

Méthodes numériques pour le problème direct et l'analyse de sensibilité en tomographie d'impédance électrique

Alexandre FOUCHARD^{1,2}, Stéphane BONNET¹, Lionel HERVE¹, Olivier DAVID²

Université Grenoble Alpes, F-38000 Grenoble, France

¹ CEA, Leti, MINATEC Campus, F-38054 Grenoble Cedex 9, France

² Grenoble Institut des Neurosciences, Bât. E.J. Safra, Chemin Fortuné Ferrini, 38700 La Tronche, France

alexandre.fouchard@centraliens-lyon.net

Résumé – Les modèles mixtes éléments finis – volumes finis offrent une grande souplesse pour l'approximation numérique des problèmes de diffusion et la prise en compte des conditions aux limites. Nous proposons ici une méthode « finite volume element » appliquée à la tomographie d'impédance électrique. Elle assure la conservation locale de la densité de courant et fournit un cadre naturel pour dériver une analyse de sensibilité. Des résultats d'estimation de distributions de conductivité électrique sur données expérimentales *in vitro* sont présentés.

Abstract – Mixed frameworks involving finite elements and finite volumes provide convenient tools for the numerical approximation of diffusive transport and boundary condition enforcement. In this work, a finite volume element method is applied to electrical impedance tomography. It ensures local current density conservation and provides a natural framework for the sensitivity analysis. Conductivity reconstructions against *in vitro* experimental data are shown.

1 Introduction

Initialement développée pour la prospection géophysique et le contrôle non destructif industriel, la tomographie d'impédance électrique (EIT pour *electrical impedance tomography*) est une modalité d'imagerie des tissus mous qui utilise la signature spectrale électrique des différents matériaux comme source de contraste. Cette technique non invasive consiste à estimer la distribution des propriétés électriques internes (conductivité et permittivité) à partir de mesures surfaciques d'impédances de transfert. Elle trouve des applications biomédicales pour le monitoring de la ventilation pulmonaire et la détection du cancer [1].

Ce papier aborde la problématique de la méthodologie de prédiction des données et d'analyse de sensibilité, préalables à la reconstruction d'images en EIT. Des méthodes éléments finis (FEM pour *finite element method*) ont été appliquées avec succès, mais elles nécessitent des ressources numériques conséquentes pour approximer la diffusion du courant au sein des structures étudiées et déduire une matrice Jacobienne [2]. Ceci n'est pas envisageable dans le cadre de notre étude de l'imagerie de structures nerveuses avec des maillages denses géométriquement réalistes. Un cadre volumes finis a également été mis en œuvre pour aborder des modèles à grande échelle : 1. dans le cas physiquement peu réaliste d'électrodes ponctuelles en EIT [3], et son analogue en tomographie optique diffuse [4]; 2. avec un modèle adéquat d'électrodes mais sur des maillages structurés [5]. L'approche proposée repose sur l'adaptation d'une méthode mixte éléments finis – volumes finis (FVE pour *finite volume element*) [6], pour prendre en compte

les spécificités de la formulation faible de l'EIT, permettre l'utilisation de maillages déstructurés adaptés à la géométrie des milieux étudiés, et garantir la conservation locale de la densité de courant, utilisée dans les calculs de sensibilité.

Dans la section suivante, le modèle FVE de l'EIT est introduit. Dans la troisième section, une analyse de sensibilité par FVE est décrite. La quatrième section présente la validation des développements numériques et les résultats d'estimation paramétrique de distributions de conductivité électrique.

2 Modèle de l'EIT par FVE

2.1 Modèle complet d'électrodes

La formulation la plus précise du problème direct en EIT est donnée par le modèle d'électrodes complet. Suivant l'approximation quasi-statique à basses fréquences, il correspond à l'équation de Poisson, avec des conditions de Neumann pour les électrodes d'injection de courant, et des conditions de Robin pour tenir compte à la fois de l'effet court-circuit des électrodes et de l'impédance de contact à la jonction avec le tissu [7].

Des électrodes $\{E_e\}_{e=1}^E$ sont apposées sur la surface $\partial\Omega$ du milieu étudié Ω . Les données d'entrée du problème direct sont : la distribution spatiale de conductivité électrique $\{\sigma(x), x \in \Omega\}$, les impédances de contact $\{z_e\}_{e=1}^E$ et le schéma d'injection de courant $\mathbf{i}_e = (i_1, \dots, i_E)^T \in \mathbb{R}^E$, de moyenne nulle. L'objectif est de trouver le potentiel électrique $\{v(x)\}$ et les potentiels d'électrodes $\mathbf{v}_e = (v_1, \dots, v_E)^T \in \mathbb{R}^E$, de moyenne nulle, tels qu'ils satisfassent l'Eqn. (1), avec \mathbf{n} le vecteur normal sortant pour une surface fermée.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (-\sigma \nabla v) = 0 & \forall x \in \Omega \\ v + z_e \sigma \nabla v \cdot \mathbf{n} = v_e & \forall x \in E_e \\ \int_{E_e} \sigma \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = i_e & \forall e = 1 \dots E \\ \sigma \nabla v \cdot \mathbf{n} = 0 & \forall x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{e=1}^E E_e \end{cases} \quad (1)$$

L'estimation des paramètres s'effectue par des méthodes d'optimisation à partir de la connaissance de la matrice de sensibilité \mathbf{S} , traduisant le lien entre les mesures de tension et les paramètres de conductivité. La dimension de la matrice \mathbf{S} en FEM est proportionnelle au nombre d'éléments du maillage, ce qui peut être prohibitif pour des calculs efficaces.

2.2 Cadre FVE

L'approche FVE superpose au maillage primaire de la FEM un maillage dual composé de cellules de Voronoï – les volumes de contrôle (Figure 1a). Une modélisation de v linéaire par morceaux (pwl) par éléments du maillage est considérée. L'estimation des paramètres s'effectue sur les cellules duales, avec une discrétisation de σ constante par morceaux (pwc). Ces hypothèses de travail sont adaptées pour réduire les coûts de mémoire et de calcul.

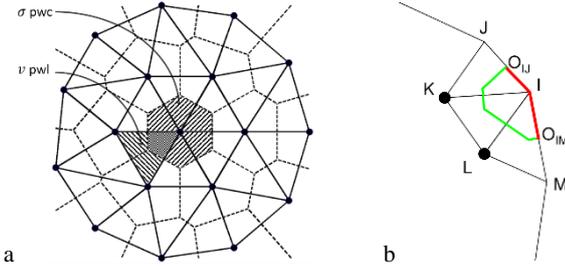


Figure 1 : Hypothèses de la FVE en EIT :
a. maillage primaire (resp. dual) en traits pleins (resp. pointillés) associé aux nœuds du maillage ;
b. Fermeture de la surface Σ_i , en vert, de la cellule Π_i par les segments de la surface du bord, en rouge.

La démarche FVE consiste à traduire la conservation de la densité de courant $\mathbf{j} = -\sigma \nabla v$ pour chaque cellule de Voronoï Π_i , de surface Σ_i associée au nœud i . Sous forme intégrale, avec la formule de Green, $0 = \int_{\Pi_i} \nabla \cdot \mathbf{j} \, d\Omega = \oint_{\Sigma_i} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$, cela signifie que le flux net de \mathbf{j} sortant de chaque cellule de Voronoï est nul. Sous cette forme, la définition des valeurs de \mathbf{j} , et notamment σ , au niveau des interfaces entre cellules duales est nécessaire.

2.3 Approximation numérique

Afin de simplifier le traitement numérique, l'approche suivie ici utilise la transformation de Helmholtz $\psi = \sqrt{\sigma} v$. L'équation elliptique se réécrit sous le format $(-\Delta + q)\psi = 0$, avec $q = \frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$ ($\sigma > 0$), pour lequel la conductivité apparaît comme une perturbation du Laplacien Δ [8].

L'intégration sur une cellule duale donne, $0 = \int_{\Pi_i} -\nabla \cdot (\nabla \psi) \, d\Omega + \int_{\Pi_i} \frac{\psi}{\sqrt{\sigma}} \nabla \cdot (\nabla \sqrt{\sigma}) \, d\Omega$. Pour un maillage suffisamment fin, le facteur $\frac{\psi_i}{\sqrt{\sigma_i}}$ est sorti de la seconde intégrale : l'Eqn. (2) est obtenue.

$$0 = \int_{\Pi_i} -\nabla \cdot (\nabla \psi) \, d\Omega + \frac{\psi_i}{\sqrt{\sigma_i}} \int_{\Pi_i} \nabla \cdot (\nabla \sqrt{\sigma}) \, d\Omega \quad (2)$$

La démarche FVE utilise ensuite une approximation éléments finis de ψ . Une base de fonctions linéaires par morceaux $\boldsymbol{\varphi}_n = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_n})^T$ est considérée (N_n désigne le nombre de nœuds) de telle sorte que $\psi \sim \boldsymbol{\Psi}_n^T \boldsymbol{\varphi}_n$ avec $\boldsymbol{\Psi}_n$ le vecteur des valeurs nodales de ψ .

L'opérateur numérique Laplacien L est introduit, avec $L_{ij} = \int_{\Pi_i} \Delta \varphi_j \, d\Omega$. Par des considérations géométriques, $L_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{d_{ij}}$, d_{ij} étant la distance qui sépare les nœuds i et j , et Σ_{ij} la surface signée de la cellule de Voronoï séparant ces nœuds [4]. L est symétrique et traduit le principe de réciprocité au niveau du flux de \mathbf{j} .

Pour un volume de contrôle fermé, l'Eqn. (3) est obtenue de l'Eqn. (2) en utilisant la formule de Green.

$$-\oint_{\Sigma_i} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \frac{\psi_i}{\sqrt{\sigma_i}} \oint_{\Sigma_i} \nabla \sqrt{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (3)$$

Cela correspond à $-L_{ij} \psi_j + \frac{L_{ik} \sqrt{\sigma_k}}{\sqrt{\sigma_i}} \psi_i = 0$, $\forall i$, avec la notation d'Einstein pour les indices répétés.

Pour les nœuds situés à la frontière du domaine, les cellules duales ne sont plus fermées, et la dérivation ci-dessus doit être complétée : les facettes du bord sont considérées (Figure 1b). Dans la plupart des cas, en dehors des électrodes, le flux de densité de courant est nul et l'Eqn. (3) est utilisée.

Sur l'électrode E_e , les conditions aux limites se traduisent par $(-\nabla \psi + \frac{\nabla \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \psi) \cdot \mathbf{n} = \frac{v_e - v}{z_e \sqrt{\sigma}}$; puis, en intégrant sur l'intersection entre la surface de la cellule duale et l'électrode $\Sigma_i \cap E_e$, i.e. un segment en 2D ou une surface en 3D, avec un maillage suffisamment fin, $\int_{\Sigma_i \cap E_e} -\nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \frac{\psi_i}{\sqrt{\sigma_i}} \int_{\Sigma_i \cap E_e} \nabla \sqrt{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Sigma_i \cap E_e} \frac{v_e - v}{z_e \sqrt{\sigma}} \, d\Gamma$.

Ainsi, dans tous les cas, le flux sur les cellules duales s'exprime par l'Eqn. (4), avec pour toute quantité géométrique G , $\|G\|$ désignant sa mesure (longueur, surface ou volume).

$$0 = -L_{ij} \psi_j + \left(\frac{L_{ik} \sqrt{\sigma_k}}{\sqrt{\sigma_i}} + \frac{\|\Sigma_i \cap E_e\|}{z_e \sigma_i} \right) \psi_i - \frac{\|\Sigma_i \cap E_e\|}{z_e \sqrt{\sigma_i}} v_e \quad (4)$$

De plus, les conditions d'injection de courant se traduisent par $i_e = \int_{\Sigma_i \cap E_e} \frac{v_e - v}{z_e} \, d\Gamma$, soit l'Eqn. (5).

$$i_e = \sum_{i \in E_e} \left(-\frac{\|\Sigma_i \cap E_e\|}{z_e \sqrt{\sigma_i}} \psi_i \right) + \frac{\|E_e\|}{z_e} v_e \quad (5)$$

2.4 Matrice d'admittance

La considération de l'ensemble des nœuds du maillage conduit à l'expression du problème direct sous forme matricielle, Eqn. (6). $\mathbf{0}_{N_n}$ est le vecteur nul de dimension spécifiée, et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{(N_n+E) \times (N_n+E)}$ la matrice d'admittance avec ses différents blocs : $\mathbf{Y}_M(\sigma) = -\mathbf{L} + \text{diag}(\sigma^{-\frac{1}{2}} \circ \mathbf{L}\sigma^{\frac{1}{2}})$ (\circ produit d'Hadamard) ; $\mathbf{Y}_Z = \text{diag}(\frac{\|\Sigma_i \cap E_{e_i}\|}{z_e \sigma_i})$; $[\mathbf{Y}_W]_{ie} = -\frac{\|\Sigma_i \cap E_{e_i}\|}{z_e \sqrt{\sigma_i}}$ et $\mathbf{Y}_D = \text{diag}(\frac{\|E_{e_i}\|}{z_e})$.

$$\mathbf{Y} \begin{bmatrix} \Psi_n \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_M(\sigma) + \mathbf{Y}_Z & \mathbf{Y}_W \\ \mathbf{Y}_W^T & \mathbf{Y}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_n} \\ \mathbf{i}_e \end{bmatrix} \quad (6)$$

La transformation de Helmholtz utilisée permet de ne faire apparaître les paramètres de conductivité que sur la diagonale du bloc supérieur, ce qui facilite l'assemblage et la mise à jour de \mathbf{Y} lors d'un processus de reconstruction itératif.

L'inversion de \mathbf{Y} , creuse et symétrique définie positive, s'effectue par une décomposition de Choleski, et permet la résolution du problème direct.

3 Analyse de sensibilité par FVE

L'analyse de sensibilité établit la manière dont chaque volume élémentaire du milieu étudié contribue aux tensions mesurées. Selon l'approche adjointe, la sensibilité de la mesure u_{sd} lorsque la source est s et le détecteur d en fonction de la variation de conductivité σ_c d'un volume de contrôle Ω_c s'exprime par l'Eqn. (7), avec I le courant injecté dans le milieu [9].

$$\frac{\partial u_{sd}}{\partial \sigma_c} = \frac{-1}{I} \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{j}^s \cdot \mathbf{j}^d}{\sigma^2} d\Omega \quad (7)$$

Elle fait intervenir la densité de courant dans les configurations source et détecteur, indexées s et d (Figure 2). Traditionnellement, Ω_c est choisi égal à un élément du maillage en FEM au premier ordre ; le calcul de sensibilité est alors simplifié avec $\frac{\mathbf{j}^s \cdot \mathbf{j}^d}{\sigma^2}$ constant.

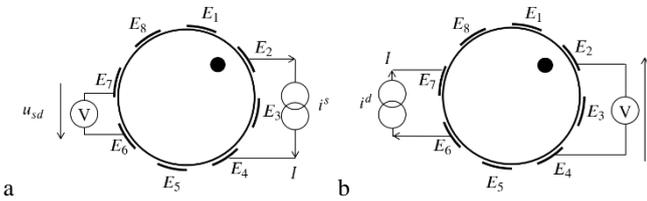


Figure 2 : Analyse de sensibilité en EIT ; a. configuration source correspondant à la situation expérimentale ; b. configuration virtuelle détecteur où l'injection et la mesure ont été interverties.

L'idée sous-jacente à l'approche FVE consiste à choisir pour Ω_c les cellules de Voronoï, qui constituent des domaines d'influence naturels pour chaque nœud du domaine d'étude.

Un lien peut être effectué entre les sensibilités par cellules duales S^d et primales S^p . Il permet le calcul des premières à partir des secondes et simplifie le processus d'inversion en FEM [10].

Ce processus est particulièrement coûteux. Dans ce travail, nous proposons d'effectuer une approximation supplémentaire pour éviter le calcul des coefficients S^p et déterminer directement les quantités S^d . Elle consiste à considérer les champs électriques constants par cellule de Voronoï. Ces derniers sont calculés aux nœuds du maillage.

Le calcul de sensibilité de l'Eqn. (7) se réduit alors à l'Eqn. (8), où \mathbf{j}_i^s et \mathbf{j}_i^d désignent l'approximation de la densité de courant au nœud i calculée dans les configurations source et détecteur respectivement.

$$\mathbf{S}_{sd,i}^d = \frac{\partial u_{sd}}{\partial \sigma_i} = \frac{-\|\Pi_i\| \mathbf{j}_i^s \cdot \mathbf{j}_i^d}{I \sigma_i^2} \quad (8)$$

Cette démarche conduit à une complexité de calcul réduite en termes de mémoire et d'assemblage. En effet, la taille de $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{E^2 \times N_n}$ est proportionnelle au nombre de nœuds du maillage et non à celui du nombre d'éléments N_k ; en pratique, $N_k < N_n$ d'un facteur 2 ou plus, notamment en 3D. Par rapport à une formulation analogue tirée de la FEM, la résolution du problème direct par FVE apporte une description de la densité de courant, ingrédient essentiel du calcul de sensibilité, fidèle à la physique du problème, en assurant sa conservation locale entre les cellules de Voronoï.

En pratique, les sensibilités pour chaque configuration de mesure sont déterminées en utilisant une reconstruction de gradients par moindres carrés, à partir du champ de potentiel interne [4]. Les densités de courant source et détecteur ainsi déterminées peuvent être directement exploitées dans un cadre de transport pour estimer des paramètres de conductivité [11]. La matrice de sensibilité peut également être assemblée. La dérivation FVE bénéficie alors à l'ensemble des algorithmes d'inversion déjà développés pour l'EIT [1].

4 Résultats

Une librairie sous Matlab a été développée pour implémenter le traitement par FVE de l'EIT. Des expériences *in vitro* en solution saline ont été réalisées, pour valider ces développements [12]. Sans perte de généralités aux méthodes décrites ci-dessus, seuls des modèles 2D sont présentés par la suite.

L'implémentation a été validée : d'une part, par rapport à des solutions analytiques, sur des rectangles de tailles et de paramètres variables avec des électrodes disposées sur des faces opposées, avec des résultats exacts à la précision machine ; d'autre part, en comparaison avec une implémentation FEM, qui montre une cohérence globale malgré les hypothèses de travail différentes.

4.1 Problème direct et analyse de sensibilité

Un fantôme circulaire avec 14 électrodes régulièrement réparties est considéré avec une inclusion circulaire (Figure 3). La distribution de potentiel, et les lignes de courant associées sont prédites. Fidèlement aux attentes, les lignes de champ se concentrent au niveau des zones de plus fortes conductivités.

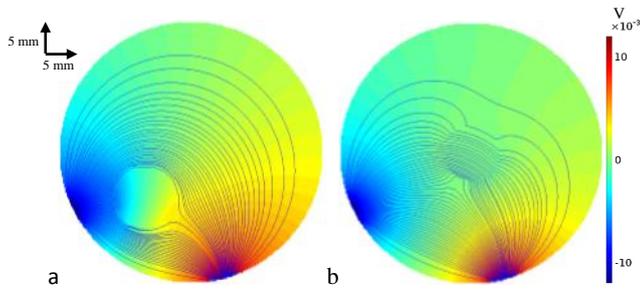


Figure 3 : Champ de potentiel (en volt) et lignes de courant déterminés par FVE avec la présence d’une inclusion ; a. décentrée de contraste $\ll 1$; b. centrée de contraste $\gg 1$.

Avec un contraste faible et une inclusion localisée, l’approximation linéaire liée à la matrice de sensibilité doit être respectée, i.e. $\delta \mathbf{u} = \mathbf{S} \delta \boldsymbol{\sigma}$. Pour un contraste de 1%, l’erreur relative entre $\delta \mathbf{u}$ et $\mathbf{S} \delta \boldsymbol{\sigma}$ par FVE présente une valeur moyenne de 0.6 % avec une déviation standard de l’ordre de $3 * 10^{-3}$. Ces valeurs sont comparables à celles obtenues en FEM, avec une déviation standard d’un ordre de grandeur inférieur pour cette dernière. Ce constat se justifie par les approximations effectuées lors de l’analyse de sensibilité en FVE.

4.2 Reconstruction sur données *in vitro*

Un exemple de reconstruction *in vitro* est présenté. L’inversion utilise une régularisation de Tikhonov $\widehat{\delta \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{S}^T + h^2 \mathbf{I}_{E^2})^{-1} \delta \mathbf{u}$, avec \mathbf{I}_{E^2} la matrice identité et h un hyper-paramètre déterminé par validation croisée généralisée [13]. Deux situations sont mises en regard : une résolution par FVE et par FEM (Figure 4).

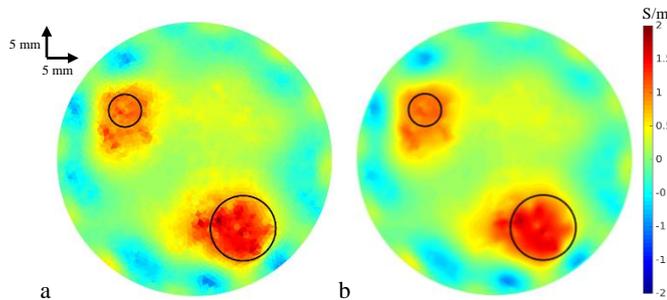


Figure 4 : Reconstruction différentielle 2D sur données *in vitro*, inclusions en noir, avec un bruit estimé à 5 % ; a. FEM, b. FVE.

Qualitativement, les deux reconstructions obtenues sont similaires. Les deux inclusions, de diamètre 1/4 ou 1/8 de celui du fantôme, sont détectées avec une résolution spatiale faible inhérente au caractère mal posé du problème inverse en EIT.

5 Conclusion

Nous avons proposé d’adresser la résolution du problème direct et l’analyse de sensibilité en EIT par une technique mixte éléments finis – volumes finis. Ce point de vue a permis d’estimer des distributions de conductivité à partir de données expérimentales *in vitro*. Cette approche trouve son intérêt dans un contexte biomédical où les maillages utilisés sont relativement denses (plusieurs millions d’éléments).

Les approximations effectuées lors de la dérivation de la méthode ne semblent pas affecter les résultats d’estimation. Cette méthode permet en outre de garantir la conservation locale de la densité de courant, grandeur physique essentielle en EIT.

Les résultats présentés ici se limitent à des modèles 2D. Ils permettent de valider les développements numériques et l’intérêt de la méthode. Des premières expériences sur des géométries 3D ont été menées et confirment ces résultats. Les inclusions utilisées correspondent à des modèles simplifiés de faisceaux nerveux en vue d’une application *in vivo*.

Les possibilités d’une telle approche sont multiples en ce qu’elle peut s’appliquer à l’ensemble des algorithmes d’inversion déjà adaptés à l’EIT, tout en diminuant les coûts de calcul associés (mémoire, temps d’assemblage). En particulier, elle devrait faciliter le développement de méthodes d’imagerie EIT multi-spectrale fondées sur des approches matériaux.

Références

- [1] J.K. Seo and E. J. Woo, “Electrical Impedance Tomography”, in *Nonlinear Inverse Problems in Imaging*, John Wiley & Sons, 2013
- [2] W. R. B. Lionheart, “EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments,” *Physiol. Meas.*, 25(1), p. 125, 2004
- [3] G. Dong et al., “The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem,” *IEEE Trans. On Magn.*, 41(5), pp. 1468–1471, 2005
- [4] L. Hervé et al., “Multi-wavelength and time-domain diffuse optical tomography data processing by using a material basis and Mellin-Laplace transform,” in *SPIE BiOS*, 2014
- [5] T. De Marco et al., “EIT Forward Problem Parallel Simulation Environment with Anisotropic Tissue and Realistic Electrode Models”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 59(5) 2012
- [6] S. F. McCormick, “The Finite Volume Element Method” in *Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, 1989
- [7] E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson, “Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Tomography Based on The complete electrode Model”, *SIAM*, 52(4), pp. 1023-1040, 1992
- [8] G. Uhlmann, “Electrical impedance tomography and Calderón’s problem,” *Inverse Probl.*, 25(12), 2009
- [9] D. B. Geselowitz, “An Application of Electrocardiographic Lead Theory to Impedance Plethysmography,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, BME-18(1), pp. 38–41, 1971
- [10] B. M. Graham and A. Adler, “A nodal Jacobian inverse solver for reduced complexity EIT reconstructions,” *Int J Inf. Syst Sci*, 2, 2006
- [11] A. Fouchard et al., “Inversion without Effective Jacobian Calculations in Electrical Impedance Tomography”, *Journal of Physics: conf. series*, 542, 2014
- [12] A. Fouchard et al., “Modular architecture of a Multi-Frequency Electrical Impedance Tomography system: design and implementation,” in *IEEE EMBC*, 2014
- [13] P. C. Hansen, “Regularization Tools version 4.0 for Matlab 7.3,” *Numer. Algorithms*, 46(2), pp. 189–194, 2007