

Problèmes inverses avec dictionnaires temps-fréquences en présence de bruit Gaussien non blanc

Matthieu KOWALSKI^{1,2,4}, Alexandre GRAMFORT^{3,4}

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes (Univ Paris-Sud, CNRS, CentraleSupélec)
Gif-sur-Yvette, France

²Parietal project-team, INRIA, CEA-Saclay, France

³Institut Mines-Télécom, Télécom ParisTech, CNRS LTCI, Paris, France

⁴NeuroSpin, CEA Saclay, Bat. 145, Gif-sur-Yvette Cedex, France

matthieu.kowalski@lss.centralesupelec.fr, alexandre.gramfort@telecom-paristech.fr

Résumé – Les régularisations parcimonieuses pour résoudre des problèmes inverses mal-posés ont été massivement étudiées ces dix dernières années. Jusqu’à présent, lorsque le bruit est pris en compte dans le modèle, il est presque systématiquement considéré comme blanc Gaussien. Bien que cette hypothèse peut être vérifiée en pratique, elle ne l’est que rarement lorsque les observations sont des séries temporelles dégradées par des bruits autocorrélés. Dans cet article, on étudie la régression parcimonieuse sous une hypothèse de bruit Gaussien non blanc, et comment inférer les paramètres du modèle avec les méthodes proximales. On étudie une application d’imagerie cérébrale: le problème de localisation de sources basée sur la magnéto- et l’électroencéphalographie (M/EEG) ce qui permet l’imagerie fonctionnelle du cerveau avec une résolution temporelle élevée. On utilise pour cela une représentation temps-fréquence des sources et une régularisation parcimonieuse qui favorise les sources focales avec des activations régulières et transitoires. Notre approche est évaluée sur des simulations en comparant plusieurs stratégies qui suppose que le bruit est blanc, ou qui utilise un simple pré-blanchiment.

Abstract – Sparse regressions to solve ill-posed inverse problems have been massively investigated over the last decade. Yet, when noise is present in the model, it is almost exclusively considered as Gaussian and white. While this assumption can hold in practice it rarely holds when observations are time series as they are corrupted by auto-correlated and colored noise. In this work we study sparse regression under the assumption of non white Gaussian noise and explain how to run the inference using proximal gradient methods. We investigate an application in brain imaging: the problem of source localization using magneto- and electroencephalography (M/EEG) which allow functional brain imaging with high temporal resolution. We use a time-frequency representation of the source waveforms and a sparse regularization which promotes focal sources with smooth and transient activations. Our approach is evaluated using simulations comparing it to strategies that assume the noise is white or to simple prewhitening.

1 Introduction

La régression linéaire parcimonieuse consiste en l’estimation de coefficients inconnus sous l’hypothèse que seuls quelques régresseurs sont prédictifs. En un mot, la plupart des régresseurs, ou variables, sont peu informatifs et devraient avoir des coefficients nuls. Le problème direct considéré est celui proposé par [1] dans un contexte M/EEG. MEG et EEG sont des méthodes d’imagerie cérébrale qui enregistrent les signaux électromagnétiques produit par l’activité neuronale. Le but est d’utiliser la M/EEG pour localiser les régions actives du cerveau de façon non invasive. On peut obtenir ainsi des images de l’activité cérébrale à l’échelle de la milliseconde.

Les données M/EEG sont des séries temporelles multivariées, dont le modèle direct s’écrit :

$$M = GX + n \quad (1)$$

où

- $M \in \mathbb{R}^{NT}$ est la matrice de mesures (N signaux de longueur T)
- $G \in \mathbb{R}^{NP}$ est la matrice de gain connue, obtenue par résolution numérique des équations de Maxwell.
- $X \in \mathbb{R}^{PT}$ est la matrice inconnue contenant les sources neuronales (P signaux de longueur T)
- $n \in \mathbb{R}^{NT}$ est la matrice de bruit, de distribution supposée indépendante en espace, i.e. à travers les lignes, avec chaque ligne identiquement distribuée selon une loi normale pouvant être corrélée.

Le reste de l’article est organisé comme suit. La section 2 suivante donne un bref état de l’art pour prendre en compte les bruits non blanc. La section 3 propose une stratégie de blanchiment temps-fréquence efficace pour prendre en compte le bruit non blanc directement dans le modèle. On donne dans la section 4 une comparaison numérique de cinq stratégies pour résoudre le problème inverse en présence d’un bruit Gaussien non blanc. Finalement, la section 5 conclut l’article.

2 État de l'art

Une approche standard pour le problème inverse M/EEG avec un bruit blanc Gaussien utilise une approche de type Basis pursuit denoising [2] et s'écrit comme [1] :

$$\min_Z \frac{1}{2} \|M - GZ\Phi^*\|_{\text{fro}}^2 + \lambda \|Z\|_1$$

où $\|Z\|_1$ est la norme ℓ_1 de la matrice dépliée Z , $\Phi \in \mathbb{C}^{TQ}$ est une matrice de Q atomes temps-fréquence et $Z \in \mathbb{C}^{PQ}$ sont les coefficients de synthèse correspondants. La dimension Q est le produit du nombre d'indices temporels Q_t et d'indices fréquentiels Q_f . L'estimation des sources est alors donnée par resynthèse $X = Z\Phi^*$. $\|Z\|_1$ peut aussi être remplacé par une norme mixte ou une combinaison d'une norme mixte et d'une norme ℓ_1 [1]. Dans un soucis de simplicité et clarté, on se limite ici à la norme ℓ_1 .

Une approche classique pour prendre en compte les bruits Gaussiens non blanc, est d'utiliser la matrice de covariance temporelle Σ du bruit dans le terme d'attache aux données :

$$\min_Z \frac{1}{2} \text{Tr}((M - GZ\Phi^*)\Sigma^{-1}(M - GZ\Phi^*)^*) + \lambda \|Z\|_1 .$$

Cependant, cette approche suppose d'avoir une bonne estimation de Σ^{-1} et dépend directement de la longueur T .

Une autre approche classique est de pré-blanchir les données M [3, 4]. Si l'on note $\tilde{M} = M \star w^{-1}$ une telle matrice de pré-blanchie, on résout alors :

$$\min_Z \frac{1}{2} \|\tilde{M} - GZ\Phi^*\|_{\text{fro}}^2 + \lambda \|Z\|_1 . \quad (2)$$

Ainsi, les sources estimées sont données par $X = Z\Phi^* \star w$. Bien que cette approche soit inutile avec une régularisation ℓ_2 (le minimum étant alors le même que sur le problème original), elle se justifie avec une régularisation ℓ_1 grâce à l'étape de seuillage : pré-blanchir les données M réhausse les fréquences qui sont les moins bruitées.

Ici, on utilise le fait que tout bruit Gaussien de matrice de covariance temporelle Σ , $n \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ (dont l'auto-corrélation est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$) peut être obtenue par filtrage d'un bruit blanc Gaussien : $n = \tilde{n} \star w$, où $\tilde{n} \sim \mathcal{N}(0, I)$. Ainsi, w est un filtre de blanchiment tel que $n \star w^{-1} \sim \mathcal{N}(0, I)$. Le processus de blanchiment peut être fait directement dans le domaine de Fourier par "étalement" du spectre de puissance.

3 Modèle et algorithmes

Deux approches pour considérer le bruit non blanc sont proposées. La première utilise le vrai modèle direct, et suppose que le spectre du bruit est connu. La seconde est plus réaliste pour une situation pratique, où le spectre de puissance est estimé directement sur les données.

3.1 blanchiment dans le domaine fréquentiel

On suppose que le filtre de blanchiment w^{-1} est connu, tel que le bruit vérifie $n = \tilde{n} \star w^{-1}$, $n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On re-écrit le

modèle direct (1)

$$\begin{aligned} M &= GX + n = GX + \tilde{n} \star w \\ M \star w^{-1} &= GX \star w^{-1} + \tilde{n} \end{aligned} \quad (3)$$

où les opérations de filtrage $\bullet \star w^{-1}$ sont appliquées à chaque ligne des matrices. Ainsi, si l'on connaît le filtre de blanchiment w^{-1} , le modèle direct "non blanc" peut se re-écrire comme un modèle classique corrompu par un bruit blanc. Avec (3), l'approche parcimonieuse pour estimer X s'écrit

$$\min_Z \frac{1}{2} \|M \star w^{-1} - GZ\Phi^* \star w^{-1}\|_{\text{fro}}^2 + \lambda \|Z\|_1$$

qui s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\min_Z \frac{1}{2} \|(M \star w^{-1} - GZ\Phi^* \star w^{-1})F\|_{\text{fro}}^2 + \lambda \|Z\|_1 \quad (4)$$

où F est la matrice orthogonale complexe associée à la transformée de Fourier.

Minimiser (4) avec un schéma du premier ordre tel que (F)ISTA [5, 6] nécessite de calculer le gradient du terme d'attache aux données

$$\frac{1}{2} \|(M \star w^{-1} - GZ\Phi^* \star w^{-1})F\|_{\text{fro}}^2 = \frac{1}{2} \|(\hat{M} - GZ\Phi^* F) \otimes \hat{w}^{-1}\|_{\text{fro}}^2 ,$$

où \hat{M} est la transformée de Fourier de chaque ligne de M et $\hat{M} \otimes \hat{w}^{-1}$ désigne la multiplication élément par élément de chaque ligne de \hat{M} par \hat{w}^{-1} . L'étape de gradient est alors suivie par le seuillage doux correspondant à l'opérateur proximal de la norme ℓ_1 . L'étape de descente de gradient s'écrit :

$$Z^{k+1/2} = Z^k + \frac{1}{L} G^T \left((\hat{M} - GZ^k \Phi^* F) \otimes |\hat{w}^{-1}|^2 \right) F^* \Phi$$

On peut remarquer que seul le spectre de puissance de w^{-1} apparaît. Le scalaire $L > 0$ dépend de la constante de Lipschitz de l'attache aux données et peut être majoré par $\|\Phi\|^2 \|G\|^2 \|\hat{w}^{-1}\|_{\infty}^2$. En utilisant FISTA [6], cette approche de blanchiment dans le domaine de Fourier est donnée dans l'algorithme 1, avec la relaxation donnée dans [7], qui assure la convergence des itérés.

Algorithm 1: FISTA avec blanchiment dans le domaine de Fourier

Input : $Z^{(0)}, Y^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, $|\hat{w}^{-1}|^2$,
 $L = \|\Phi\|^2 \|G\|^2 \|\hat{w}^{-1}\|_{\infty}^2$

repeat

$$\begin{cases} Z^{(k+1/2)} = \\ Y^{(k)} + \frac{1}{L} G^T \left((\hat{M} - GY^{(k)} \Phi^* F) \otimes |\hat{w}^{-1}|^2 \right) F^* \Phi; \\ Z^{(k+1)} = Z^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\lambda/L}{|Z^{(k+1/2)}|} \right)^+; \\ Y^{(k+1)} = Z^{(k+1)} + \frac{k+4}{k+5} (Z^{(k+1)} - Z^{(k)}); \end{cases}$$

until convergence;

3.2 blanchiment dans le domaine temps-fréquence

Reste le problème d'obtenir une estimation du spectre du bruit. En pratique, on peut utiliser un estimateur de Welch [8]

afin d'obtenir une estimation du spectre de puissance qui dépend de la taille de la fenêtre d'analyse temps-fréquence. En utilisant la même fenêtre que pour Φ , on note $|\tilde{w}|^2$ l'estimateur de Welch du spectre de puissance du bruit. On utilise ici une approximation classique largement utilisée en séparation de sources audio [9, 10]. Pour un signal $x \in \mathbb{R}^T$ et un noyau de convolution $w \in \mathbb{R}^T$, on note $\varphi_{k,f}$ les atomes temps-fréquence constituant Φ , la convolution peut alors être approchée dans le domaine temps-fréquence par le produit à valeur complexe

$$\langle w \star x, \varphi_{k,f} \rangle \simeq \tilde{w}[f] \langle x, \varphi_{k,f} \rangle. \quad (5)$$

Cette approximation est étudiée dans [11, Lemme 1]. On pourrait vouloir utiliser cette approximation pour simplifier l'évaluation du gradient (3.1). Cependant, une telle approximation dans ISTA peut donner un algorithme divergent, l'erreur commise pouvant ne pas être sommable [5].

On propose alors de considérer la fonctionnelle suivante, où la convolution est directement approchée dans le domaine temps-fréquence

$$\min_Z \frac{1}{2} \| ((M\Phi) \otimes \tilde{w}^{-1}) \Phi^* - G(Z \otimes \tilde{w}^{-1}) \Phi^* \|_{\text{fro}}^2 + \lambda \| Z \|_1. \quad (6)$$

Où l'on rappelle que la notation $\bullet \otimes w^{-1}$ désigne la multiplication élément par élément de chaque ligne de \bullet par w^{-1} . Ainsi, avec le changement de variables $\tilde{M} = ((M\Phi) \otimes \tilde{w}^{-1}) \Phi^*$ et $\tilde{Z} = Z \otimes \tilde{w}^{-1}$, on a

$$\min_Z \frac{1}{2} \| \tilde{M} - G\tilde{Z} \Phi^* \|_{\text{fro}}^2 + \lambda \| \tilde{Z} \|_{\tilde{w};1}, \quad (7)$$

avec $\| \tilde{Z} \|_{\tilde{w};1} = \sum_{k,f} w_f |\tilde{Z}_{k,f}|$. Minimiser (6) revient alors à un simple problème de Basis Pursuit Denoising avec une norme ℓ_1 pondérée. L'étape de gradient est alors une descente de gradient classique, comme pour un problème corrompu par un bruit blanc (1), avec une matrice pré-blanchie dans le domaine temps-fréquence \tilde{M} . L'étape proximale est un seuillage doux qui dépend de la quantité de bruit dans chaque bande de fréquence. Le choix de FISTA pour minimiser (7) donne l'algorithme 2. En pratique $\tilde{w}^{-1} = (1/\sqrt{(|w|^2)_1}, \dots, 1/\sqrt{(|w|^2)_{Q_f}})$, $|w|^2$ est l'estimation du spectre de puissance donnée par l'estimateur de Welch [8]. Les sources sont ensuite synthétisées dans le domaine temporel $X^{\text{est}} = (Z \otimes \tilde{w}) \Phi^*$.

Algorithm 2: FISTA avec blanchiment temps-fréquence

Input : $Z^{(0)}, Y^{(0)} \in \mathbb{R}^N, \tilde{w}^{-1}, L = \|\Phi\|^2 \|G\|^2$
repeat
 $Z^{(k+1/2)} = Y^{(k)} + \frac{1}{L} G^T (\tilde{M} - GY^{(k)} \Phi^*) \Phi;$
 $Z^{(k+1)} = Z^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\tilde{w} \lambda / L}{|Z^{(k+1/2)}|} \right)^+$
 $Y^{(k+1)} = Z^{(k+1)} + \frac{k+4}{k+5} (Z^{(k+1)} - Z^{(k)})^+;$
until convergence;

Initialisé par 0, la première étape de cet algorithme peut être vu comme une soustraction spectrale [12].

4 Expériences numériques

Contexte applicatif On explore ici les effets du bruit Gaussien non blanc dans le contexte de l'imagerie fonctionnelle cérébrale en utilisant les signaux M/EEG. L'imagerie M/EEG donne des indications sur l'activité cérébrale à l'échelle de la milliseconde de façon non invasive. On doit pour cela résoudre le problème inverse bio-électromagnétique, qui est un problème inverse mal posé de grande dimension. Il requiert donc une régularisation adéquate. Comme il est naturel de supposer que seul un ensemble limité du cerveau est actif pour une tâche cognitive donnée, les configurations de sources focales parcimonieuses sont usuellement favorisées à l'aide d'a priori convexes parcimonieux [13].

Pour ce problème, le bruit est connu pour être non blanc avec une rapport signal à bruit (SNR) qui dépend de la fréquence [14]. L'amplitude du spectre de puissance est usuellement modélisé comme une fonction en "1/f" : l'énergie du bruit décroît comme l'inverse de la fréquence.

Protocole de comparaison On propose de comparer cinq stratégies afin de résoudre le problème inverse M/EEG en présence de bruit rose :

1. Un "vrai blanchiment" dans le domaine de Fourier, en utilisant le vraie spectre du bruit en $1/f$. Cela correspond à l'algorithme 1. Cette méthode est appelée *TrueWhite* dans les figures et donne un résultat oracle pour comparer les autres approches.
2. Un blanchiment temps-fréquence avec un estimateur de Welch, correspondant à l'algorithme 2. Cette méthode est appelée *TFWhiteEst* dans les figures.
3. Un "vraie pré-blanchiment" dans le domaine de Fourier puis minimisation de l'équation (2). La matrice M est blanchie dans le domaine de Fourier et un terme d'attache aux données ℓ_2 classique est utilisé dans la fonction coût. Cette méthode est appelée *PreWhiteTrue* dans les figures et donne un résultat oracle pour les approches par pré-blanchiment.
4. Un pré-blanchiment dans le domaine temps-fréquence avec un estimateur de Welch puis minimisation de l'équation (2). Cete méthode est appelée *PreWhiteEst* dans les figures.
5. Une approche de référence sans aucun (pré-)blanchiment. Cette méthode est appelée *LI* dans les figures.

L'estimation du spectre du bruit par la méthode de Welsh se fait sur une portion de l'observation M où seul le bruit intervient.

Protocole de simulation On génère des signaux tels que $T = 1024$ échantillons, Φ est une matrice de Gabor avec une fenêtre de Hann de longueur 64 échantillons et un chevauchement de 75%. La matrice $G \in \mathbb{R}^{30 \times 200}$ est générée de manière aléatoire avec des colonnes très corrélées de sorte que la corrélation entre les colonnes i et j est $0.95^{|i-j|}$. Z a 10 lignes non nulles, et chaque ligne non nulle est un vecteur parcimonieux de coefficients (de 70% à 90% de coefficients nuls). n est un bruit rose (spectre de puissance en $1/f$).

Les résultats sont résumés dans la figure 1. Pour chaque méthode, la qualité de l'estimation est évaluée en regardant le rapport signal à bruit. Le signal original est ici connu, et l'on utilise le paramètre de régularisation donnant le meilleur SNR pour chaque méthode.

Comme attendu, toutes les stratégies qui prennent en compte la couleur du bruit obtiennent de bien meilleurs résultats que la méthode $L1$ qui traite le bruit comme blanc. De même, l'approche utilisant le vrai blanchiment dans le domaine de Fourier donne les meilleurs résultats, mais est inutilisable en pratique (le véritable spectre du bruit étant inconnu). La stratégie proposée $TFWhiteEst$ donne alors les meilleurs résultats pratiques. Cette approche fonctionne d'autant mieux que le SNR est bas et que Z est le moins parcimonieux. Ceci correspond aux cas réels rencontrés dans les applications, où le SNR est bas et le nombre de sources augmente avec la complexité des expériences cognitives. De plus, cette méthode fait mieux que le véritable pré-blanchiment, et justifie donc de prendre en compte le profil du bruit dans le problème direct.

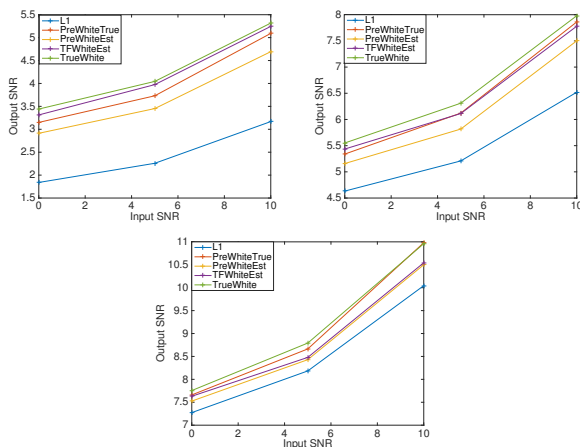


FIGURE 1 – De bas en haut : du signal le moins parcimonieux au plus parcimonieux (resp. 70%, 80% et 90% de coefficients nuls sur chaque ligne non nulle).

5 Conclusion

La contribution principale est de proposer une approche simple et justifiée pour prendre en compte les bruits Gaussiens non blanc dans les approches de régressions parcimonieuses. Testée sur une application de neuroscience, les résultats montrent clairement les bénéfices d'une telle approche.

Par la suite, les travaux se concentreront sur l'extension aux régularisations structurés ainsi qu'aux régularisations non convexes tels que SCAD [15] pour lesquels l'opérateur proximal existe.

Références

[1] A. Gramfort, D. Strohmeier, J. Haueisen, M. S. Hämäläinen, and M. Kowalski, "Time-frequency mixed-norm estimates : sparse M/EEG imaging with non-stationary source activations," *NeuroImage*, vol. 70, pp. 410–422, 2013.

[2] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 20, no. 1, pp. 33–61, 1998.

[3] A.-K. Seghouane and Y. Saad, "Prewhitening high-dimensional fMRI data sets without eigendecomposition," *Neural comp.*, vol. 26, no. 5, pp. 907–919, 2014.

[4] A. S. Dalalyan, M. Hebiri, K. Meziani, and J. Salmon, "Learning heteroscedastic models by convex programming under group sparsity," in *Proc. ICML*, 2013.

[5] P. L. Combettes and V. R. Wajs, "Signal recovery by proximal forward-backward splitting," *Multiscale Model. Sim.*, vol. 4, no. 4, pp. 1168–1200, Nov. 2005.

[6] A. Beck and M. Teboulle, "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems," *SIAM J. Imag. Sci.*, vol. 2, no. 1, pp. 183–202, 2009.

[7] A. Chambolle and C. Dossal, "On the convergence of the iterates of "fista".," *Preprint hal-01060130*, September, 2014.

[8] P. Welch, "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra : A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. 15, pp. 70–73, 1967.

[9] S. Winter, W. Kellermann, H. Sawada, and S. Makino, "MAP-based underdetermined blind source separation of convolutive mixtures by hierarchical clustering and ℓ_1 -norm minimization," *EURASIP J. Advances Sig. Proc.*, vol. 2007, 2007, article ID 24717.

[10] H. Sawada, S. Araki, R. Mukai, and S. Makino, "Grouping separated frequency components by estimating propagation model parameters in frequency-domain blind source separation," *IEEE Trans. on Audio, Speech, Lang. Proc.*, vol. 15, no. 5, pp. 1592–1604, July 2007.

[11] M. Kowalski, E. Vincent, and R. Gribonval, "Beyond the narrowband approximation : Wideband convex methods for under-determined reverberant audio source separation," *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Proc.*, vol. 18, no. 7, pp. 1818–1829, 2010.

[12] K. Lebart, J.-M. Boucher, and P. Denbigh, "A new method based on spectral subtraction for speech dereverberation," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 87, no. 3, pp. 359–366, 2001.

[13] S. Haufe, V. V. Nikulin, A. Ziehe, K.-R. Müller, and G. Nolte, "Combining sparsity and rotational invariance in EEG/MEG source reconstruction," *NeuroImage*, vol. 42, no. 2, pp. 726–738, Aug. 2008.

[14] R. R. Ramirez, B. H. Kopell, C. R. Butson, B. C. Hiner, and S. Baillet, "Spectral signal space projection algorithm for frequency domain meg and eeg denoising, whitening, and source imaging," *NeuroImage*, vol. 56, no. 1, pp. 78–92, 2011.

[15] J. Fan and R. Li, "Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties," *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 96, no. 456, pp. 1348–1360, 2001.