

# Analyse des performances du décodage conjoint source-relais pour un protocole Decode-and-Forward bruité

Haïfa FARÈS<sup>1</sup>, Charlotte LANGLAIS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Rennes 1, INRIA-IRISA UMR CNRS 6074 6 rue Kerampont Lannion 22300

<sup>2</sup>Institut Mines-Télécom, Télécom Bretagne, CNRS Lab-STICC UMR 3192  
Département Electronique, Technopole Brest Iroise, CS 83818 29238 Brest Cedex 3  
haifa.fares@enssat.fr, charlotte.langlais@telecom-bretagne.eu

**Résumé** – Dans ce papier, nous proposons d’étudier un schéma de décodage conjoint source-relais itératif pour un réseau coopératif à trois noeuds appliquant le protocole *decode-and-forward* (DF). Ce schéma propose d’exploiter la corrélation entre l’information provenant de la source et celle renvoyée par le relais. Ce schéma de décodage novateur permet d’améliorer les performances du système coopératif par rapport à un schéma de décodage sans traitement particulier des erreurs apportées par le relais, pour un canal source-relais dégradé. Des bornes de probabilité d’erreur sont développées et confrontées aux résultats de simulation afin d’évaluer l’apport de ce schéma de décodage novateur, en particulier sur le phénomène de propagation des erreurs spécifique au protocole DF.

**Abstract** – In this paper, we propose to study an iterative joint source-relay channel decoding scheme that exploits the correlation between the messages sent by the source and the relay in the Decode-and-Forward (DF) protocol. It allows to alleviate the error propagation phenomenon proper to this protocol and consequently, to achieve enhanced end-to-end performance. Performance comparison with a decoding scheme that does not take into account the errors at the relay is conducted, especially under degraded source-relay channel conditions. We derive an analytical upper bound on the probability of error at the destination, which is verified by simulation results.

## 1 Introduction

Malgré sa simplicité et ses bonnes performances lorsque la liaison source-relais est de bonne qualité, le protocole *decode-and-forward* (DF) souffre du phénomène de propagation d’erreurs. En effet, suite à l’introduction d’erreurs au niveau du décodage du relais, l’ordre de diversité du protocole DF peut être dégradé de manière significative. La performance au niveau du relais dominera ainsi la performance globale du système coopératif et nous assistons au phénomène typique de plancher d’erreur sur la probabilité d’erreur binaire [1]. Une solution triviale est de restreindre l’utilisation du protocole DF à des transmissions fiables entre source et relais. D’autres travaux qui abordent des solutions pour combattre ce phénomène ont été énumérées dans [2]. Un autre point de vue consiste à considérer les messages erronés, diffusés par le relais, comme de l’information corrélée avec celle envoyée directement par la source. Le problème de décodage conjoint de sources corrélées [3] est par conséquent directement transposable à cet exemple de réseau coopératif afin d’améliorer la fiabilité du système de bout en bout. Il est possible donc de mettre en place un processus itératif qui vise à décoder l’information, puis à estimer et exploiter la corrélation observée entre les messages provenant de la source et du relais. Dans [4], les auteurs ont proposé d’appliquer un tel principe de décodage à un système coopératif utilisant le protocole DF au niveau du relais. Cependant,

l’étude diffère principalement de celle présentée dans ce papier en deux points principaux. Premièrement, aucun code turbo distribué n’est considéré dans notre étude. Le seul processus itératif est celui relatif au décodage conjoint des messages provenant de la source et du relais. Deuxièmement, dans [4], il est indiqué que la qualité du canal source-relais doit être transmise à la destination de sorte que la probabilité d’erreur sur le canal source-relais puisse ainsi être calculée. Dans ce papier, le degré de corrélation, qui dépend aussi de la qualité du canal de source-relais, est estimé dynamiquement dans le processus itératif du décodage conjoint source-relais. Ainsi, aucune information supplémentaire sur les canaux n’est nécessaire à la destination. Par conséquent, cette approche combine les avantages des protocoles de coopération : DF et *compress-and-forward* (CF). Cependant, le protocole proposé diffère du CF par le fait qu’aucune opération de quantification et de compression n’est effectuée.

## 2 Représentation du système

Nous considérons un réseau sans fil composé de trois noeuds : une source qui dispose de l’information à transmettre vers une destination en empruntant deux liens différents, le lien direct et le lien indirect passant par un noeud intermédiaire (le relais). Nous considérons que le relais utilise le protocole DF et qu’il opère dans le mode half-duplex. En outre, la source  $s$  est

supposée équipée d'un encodeur  $\mathcal{C}$  de rendement  $R$ , qui transforme un message d'information  $\mathbf{u}_s$  de taille  $K$  symboles en un mot-code  $\mathbf{x}_s$  de longueur  $N = K/R$  symboles. Suite à la première phase de transmission, la destination ainsi que le relais reçoivent des observations bruitées de  $\mathbf{x}_s$ , notées respectivement,  $\mathbf{y}_{sd}$  et  $\mathbf{y}_{sr}$ . Durant la seconde phase de transmission, le relais effectue un décodage à sorties dures pour générer un mot-code estimé  $\mathbf{x}_r$  correspondant à  $\mathbf{x}_s$ , qu'il renvoie par la suite à la destination. Contrairement à [4], aucun entrelacement n'est effectué avant de renvoyer l'information à la destination. Ce choix a été justifié dans [3], où les auteurs montrent qu'aucun gain supplémentaire n'est apporté par l'entrelacement au niveau du décodage. En effet, l'information extrinsèque sur les données obtenue par le décodage itératif grâce à une estimation de la corrélation ne peut pas être supérieure à celle obtenue directement à partir de la connaissance exacte de la corrélation entre source et relais (cf. section 3 pour la description du décodage itératif). À partir des deux observations bruitées  $\mathbf{y}_{sd}$  et  $\mathbf{y}_{rd}$ , la destination génère une estimation sur le mot-code transmis  $\mathbf{u}_s$ , notée  $\hat{\mathbf{u}}_s$ .

Les rapports signal-à-bruit des canaux source-destination, source-relais et relais-destination, notés respectivement par  $\gamma_{sd}$ ,  $\gamma_{sr}$  et  $\gamma_{rd}$ , sont considérés connus uniquement au niveau de leurs récepteurs respectifs. Les observations reçues sont données par :

$$\mathbf{y}_{sd} = \mathbf{h}_{sd}\tilde{\mathbf{x}}_s + \mathbf{w}_{sd} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{sr} = \mathbf{h}_{sr}\tilde{\mathbf{x}}_s + \mathbf{w}_{sr} \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_{rd} = \mathbf{h}_{rd}\tilde{\mathbf{x}}_r + \mathbf{w}_{rd} \quad (3)$$

où  $\mathbf{w}_{sd}$ ,  $\mathbf{w}_{sr}$  et  $\mathbf{w}_{rd}$  sont des bruits blancs additifs gaussiens de variances respectives  $\sigma_{sd}$ ,  $\sigma_{sr}$  et  $\sigma_{rd}$ ,  $\mathbf{h}_{sd}$ ,  $\mathbf{h}_{sr}$  et  $\mathbf{h}_{rd}$  représentent les gains respectifs des canaux source-destination, source-relais et relais-destination. Deux types de canaux sont considérés : des canaux gaussiens ( $\mathbf{h}_{sd} = \mathbf{h}_{sr} = \mathbf{h}_{rd} = 1$ ) et des canaux à évanouissements. Dans ce dernier cas, les gains des canaux suivent une distribution de Rayleigh. Les rapports signal-à-bruit des différents liens de transmission sont donnés par  $\gamma_{sd} = 1/(2\sigma_{sd}^2)$ ,  $\gamma_{sr} = 1/(2\sigma_{sr}^2)$  et  $\gamma_{rd} = 1/(2\sigma_{rd}^2)$ .

### 3 Décodage conjoint source-relais

Dans cette section, nous appliquons le schéma de décodage itératif conjoint de sources corrélées au protocole DF d'un système coopératif à un relais. Contrairement au protocole CF, nous supposons que la source ainsi que le relais ne dispose d'aucun codeur de source, mais uniquement d'un codeur de canal. À la destination, un décodeur itératif est mis en place pour exploiter la corrélation entre les deux versions bruitées provenant à la fois de la source et du relais. Comme le relais renvoie une estimation de l'information transmise par la source, une certaine corrélation est observée entre les deux messages qui arrivent à la destination. En prenant en compte cette corrélation, nous pouvons remédier au problème de dégradation des performances provoquée par le phénomène de propagation d'erreurs propre au protocole DF. Cette corrélation dépend de

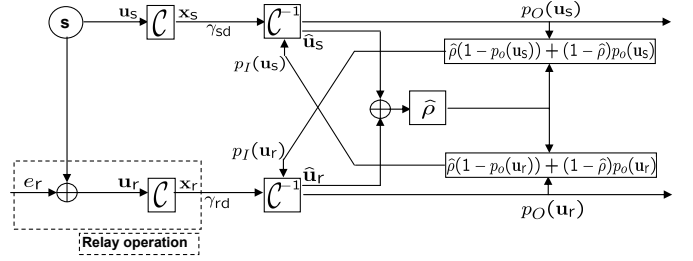


FIGURE 1 – Schéma itératif du décodage conjoint source-relais.

la qualité du canal source-relais ; plus le canal est détérioré, plus le degré de corrélation baisse. Une mesure empirique de cette corrélation peut être définie par  $\hat{\rho} = \frac{w(\mathbf{u}_s \oplus \mathbf{u}_r)}{K} = \frac{w(e_r)}{K}$ , où  $w(\cdot)$  est le poids de Hamming et  $e_r$  est le vecteur erreur au niveau du relais.  $\hat{\rho}$  peut être exprimée aussi par  $\hat{\rho} = 1 - p_{e_r}^b$ , où  $p_{e_r}^b$  est la probabilité d'erreurs binaire du canal source-relais.

#### 3.1 Décodage itératif

En utilisant les observations bruitées  $\mathbf{y}_{sd}$  et  $\mathbf{y}_{rd}$ , le problème de décodage à la destination basé sur le critère de maximisation de la probabilité *a posteriori* s'écrit :

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{u}}_r] &= \underset{[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_r]}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_r | \mathbf{y}_{sd}, \mathbf{y}_{rd}) \\ &= \underset{[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_r]}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}_{sd} | \mathbf{u}_s) p(\mathbf{y}_{rd} | \mathbf{u}_r) p(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_r) \end{aligned} \quad (4)$$

La première égalité est celle donnée dans [5], tandis que la seconde égalité est obtenue en appliquant la règle de Bayes. Notons que le troisième terme de cette dernière égalité prend bien en compte l'éventuelle corrélation qui existe entre source et relais. En négligeant toutes les constantes et en appliquant la formule des probabilités totales, ce dernier problème optimal de décodage conjoint peut être divisé en deux sous-problèmes de plus faible complexité :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_s &= \underset{\mathbf{u}_s = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{x}_s)}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}_{sd} | \mathbf{x}_s) p(\mathbf{u}_s | \hat{\mathbf{u}}_r) \\ \hat{\mathbf{u}}_r &= \underset{\mathbf{u}_r = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{x}_r)}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}_{rd} | \mathbf{x}_r) p(\mathbf{u}_r | \hat{\mathbf{u}}_s) \end{aligned} \quad (5)$$

Grâce à cette nouvelle formulation, le décodeur ne prend plus explicitement en compte les décisions erronées prises au niveau du relais. Il n'y a donc plus, à proprement dit, propagation d'erreurs. Ceci est implicitement inclus dans le degré de corrélation observée entre les messages de la source et du relais, reçus à la destination.

Comme le montre la Fig. 1, chaque décodeur élémentaire, de type *Soft Input Soft Output* (SISO), décode sa propre information en se basant sur une information *a priori*, résultat de décodage de l'autre décodeur.  $p_O(\mathbf{u}_s)$  et  $p_O(\mathbf{u}_r)$ , les probabilités *a posteriori*, représentent les mot-codes estimés par les deux décodeurs élémentaires.  $p_I(\mathbf{u}_s)$  et  $p_I(\mathbf{u}_r)$  sont les probabilités *a priori*, entrées des décodeurs élémentaires. En faisant intervenir le degré de corrélation observée entre les messages

de la source et du relais, les probabilités *a priori* de la  $j$ -ième itération sont évaluées à partir des probabilités *a posteriori* de la  $(j-1)$ -ième itération.

### 3.2 Estimation de la corrélation

Nous supposons qu'aucune information sur la qualité du canal source-relais n'est disponible au niveau de la destination. Or le degré de corrélation, noté  $\rho$ , entre la source et le relais est directement relié à cette information. Au sein de notre schéma de décodage, et contrairement à [4], le degré de corrélation estimé, noté  $\hat{\rho}$ , est donné à chaque itération par :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K p_O(\mathbf{u}_s[i] = 0)p_O(\mathbf{u}_r[i] = 0) + p_O(\mathbf{u}_s[i] = 1)p_O(\mathbf{u}_r[i] = 1) \quad (6)$$

Notons que l'erreur d'estimation entre  $\hat{\rho}$  et  $\rho$  est relativement faible dès la première itération, ce qui justifie le présent choix à celui de transmettre de l'information supplémentaire contenant la qualité du canal source-relais nécessaire pour avoir la valeur exacte de  $\rho$ . En outre, suite aux itérations successives, nous sommes capables d'affiner la valeur de  $\hat{\rho}$ .

## 4 Borne sur la probabilité d'erreur

Dans cette section, nous proposons une borne sur la probabilité d'erreur pour ce schéma de décodage conjoint source-relais, ce qui constitue la deuxième contribution majeure de ce papier par rapport à [4]. Dans cette perspective, nous considérons le problème simplifié défini dans (5). Sans perte de généralité, nous nous intéressons au décodeur élémentaire relatif à la source. Les événements d'erreurs au niveau du relais et de la destination sont définis respectivement par :

$$e_r := \{\mathbf{u}_r \neq \mathbf{u}_s\}, \quad e := \{\hat{\mathbf{u}}_s \neq \mathbf{u}_s\} \quad (7)$$

Dans cette analyse, nous considérons que le mot tout-à-zéro est transmis par la source, c.à.d.  $\mathbf{u}_s = 0$  ( $\mathbf{x}_s = 0$ ). Ceci n'impliquera aucune perte de généralité puisque le code  $\mathcal{C}$  employé est linéaire. En utilisant la règle de décodage fournie dans la première équation de (5) pour décoder la source, l'évènement d'erreur  $e$  à la destination s'écrit comme

$$e \equiv \{ \exists \mathbf{x}_e = \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) \in \mathcal{C} \setminus \{0\} : p(\mathbf{y}_{sd} | \mathbf{x}_s) p(\mathbf{u}_s | \hat{\mathbf{u}}_r) < p(\mathbf{y}_{sd} | \mathbf{x}_e) p(\mathbf{u}_e | \hat{\mathbf{u}}_r) \} \quad (8)$$

La probabilité d'erreur par paire conditionnée par l'information *a priori* obtenue à partir de l'autre décodeur est donnée dans [6] comme

$$p_d(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_e | \hat{\mathbf{u}}_r) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Rd\gamma_{sd}} + \frac{\tilde{L}_a(w_e - 2w)}{4\sqrt{Rd\gamma_{sd}}} \right) \quad (9)$$

où  $w$  est le poids du message d'information estimé  $\hat{\mathbf{u}}_r$ ,  $w_e$  est le poids du message d'information  $\mathbf{u}_e$ ,  $d$  est le poids du mot-code  $\mathbf{x}_e$  et  $\tilde{L}_a = \ln \left( \frac{\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} \right) = \ln \left( \frac{1-p_{e_r}^b(\gamma_{sr})}{p_{e_r}^b(\gamma_{sr})} \right)$ . Notons que

comme  $\hat{\mathbf{u}}_r$  est égal à 1 avec une probabilité  $p_{e_r}^b$  et qu'il est égal à 0 avec une probabilité  $1 - p_{e_r}^b$ ,  $w$  suit alors une distribution binomiale. La probabilité d'erreur par paire est donc donnée par

$$p_d(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{w_e} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Rd\gamma_{sd}} + \frac{\tilde{L}_a(w_e - 2w)}{4\sqrt{Rd\gamma_{sd}}} \right) \binom{w_e}{w} (1 - p_{e_r}^b(\gamma_{sr}))^{(w_e-w)} (p_{e_r}^b(\gamma_{sr}))^w \quad (10)$$

En utilisant la propriété de la borne de l'union, la borne supérieure de la probabilité d'erreur binaire est fournie dans (11).

Notons que  $n_d$  est le nombre de mot-code de poids  $d$  et  $w_d$  est le poids de Hamming cumulé de tous les mot-codes de poids  $d$ . Ainsi,  $w_e$  est approximé par le poids moyen des mot-codes  $w_d/n_d$ . De surcroît,  $p_{e_r}^b$  peut être approché par sa borne supérieure définie par

$$p_{e_r}^b \approx \frac{1}{2} \sum_{d=d_{min}}^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Rd\gamma_{sr}} \right) \quad (12)$$

## 5 Evaluation des performances

Dans cette section, nous présentons les performances du schéma de décodage itératif conjoint pour le protocole DF comparé à d'autres schémas de décodage de référence. Dans les exemples présentés ici, nous considérons un code  $\mathcal{C}$  convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs  $(05, 07)_8$  et un message d'information de longueur  $K = 128$  bits. Dans la Fig. 3, nous fournissons ses performances en termes de probabilité d'erreur binaire. Nous présentons à la fois les résultats de simulation ainsi que les bornes de l'union développées dans la section 4 afin d'illustrer la justesse de notre étude analytique. Les performances sont données en fonction de  $\gamma_{sd}^b$ , où  $\gamma^b = \gamma/R$  et  $\gamma_{rd}^b = 5$  dB.

Les comparaisons sont faites par rapport au schéma de décodage pour le protocole DF sans traitement particulier des erreurs au niveau du relais (*classical decoding*), et pour le protocole DF sélectif où la contribution du relais n'est prise en compte que lorsque le décodage est effectué avec succès au niveau du relais (*Selective DF*). À partir de cette figure, une dégradation significative des performances est observée pour le schéma de décodage dit classique du protocole DF par rapport au système non-coopératif et le protocole DF sélectif, lorsque le canal source-relais est très bruité ( $-3$  à  $0$  dB). Ce phénomène est évité en effectuant du décodage itératif conjoint source-relais. En effet, même pour un canal source-relais de très mauvaise qualité, ce schéma de décodage surpasse à la fois la transmission non-coopérative et le protocole DF sélectif, puisque les erreurs générées par le relais sont implicitement prises en compte dans le procédé de décodage au niveau de la destination. D'un autre côté, quand un canal source-relais de bonne qualité est considéré ( $\gamma_{sr}^b = 5$  dB), les décodages classique et sélectif fonctionnent mieux que le décodage itératif conjoint source-relais pour des canaux source-destination relativement

$$\begin{aligned}
p_e^b &\leq \sum_{d=d_{min}}^{\infty} w_d p_d(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_e) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{d=d_{min}}^{\infty} w_d \sum_{w=1}^{w_e} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{Rd\gamma_{sd}} + \frac{\tilde{L}_a(w_e - 2w)}{4\sqrt{Rd\gamma_{sd}}} \right) \binom{w_e}{w} (1 - p_{e_r}^b(\gamma_{sr}))^{(w_e-w)} (p_{e_r}^b(\gamma_{sr}))^w
\end{aligned} \tag{11}$$

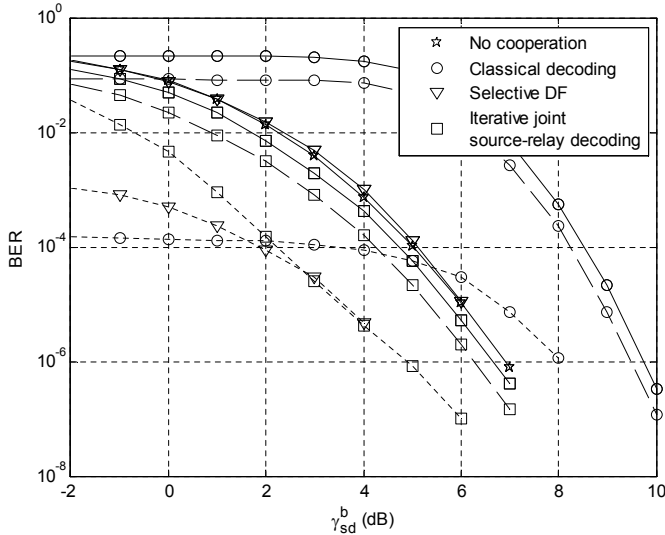


FIGURE 2 – Bornes et résultats de simulations sur la probabilité d’erreur binaire pour le protocole DF utilisant un décodage itératif conjoint source-relais vs les résultats de simulation des schémas de décodage de référence. Canaux gaussiens avec  $\gamma_{rd}^b = 5$  dB,  $\gamma_{sr}^b = -3$  dB (traits continus),  $\gamma_{sr}^b = 0$  dB (traits interrompus) et  $\gamma_{sr}^b = 5$  dB (traits pointillés).

mauvais ( $\gamma_{sd}^b < 2$  dB). Dans la Fig. 3, nous présentons donc les conditions des canaux pour lesquelles le schéma de décodage classique reste préférable au schéma de décodage itératif conjoint pour le protocole DF. Cette figure prouve que les conditions pour lesquelles le schéma de décodage proposé n’apporte aucun gain correspondent à des valeurs relativement faibles de rapport signal-à-bruit.

## 6 Conclusions

Dans ce travail, nous avons appliqué le principe de décodage conjoint de deux sources corrélées au protocole DF d’un système à relais et ainsi proposé un schéma de décodage itératif conjoint source-relais. Des améliorations significatives ont été observées, par rapport au décodage du protocole DF sans traitement particulier des erreurs au niveau du relais et au système non-coopératif, pour des transmissions source-relais peu fiables sujettes à la propagation d’erreurs. En outre, nous avons développé une borne analytique de la probabilité d’erreur binaire du schéma de décodage proposé afin de valider les résultats de simulation.

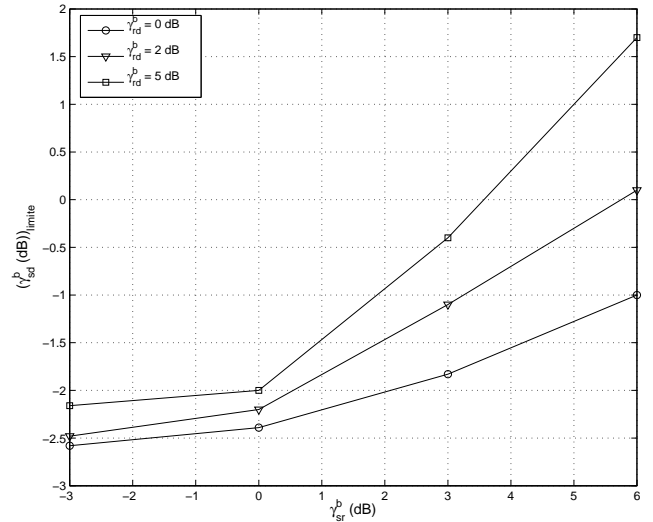


FIGURE 3 – Rapport signal-à-bruit limite du canal source-destination au-dessous duquel le schéma de décodage classique présente de meilleures performances que le schéma de décodage itératif conjoint en fonction de la qualité du canal source-relais.

## Références

- [1] G. Kramer, M. Gastpar et P. Gupta, *Cooperative strategies and capacity theorems for relay networks*, IEEE Trans. Inf. Theory, p. 3037-3063, Sept. 2005.
- [2] G. Al-Habian, A. Ghayeb, M. Hasna et A. Abu-Dayya, *Threshold-based relaying in coded cooperative networks*, IEEE Trans. Commun. Vehicular Technology, vol. 60, p. 123-135, Jan. 2011.
- [3] F. Daneshgaran, M. Laddomada et M. Mondin, *Iterative joint channel decoding of correlated sources*, IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 5, p. 2659-2663, Oct. 2006.
- [4] R. Thobaben, *On distributed codes with noisy relays*, Proc. Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers, p. 1010-1014, Oct. 2008.
- [5] A. Graell i Amat et I. Land, *An analytical expression of the probability of error for relaying with decode-and-forward*, Inf. Theory Workshop, p. 1-5, Feb. 2010.
- [6] J. Hagenauer, *Source-controlled channel decoding* IEEE Trans. Commun., vol. 43, p. 2449-2457, Sept. 1995.