZW_2}$  qui satisfait (15) et  $\mathbb{E}[d(U, V)] \leq D$ . Une analyse similaire est mentionnée dans [2] pour la démonstration du théorème V.3.

L'encodage causal et le décodage non-causal sont étudiés dans [7] pour le cas sans information adjacente  $S = Z = \emptyset$ . Nous étendons ce résultat au modèle avec information adjacente. Une distribution de probabilité  $\mathcal{P}_{\text{usz}} \otimes \mathcal{Q}_{X|US} \otimes \mathcal{T}_{Y|XS} \otimes \mathcal{Q}_{V|USZY}$  est réalisable si l'équation (15) est satisfaite. La réciproque est également vérifiée.

$$\max_{\substack{\mathcal{Q}_{W_1}, \mathcal{Q}_{W_2|USW_1}, \\ \mathcal{Q}_{X|USW_1}, \mathcal{Q}_{V|YZW_1W_2}}} \left( I(W_1, W_2; Y, Z) - I(W_2; U, S|W_1) \right) \geq 0, \quad (15)$$

Lorsque l'on considère l'encodage strictement causal  $X_i = f_i(U^{i-1}, S^{i-1})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la solution optimale s'obtient en remplaçant la variable auxiliaire  $W_1$  par l'entrée du canal  $X$  dans l'équation (15). Le résultat détaillé est énoncé dans [19].

## 4 Exemple sans information adjacente

La distribution empirique des symboles permet de comprendre la coordination que des appareils autonomes peuvent mettre en œuvre. En s'observant mutuellement, ces appareils sont capables de coordonner leurs actions afin de réaliser un objectif commun, tout en s'échangeant le minimum d'information. Nous considérons une source d'information binaire et un canal binaire symétrique, représentés par la figure 3.

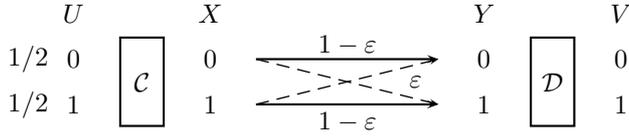


FIGURE 3 – Source d'information binaire de paramètre  $p = 1/2$  et un canal binaire symétrique de paramètre  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

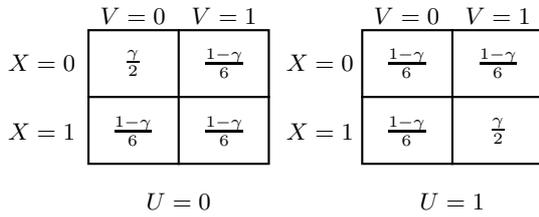


FIGURE 4 – Famille de distributions avec le paramètre  $\gamma \in [0, 1]$ . Lorsque  $\gamma = 1$ , les symboles  $U = X = V$  sont égaux.

Nous considérons une famille de distributions de probabilité sur  $(U, X, V)$  représentée par la figure 4. Nous cherchons à déterminer les paramètres  $\gamma \in [0, 1]$ , pour lesquels la distribution de probabilité est réalisable avec un encodeur non-causal et un décodeur strictement causal. La contrainte d'information correspondante :

$$\max_{\mathcal{Q}_{W_1|UXV}} \left( I(W_1; Y|V) - I(W_1, V; U) \right) > 0, \quad (16)$$

est obtenue en remplaçant  $W_2$  par  $V$  et  $S = Z = \emptyset$ , dans l'équation (13). La figure 5 représente une borne supérieure  $I(X; Y|U, V) - I(U; V)$  et une borne inférieure  $I(X; Y|V) - I(U; V, X)$  à la contrainte d'information (16), en fonction du paramètre  $\gamma \in [0, 1]$ . La plus forte coordination entre les variables aléatoires  $(U, X, V)$  est obtenue lorsque le paramètre  $\gamma$  est maximal et la contrainte d'information (16) est positive.

## 5 Conclusion

Le problème de la coordination empirique est profondément relié au problème du codage source-canal conjoint avec informations adjacentes corrélées avec la source et observées par l'encodeur et par le décodeur. Ces deux problèmes sont également connectés au problème de la communication de l'état du canal. Nous caractérisons les solutions optimales pour l'encodage causal et pour le décodage causal et nous proposons une borne inférieure et des cas particuliers résolus.

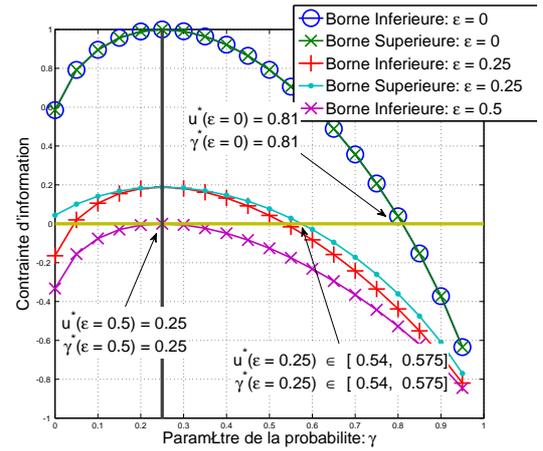


FIGURE 5 – Borne supérieure et inférieure à l'équation (16), en fonction du niveau de bruit  $\varepsilon \in \{0, 0.25, 0.5\}$  du canal.

## Références

- [1] V. Anantharam and V. Borkar, "Common randomness and distributed control : A counterexample," *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 7-8, pp. 568 – 572, 2007.
- [2] M. Le Treust, "Empirical coordination for the joint source-channel coding problem," *submitted to IEEE Trans. on Info. Theory*, <http://arxiv.org/abs/1406.4077>, 2014.
- [3] G. Kramer and S. Savari, "Communicating probability distributions," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 518 – 525, 2007.
- [4] P. Cuff, H. Permuter, and T. Cover, "Coordination capacity," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 9, pp. 4181–4206, 2010.
- [5] O. Gossner, P. Hernandez, and A. Neyman, "Optimal use of communication resources," *Econometrica*, vol. 74, pp. 1603–1636, Nov. 2006.
- [6] P. Cuff and L. Zhao, "Coordination using implicit communication," *Information Theory Workshop (ITW), IEEE*, pp. 467– 471, 2011.
- [7] P. Cuff and C. Schieler, "Hybrid codes needed for coordination over the point-to-point channel," in *49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pp. 235–239, Sept 2011.
- [8] M. Le Treust, A. Zaidi, and S. Lasaulce, "An achievable rate region for the broadcast wiretap channel with asymmetric side information," *IEEE Proc. of the 49th Allerton conference, Monticello, Illinois*, pp. 68 – 75.
- [9] M. Bloch, L. Luzzi, and J. Kliewer, "Strong coordination with polar codes," *50th Annual Allerton Conference*, pp. 565 – 571, 2012.
- [10] B. Laroousse, S. Lasaulce, and M. Bloch, "Coordination in distributed networks via coded actions with application to power control," *Submitted to IEEE Transactions on Information Theory*, <http://arxiv.org/abs/1501.03685>, 2014.
- [11] B. Laroousse, S. Lasaulce, and M. Wigger *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*.
- [12] M. Le Treust, "Correlation between channel state and information source with empirical coordination constraint," in *IEEE ITW*, pp. 272–276, Nov 2014.
- [13] B. Laroousse, S. Lasaulce, and M. Wigger, "Coordinating partially-informed agents over state-dependent networks," *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2015.
- [14] M. Le Treust, "Empirical coordination with two-sided state information and correlated source and states," in *IEEE International Symp. on Info. Theory (ISIT)*, 2015.
- [15] M. Le Treust, "Empirical coordination with feedback," in *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2015.
- [16] N. Merhav and S. Shamai, "On joint source-channel coding for the wyner-ziv source and the gel'fand-pinsker channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 11, pp. 2844–2855, 2003.
- [17] T. Cover and M. Chiang, "Duality between channel capacity and rate distortion with two-sided state information," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1629–1638, Jun 2002.
- [18] C. Choudhuri, Y.-H. Kim, and U. Mitra, "Causal state communication," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 3709–3719, June 2013.
- [19] M. Le Treust, "Coding theorems for empirical coordination," *internal technical report, to be submitted*, 2015.
- [20] P. Minero, S. Lim, and Y.-H. Kim, "Joint source-channel coding via hybrid coding," in *Information Theory Proceedings (ISIT), 2011 IEEE International Symposium on*, pp. 781–785, July 2011.
- [21] T. M. C. A. Sutivong, M. Chiang and Y.-H. Kim, "Channel capacity and state estimation for state-dependent gaussian channels," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 1486–1495, Apr. 2005.