

# Estimation de la Capacité d'un Réseau à Bande Ultra Etroite avec un Canal Réaliste

Minh-Tien DO<sup>1,2</sup>, Claire GOURSAUD<sup>1</sup>, Jean-Marie GORCE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CITI-Lab, Insa Lyon  
20 Avenue Albert Einstein, F-69621, Villeurbanne cedex, France

<sup>2</sup> SIGFOX-SA  
Bâtiment E-volution, 425 rue Jean Rostand, Labège, F-31670, France  
minhtien.do@sigfox.com, claire.goursaud@insa-lyon.fr  
jean-marie.gorce@insa-lyon.fr

**Résumé** – La technologie ultra-bande étroite (UNB) est une solution prometteuse pour les réseaux de capteurs sans fil à faible débit (de 10 b/s à 1 k/b). Elle est complémentaire aux réseaux cellulaires classiques grâce à une faible consommation d'énergie et une très longue portée (jusqu'à 50 km dans l'espace libre). Cette technologie a déjà été déployée dans le réseau Sigfox [1] et a démontré sa grande efficacité pour les communications point-à-point. Les nœuds transmettant de façon aléatoire en temps et en fréquence (accès multiple par répartition aléatoire de fréquence : R-FDMA), la liaison montante est sujette aux interférences. Dans cet article, nous proposons de modéliser cette interférence en tenant compte de l'affaiblissement de propagation et l'effet de Rayleigh, grâce aux outils de géométrie stochastique. Le modèle obtenu nous permet d'estimer les performances du système, et sa capacité en terme du maximum nombre moyen de nœuds simultanés dans une cellule.

**Abstract** – The Ultra-narrow-band technology is an appealing solution for the low throughput wireless sensor networks (10 b/s - 1 kb/s). It is complementary to the classical cellular networks thanks to its low energy consumption and very long range communication (up to 50 km in free-space). This technology has already been deployed and is proved to be ultra-efficient for point-to-point communications in Sigfoxs' network [1]. Nodes are transmitting at a random time and random frequency carrier (random frequency division multiple access schemes : R-FDMA), so the uplink is exposed to interference. In this paper, we propose to model this interference for the UNB network when taking into account the path-loss and Rayleigh effects, with stochastic geometry tools. The obtained model allows us to estimate the system performance, and its capacity in terms of maximum number average of simultaneous nodes in a unique cell.

## 1 Introduction

La technologie de transmission basée sur une couche PHY à bande ultra étroite (UNB) consiste à transmettre des données en utilisant une largeur de bande très petite (environ 200 Hz). L'intérêt de cette technologie est que le niveau de bruit thermique subi (proportionnel à la largeur de bande du signal) est alors fortement réduit. Ainsi, cela permet de servir, sur une large couverture, un grand nombre de nœuds demandant du bas débit. En conséquence, elle est parfaitement adaptée aux réseaux de capteurs sans fil à faible débit (par exemple, pour une surveillance de la température, pour le relevé de compteurs électriques, etc.).

Pour une largeur de bande si petite, les oscillateurs actuels ne sont pas assez précis pour permettre le multiplexage fréquentiel des transmissions. En effet, leur déviation est statistiquement beaucoup plus grande que l'occupation spectrale du signal. Un accès FDMA conduirait à sacrifier des ressources fréquentielles comme intervalle

de garde. Donc, en pratique, l'accès multiple par répartition aléatoire de fréquence (R-FDMA) est utilisé. Cette technique d'accès, détaillée dans [2], permet de gérer de façon opportuniste un réseau où les données sont transmises sporadiquement et de supprimer le surcoût lié à un réseau organisé, mais conduit à des interférences qui limitent les performances même avec un canal parfait [3].

Cependant, ce réseau doit aussi surmonter les effets introduits par le canal de propagation tel que l'affaiblissement de propagation en espace libre (path-loss), les évanouissements de Rayleigh, etc. Dans cet article, nous caractérisons les performances de ce réseau UNB basé sur R-FDMA. Pour cela, nous analysons et modélisons la répartition de la puissance d'interférence agrégée (AIP) en tenant compte du path-loss et de l'effet de Rayleigh. Nous considérons que la distribution spatiale des nœuds est aléatoire et peut être modélisée par un processus ponctuel spatial de Poisson. Grâce à la géométrie stochastique, les expressions théoriques pour la transformée de Laplace de l'AIP et la probabilité de coupure (OP) sont obtenues pour

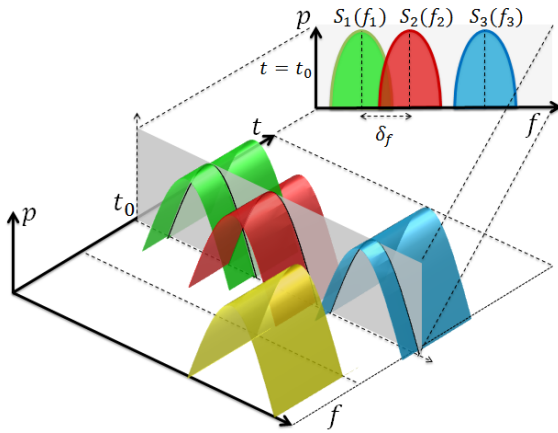


FIGURE 1 – Répartition temporelle et spectrale des nœuds.

la liaison montante. Ceci nous permet de fournir un modèle simplifié afin d'estimer le nombre maximum de nœuds pouvant être servis simultanément dans une cellule, selon sa configuration.

## 2 R-FDMA, Principe et Interférence

### 2.1 Principes du R-FDMA

La spécificité principale d'un réseau R-FDMA par rapport aux réseaux classiques est le caractère aléatoire en temps et en fréquence. La Figure 1 représente un exemple d'occupation en temps et en fréquence du canal pour 4 nœuds actifs. Dans cet article, nous considérons les performances à un instant donné  $t_0$ . En conséquence, le *caractère aléatoire en temps* influe uniquement sur le nombre de nœuds actifs à l'instant d'observation. D'autre part, le *caractère aléatoire en fréquence* a un impact sur la position de la porteuse de chaque nœud actif dans la bande totale. La porteuse est choisie aléatoirement dans un intervalle continu de fréquence  $BW$  ( $BW$  est très grand par rapport à la largeur effective du signal transmis) sans connaissance a priori de l'occupation du canal [2]. Le R-FDMA permet de s'affranchir de l'imprécision sur la fréquence porteuse en raison de la gigue fréquentielle des oscillateurs disponibles actuellement (au minimum 400Hz en moyenne, ce qui est au-delà de la largeur de bande utilisée pour la transmission, rendant cette solution inopérable).

### 2.2 Coefficient de réjection en R-FDMA

L'absence de protocole de contrôle dans le domaine fréquentiel peut conduire à un chevauchement fréquentiel entre deux nœuds qui transmettraient simultanément. Pour des puissances reçues identiques (path-loss négligé), et pour un interférent unique et un instant donné, le niveau d'interférence induit est obtenu en multipliant le gabarit fréquentiel du signal utile et celui de l'interférent [3]. Donc, en cas d'émission simultanée, l'interférence (sans path-loss)

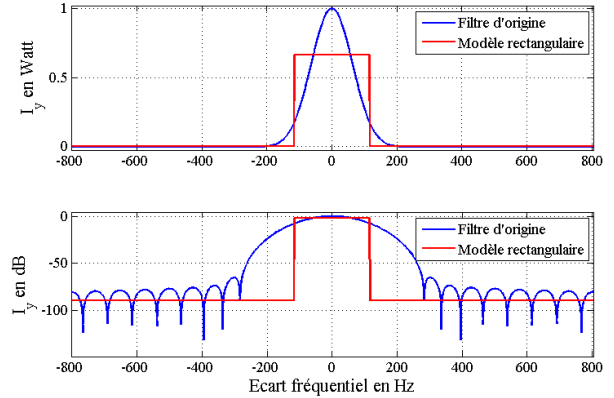


FIGURE 2 – Comportement de l'interférence  $I_y$  vs  $\delta_f$ .

dépend uniquement de l'écart fréquentiel  $\delta_f = |f_x - f_y|$  entre la porteuse du nœud souhaité  $f_x$  et celle de l'interférent  $f_y$  :

$$I_y = \beta(f_x, f_y) \quad (1)$$

$\beta(f_x, f_y)$  est nommé coefficient de réjection et modélisé par la fonction rectangulaire dans [3] :

$$\beta(f_x, f_y) = \begin{cases} I_{max} = -1.77 \text{ dB} & |\delta_f| \leq \frac{\Delta}{2} \\ I_{min} = -90 \text{ dB} & |\delta_f| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (2)$$

où  $\Delta = 232$  Hz dans notre cas d'étude.

Pour une bande de transmission de largeur  $BW$ , le coefficient de réjection  $\beta(f_x, f_y)$  suit une loi de Bernoulli avec une probabilité de succès  $p = \frac{\Delta}{BW}$ .

## 3 Performances du système

Pour s'affranchir des interférences inter-cellule, nous considérons une seule station de base (BS) couvrant une zone finie circulaire avec un rayon connu  $r_M$ . A  $t = t_0$ , elle collecte les informations du sous-ensemble actif de nœuds situés à l'intérieur de la cellule. Les nœuds actifs sont aléatoirement positionnés et distribués selon un processus ponctuel homogène de Poisson (HPPP) de densité  $\lambda$ . La distance entre un nœud et la BS (au centre de la cellule) est dans l'intervalle  $r \in [r_m, r_M]$ . Le paramètre  $r_m$  est une valeur non nulle qui correspond à la distance minimale entre un nœud et la BS (due par exemple à la hauteur du mât sur lequel est positionnée l'antenne de réception). Sa valeur est non nulle, ce qui permet de valider l'hypothèse de champ lointain et d'utiliser la formule de Friis généralisée pour l'atténuation. Enfin, nous considérons que la puissance d'émission des nœuds est homogène.

### 3.1 Transformée de Laplace de l'AIP

La fonction de transfert correspondant à l'impact d'un canal comprenant une atténuation, et subissant des évanouissements de Rayleigh peut être exprimée comme suit :

$$h(r) = g_s \cdot h_0 \cdot r^{-\alpha}, \quad r \in [r_m, r_M] \quad (3)$$

où  $\alpha \geq 2$  est un exposant d'affaiblissement,  $g_s$  est une variable aléatoire du canal de Rayleigh suivant une distribution exponentielle de moyenne unitaire  $g_s \sim \exp(\mu = 1)$ ,  $r$  est la distance entre un nœud et la BS, et  $h_0$  est le gain de référence déterminé à la distance de référence  $r_m = 1$  m pour une fréquence de transmission  $f = 868$  MHz et un gain d'antenne unitaire.

La puissance reçue du nœud souhaité  $x$  situé à une distance  $r_x$  de la BS peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_s &= \beta(f_x, f_x) \cdot h(r_x) \cdot P_0 \\ &= I_{max} \cdot g_s \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Similairement, le niveau d'interférence causé par un interférent sur le signal utile du nœud souhaité s'écrit :

$$\begin{aligned} I_y(r_y) &= \beta(f_x, f_y) \cdot h(r_y) \cdot P_0 \\ &= \beta(f_x, f_y) \cdot g_s \cdot h_0 \cdot r_y^{-\alpha} \cdot P_0 \end{aligned} \quad (5)$$

La puissance d'interférence agrégée (AIP) est donnée par :

$$\begin{aligned} P_I &= \sum_{y \in \{\mathcal{A}-x\}} I_y = \sum_{y \in \{\mathcal{A}-x\}} \beta(f_x, f_y) \cdot h(r_y) \cdot P_0 \\ &= \sum_{y \in \{\mathcal{A}-x\}} \beta(f_x, f_y) \cdot g_s \cdot h_0 \cdot r_y^{-\alpha} \cdot P_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Pour obtenir les statistiques de l'interférence, on applique la transformée fonctionnelle de Laplace [4] à l'équation (6). On obtient ainsi :

$$\mathcal{L}_{P_I}(s) = \exp \left( -2\pi\lambda \int_{r_m}^{r_M} \left( 1 - e^{-s \cdot I_y(r_y)} \right) r_y dr_y \right) \quad (7)$$

Dans (7),  $I_y(r_y)$  est la seule variable aléatoire. Or,  $I_y(r_y)$  dépend en réalité de trois paramètres aléatoires : l'atténuation du signal désiré  $h(r_y)$  (défini par (3) et conditionné par sa position  $r_y$ ), la réalisation instantannée du canal de Rayleigh  $g_s$ , et du coefficient de réjection  $\beta(f_x, f_y)$  donné par (2) déterminé par l'écart entre les porteuses. Comparé aux systèmes où seule la variation spatiale est prise en compte,  $\beta(f_x, f_y)$  agit comme une marque de  $I_y(r_y)$  [4]. En raison de l'indépendance du  $\beta(f_x, f_y)$  par rapport à  $h(r_y)$  [4], la transformée de Laplace de l'AIP est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{P_I}(s) &= \exp \left( -2\pi\lambda \int_{r_m}^{r_M} \left( 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbb{E}_{\beta(f_x, f_y)} \left( e^{-s \cdot \beta(f_x, f_y) \cdot g_s \cdot h_0 \cdot r_y^{-\alpha} \cdot P_0} \right) r_y dr_y \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

En utilisant le fait que le coefficient de réjection  $\beta(f_x, f_y)$  est une variable suivant une loi de Bernoulli avec une probabilité de succès  $p = \frac{\Delta}{BW}$ , nous pouvons dériver théoriquement la transformée de Laplace dans (8).

## 3.2 Calcul de la probabilité de coupure

Le rapport signal à bruit plus interférence (SINR) est donné par :

$$\text{SINR} = \frac{P_s}{(W + P_I)} \quad (9)$$

où  $W$  est la puissance de bruit blanc gaussien additif que nous fixons à 100 dB en dessous de la puissance du signal désiré, afin de se concentrer sur l'impact de l'interférence.

L'OP du nœud souhaité  $x$  situé à  $r_x$  de la BS est donnée par :

$$\text{OP} = \mathbb{P}(\text{SINR} \leq \gamma^*) = \mathbb{P} \left( \frac{P_s}{P_I + W} \leq \gamma^* \right) \quad (10)$$

où  $\gamma^*$  est le seuil de coupure pour le SINR. Comme  $P_I$  est une variable aléatoire indépendante, cette probabilité peut être exprimée comme suit :

$$\text{OP} = \mathbb{E}_{P_I} \left[ \mathbb{P} \left( g_s \geq \frac{\gamma^*(W + P_I)}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \middle| P_I \right) \right] \quad (11)$$

Puisque  $g_s$  suit une loi exponentielle, l'OP peut être dérivée :

$$\text{OP} = \mathbb{E}_{P_I} \left[ \exp \left( -\frac{\gamma^*(W + P_I)}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \middle| P_I \right) \right] \quad (12)$$

Puis, en utilisant la transformée de Laplace de l'AIP déterminée au (8), l'OP peut être finalement réécrite :

$$\begin{aligned} \text{OP} &= \exp \left( \frac{\gamma^* W}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \right) \\ &\quad \times \mathbb{E}_{P_I} \left[ \exp \left( -\frac{\gamma^* P_I}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \middle| P_I \right) \right] \\ &= 1 - \exp \left( \frac{\gamma^* W}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \right) \\ &\quad \times \mathcal{L}_{P_I} \left( \frac{\gamma^*}{I_{max} \cdot h_0 \cdot r_x^{-\alpha} \cdot P_0} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Grâce au fait que la marque soit indépendante des autres variables aléatoires, on obtient dans (13) un lien direct entre l'OP et la transformée de Laplace de l'AIP. Ainsi, pour un  $\gamma^*$  donné, l'OP d'un nœud  $x$  situé à la distance  $r_x$  de la BS peut être déterminée et exprimée théoriquement en fonction de la densité de nœud  $\lambda$  node/km<sup>2</sup>.

En outre, l'OP moyen d'un nœud souhaité peut être dérivée par intégration de (13) :

$$\overline{\text{OP}} = \int_{r_m}^{r_M} \mathbb{P}(\text{OP} | r_0 = r) \times \mathbb{P}(r_0 = r) dr \quad (14)$$

(14) nous permet d'évaluer et d'estimer théoriquement la capacité du réseau, i.e. le nombre moyen maximum de nœuds  $N_{max}$  pouvant être actifs simultanément dans une cellule.

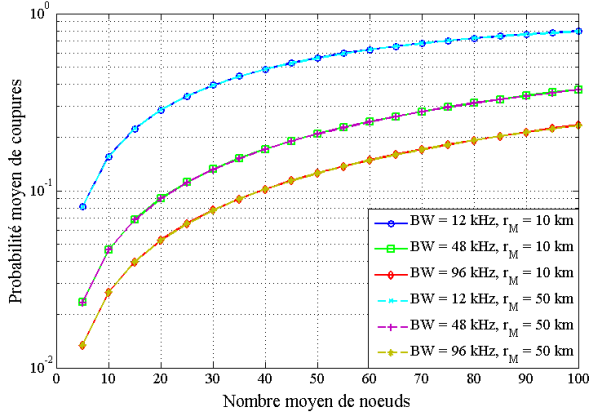


FIGURE 3 – OP moyen vs  $N_{max}$ , avec  $\alpha = 2$ .

## 4 Résultat : capacité du réseau

Pour évaluer la capacité du réseau, nous estimons d’abord  $\lambda$  à partir de (14). Nous en déduisons  $N_{max}$  en calculant le produit de  $\lambda$  par la surface de la cellule considérée.

La figure 3 représente la probabilité de coupure moyenne en fonction de  $N_{max}$  pour différentes largeurs de bande  $BW$  et différents rayons de cellule  $r_M$ , pour  $\alpha = 2$  (i.e., en espace libre). Sans surprise, l’augmentation de la largeur de bande permet d’améliorer les performances du réseau. D’autre part, le rayon de la cellule  $r_M$  a un impact non perceptible sur l’OP moyen. En effet, pour de grandes cellules, l’affaiblissement subi par la majorité des nœuds est comparable. Ainsi, pour ces nœuds éloignés (statistiquement plus nombreux que ceux au centre), l’interférence dépend surtout de la position fréquentielle des nœuds.

À l’inverse, la figure 4 montre que les performances du système sont dégradées lors de l’augmentation de  $\alpha$ . En effet, lorsque le canal induit une forte atténuation, les nœuds éloignés sont plus sensibles aux interférences.

Enfin, pour un seuil d’OP moyen fixé, nous reportons sur le tableau 1 le nombre maximum de nœuds simultanés  $N_{max}$  en fonction de  $BW$  et de  $\alpha$ . Pour comparaison, nous avons aussi reporté les valeurs obtenues pour un canal parfait ( $h(r) = 1$ ) [3]. On observe que pour  $\alpha = 2$ , on retrouve une capacité comparable au cas idéal, quelle que soit  $BW$ . À l’inverse, pour  $\alpha \geq 3$ , la capacité diminue par rapport au cas idéal, et ceci d’autant plus que  $BW$  est grande. En conséquence, pour un canal présentant une très forte atténuation, il est préférable de diviser  $BW$  en sous bandes, pour maximiser l’efficacité du réseau.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons modélisé l’interférence du réseau UNB utilisant un accès multiple Random-FDMA, en tenant compte de la répartition spatiale des nœuds. En utilisant la géométrie stochastique, nous avons exprimé théoriquement la probabilité de coupure. Nous avons mon-

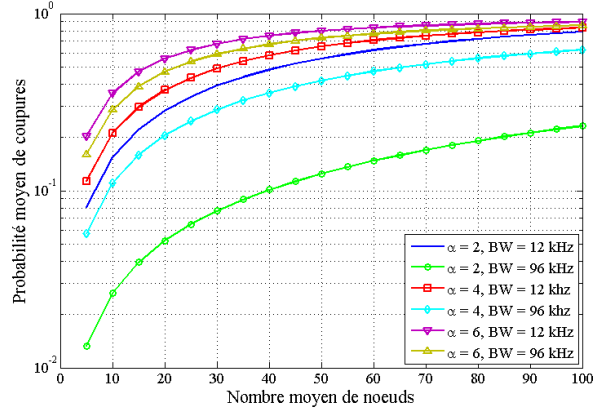


FIGURE 4 – OP moyen vs  $N_{max}$ , avec  $r_M = 10$  km.

TABLE 1 – Nombre moyen maximum de nœuds simultanés  $N_{max}$  pour  $OP = 10^{-1}$  et  $r_M = 10$  km.

$BW$	Canal idéal	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$	$\alpha = 6$
12 kHz	6	5	5	5	2	2
24 kHz	11	11	10	5	2	2
48 kHz	23	23	18	9	5	2
96 kHz	44	43	21	9	5	2

tré que la largeur de bande et l’affaiblissement impactent les performances du système, contrairement à la taille physique de la cellule. Nous avons évalué aussi le nombre maximum d’utilisateurs simultanément actifs, pour différentes conditions de transmission. Nous avons montré que la connaissance du coefficient d’affaiblissement du canal permet d’optimiser l’utilisation de la bande de transmission. Cette étude peut être étendue par la prise en compte du taux d’activité temporel des nœuds.

## Références

- [1] Sigfox. *Global cellular connectivity for the internet of things*. Feb. 2015.
- [2] M.-T. Do, C. Goursaud, and J.-M. Gorce. *On the benefits of random fdma schemes in ultra narrow band networks*. WiOpt2014, pp. 672–677, May 2014.
- [3] M.-T. Do, C. Goursaud, and J.-M. Gorce. *Interference modelling and analysis of Random-FDMA schemes in ultra narrowband networks*. AICT 2014, pp. 132–137, July 2014.
- [4] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn. *Stochastic geometry and wireless networks, Volume I - Theory*. Foundations and Trends in Networking, Vol. 3, no. 3-4, pp. 249-449, 2009.