

Statistique inférentielle pour l'analyse de surfaces représentées par des courants

Benjamin COULAUD¹, Frédéric J.P. RICHARD²

¹Aix-Marseille Université, I2M, UMR 7373, 39, rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille, France

²Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 39, rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille, France

benjamin.coulaud@etu.univ-amu.fr

frederic.richard@univ-amu.fr

Résumé – Cet article concerne l'analyse statistique des surfaces. On traite ce problème en étendant à un cadre aléatoire une représentation des surfaces par des courants (Glaunès et Vaillant, 2005). Cette extension est inspirée de la théorie des processus stochastiques généralisés introduite par Itô(1954) et Gelfand et Vilenkin (1964). Elle repose sur des formes linéaires aléatoires définies sur un espace de champs de vecteurs. À partir de cette représentation, on construit un modèle probabiliste décrivant la variabilité des surfaces puis un modèle d'observation. Dans le cadre de ce modèle d'observation, on propose un estimateur pour le représentant moyen d'une population de surfaces. Enfin, on formule un résultat de consistance de cet estimateur.

Abstract – In this paper, we deal with the statistical analysis of surfaces. To address this issue, we extend to a stochastic setting a surface representation by currents (Glaunès and Vaillant, 2005). This extension is inspired from the theory of generalized stochastic processes due to Itô (1954) and Gelfand and Vilenkin (1964). It consists of random linear forms defined on a space of vector fields. Upon this representation, we build a probabilistic model that describes surface variability and an observation model. For this observation model, we then propose an estimator of a mean representant of a surface population. Finally, we report a result about this estimator consistency.

1 Introduction

L'étude statistique des surfaces est une tâche particulièrement difficile. En effet, en raison de leur nature riemannienne, les surfaces ne peuvent pas être analysées avec les méthodes classiques qui ne s'appliquent qu'aux éléments d'un espace euclidien. Il existe des méthodes statistiques spécialement développées pour l'étude des variétés riemanniennes. Alternative-ment, nous proposons une étude indirecte basée sur la représentation des surfaces par des courants. Cette représentation, introduite par Glaunès et Vaillant, est déjà très utilisée pour l'analyse de surfaces, notamment pour traiter de problèmes de recalage.

Dans les travaux de Glaunès et Vaillant, un courant s représentant une surface \mathcal{S} est une forme linéaire continue définie sur un espace de Hilbert V dont les éléments sont des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . Ici, le représentant s d'une surface \mathcal{S} continuellement différentiable est défini par

$$s(w) = \int_{\mathcal{S}} \langle e_1(u) \wedge e_2(u); w(u) \rangle_{\mathbb{R}^3} d\sigma(u), \forall w \in V, \quad (1)$$

où \wedge est le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 , $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ son produit scalaire, σ la mesure surfaciale sur \mathcal{S} , et les vecteurs $e_1(u)$, $e_2(u)$ forment une base directe du plan tangent à \mathcal{S} en u . Sous des hypothèses raisonnables sur V , la forme linéaire s est continue, et est un élément du dual topologique V^* de V (voir Section 2.1).

On représente ainsi les surfaces par des éléments d'un espace euclidien de dimension infinie.

La première contribution de cet article est la définition d'un cadre aléatoire dans lequel les courants sont vus comme des réalisations de formes linéaires aléatoires, définies à partir du concept de processus aléatoires généralisés introduit par Itô puis Gelfand et Vilenkin. Ce cadre aléatoire nous permettra de modéliser les variations des représentants des surfaces autour d'une moyenne.

En définissant une approximation des surfaces par des surfaces discrètes, qui correspondent mieux aux données expérimentales, on établira un modèle d'observation pour les représentants des surfaces.

Enfin, en utilisant ce modèle d'observation, on définira un estimateur pour le représentant moyen d'un échantillon de surfaces. Pour ce faire, on utilisera des approximations des champs de vecteurs sur un sous-espace vectoriel de V de dimension finie. On énoncera enfin un résultat assurant la consistance de cet estimateur.

2 Modèle statistique

2.1 Représentation des surfaces

Soient \mathcal{D} un cube de \mathbb{R}^3 et Θ un ensemble de surfaces \mathcal{C}^1 et compactes incluses dans \mathcal{D} . Soit V_0 un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. On suppose que V_0 est un R.K.H.S. dont le noyau K_0 est borné. On considère l'espace de Hilbert $V := (V_0)^3$ muni du produit scalaire défini par,

$$\langle v; w \rangle_V := \sum_{i=1}^3 \langle v_i; w_i \rangle_{V_0},$$

où $\langle \cdot; \cdot \rangle_{V_0}$ est le produit scalaire usuel de V_0 et $v := (v_1, v_2, v_3)$, $w := (w_1, w_2, w_3) \in V$.

On représente toute surface $S \in \Theta$ par la forme linéaire s sur V définie par l'équation (1). On peut démontrer que s est un élément de V^* .

2.2 Formes linéaires aléatoires

Dans cette section, on va donner quelques définitions concernant les formes linéaires aléatoires. Ces définitions sont inspirées des travaux sur les processus aléatoires généralisés introduits par Itô ainsi que Gelfand et Vilenkin.

Soit $\mathcal{E} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On note $\mathcal{L}^2(\mathcal{E})$ l'ensemble des variables aléatoires carré-intégrables sur \mathcal{E} .

Définition 1. On appelle forme linéaire aléatoire une forme linéaire continue définie sur V et à valeurs dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{E})$.

On note $V_{\mathcal{E}}^*$ l'espace des formes linéaires aléatoires. Les processus généralisés introduits par Itô correspondent aux formes linéaires définies sur l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact, tandis que, ici, l'espace V est un produit de R.K.H.S. à noyau borné.

Définition 2. Soit S une forme linéaire aléatoire sur V . L'espérance $\mathbb{E}^*[S]$ de S est définie par

$$\mathbb{E}^*[S] : w \in V \longrightarrow \mathbb{E}[S(w)] \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

et son autocovariance est définie par

$$\gamma_S : (v, w) \in V \times V \longrightarrow \text{Cov}(S(v), S(w)) \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

où \mathbb{E} et Cov désignent respectivement l'espérance et la covariance usuelles des variables aléatoires.

On observe que $\mathbb{E}^*[S]$ est une forme linéaire continue sur V et que γ_S est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$.

Définition 3. On dit que $S \in V_{\mathcal{E}}^*$ est une forme linéaire gaussienne si, pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $w_1, \dots, w_N \in V$, le vecteur aléatoire $(S(w_1), \dots, S(w_N))$ est gaussien.

On remarque qu'une forme aléatoire gaussienne est entièrement déterminée par son espérance et son autocovariance.

Définition 4. On dit que deux formes linéaires aléatoires S_1 et S_2 sont indépendantes si, pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $w_1, \dots, w_N \in V$, les vecteurs aléatoires $(S_1(w_i))_{i \in [1, N]}$ et $(S_2(w_i))_{i \in [1, N]}$ sont indépendants.

Définition 5. Un bruit blanc B est une forme linéaire aléatoire qui vérifie $\mathbb{E}^*[B](v) = 0$, et $\gamma_B(v, w) = \sigma^2 \langle v; w \rangle_V$ pour tous $v, w \in V$.

Le paramètre σ^2 est appelé variance du bruit blanc.

2.3 Modèle de variation

Soit $\{S_k, k \in [1, K]\}$ une population de surfaces, et $\{s_k, k \in [1, K]\}$ leurs représentants respectifs dans V^* . On décrit la variabilité de ces surfaces à travers leurs représentants. On considère que chaque représentant s_k est une réalisation d'une forme linéaire aléatoire S_k de $V_{\mathcal{E}}^*$. On suppose que les formes linéaires aléatoires S_1, \dots, S_K sont indépendantes et identiquement distribuées selon le modèle

$$S_k = \mu + B_k, \forall k \in [1, K], \quad (4)$$

où $\mu \in V^*$, et B_k sont des bruits blancs gaussiens *i.i.d.* de $V_{\mathcal{E}}^*$. Le représentant moyen μ est inconnu et à estimer.

Ce modèle de variation est théorique et ne permet pas de décrire des situations expérimentales où les surfaces sont observées sous une forme discrète. Dans la suite, nous allons le compléter pour obtenir un véritable modèle d'observation.

2.4 Discrétisation et modèle d'observation

2.4.1 Discrétisation des surfaces

En pratique, une surface lisse S_k du modèle (4) est observée sous la forme d'une surface discrète F_k^ρ dépendant d'un paramètre de précision ρ indépendant de k . Ces surfaces sont définies par

$$F_k^\rho := \bigcup_{m \in \{1, \dots, M_k^\rho\}} f_{m,k}^\rho,$$

où les $f_{m,k}^\rho$, $m \in \{1, \dots, M_k^\rho\}$ sont des facettes triangulaires.

Pour chaque k de $[1, K]$, on définit le représentant de la surface discrète F_k^ρ de manière analogue à ce qui a été fait pour les surfaces lisses :

$$s_{k,\rho}(w) = \sum_{m=1}^{M_k^\rho} \int_{f_{m,k}^\rho} \langle N_{m,k}^\rho; w(u) \rangle_{\mathbb{R}^3} du, \quad (5)$$

où $N_{m,k}^\rho$ désigne un vecteur normal unitaire à la facette $f_{m,k}^\rho$.

On considère la forme linéaire $s_{k,\rho}$ comme une réalisation d'une forme linéaire aléatoire $S_{k,\rho}$. On notera par la suite

$$\forall k \in [1, K], \epsilon_{k,\rho} := S_k - S_{k,\rho} \quad (6)$$

l'écart entre les représentants respectifs d'une surface continue et de sa discrétisation, et

$$\overline{\epsilon_{K,\rho}} := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_{k,\rho} \quad (7)$$

la moyenne des écarts pour un échantillon de surfaces. Il est clair que $\epsilon_{k,\rho}$ et $\overline{\epsilon_{K,\rho}}$ sont des formes linéaires aléatoires.

2.4.2 Modèle d'observation

Comme les surfaces observées sont sujettes à des variations dues aux erreurs de prétraitement, on suppose que les F_k^ρ sont aléatoires. Les surfaces lisses \mathcal{S}_k n'étant pas connues, on considère également toutes les valeurs qui dépendent de ces dernières (par exemple leur aire et leur volume) comme aléatoires. Par la suite, on fera les hypothèses suivantes

Hypothèse 1. Pour tout $\rho > 0$, pour tout k dans $\llbracket 1, K \rrbracket$, il existe une partition $(\mathcal{S}_{m,k}^\rho)_{m \in \llbracket 1, M_k^\rho \rrbracket}$ de F_k^ρ et un ensemble de difféomorphismes $(H_{m,k}^\rho)_{m \in \llbracket 1, M_k^\rho \rrbracket}$ qui mettent en correspondance de manière univoque les $\mathcal{S}_{m,k}^\rho$ avec les facettes $f_{m,k}^\rho$ et vérifient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{m \in \{1, \dots, M_k^\rho\}} \left(\|H_{m,k}^\rho - I\|_\infty + \|J(H_{m,k}^\rho) - I\|_\infty \right)^2 \right] \leq a(\rho),$$

où I désigne l'identité sur \mathbb{R}^3 , J la matrice jacobienne et a est une fonction à valeurs strictement positives, avec $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0$.

Hypothèse 2. En notant \mathcal{A} la mesure d'aire, on suppose

$$\sup_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket} \mathbb{E} \left[(\mathcal{A}(\mathcal{S}_k))^2 \right] < \infty.$$

Ces hypothèses permettent de garantir la convergence de l'écart entre le représentant d'une surface lisse et le représentant de son approximation discrète lorsque la précision ρ tend vers 0.

Proposition 1. Sous les Hypothèses 1 et 2, on a, pour tout w de V ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket} (\epsilon_{k,\rho}(w))^2 \right] = 0 \quad (8)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, K \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(\overline{\epsilon_{K,\rho}}(w))^2 \right] = 0 \quad (9)$$

En combinant la définition (6) et le modèle (4), on obtient notre modèle d'observation, exprimé en termes de représentants de l'échantillon de surfaces discrètes $(F_k^\rho)_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket}$,

$$S_{k,\rho} = \mu + B_k + \epsilon_{k,\rho}, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket, \quad (10)$$

où les $S_{k,\rho}$ sont observées et μ est inconnu et à estimer.

Dans la suite, on construit et étudie un estimateur de la forme moyenne μ dans le modèle (10).

3 Estimation

3.1 Approximation

Le paramètre μ est une forme linéaire de V^* , qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ de dimension infinie. Pour estimer ce paramètre, on utilisera des approximations dans un sous espace de V de dimension finie. Soit $(\phi_i)_{i \in I}$ une famille totale et linéairement indépendante de V . Soit $(I_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles emboîtés de I tels que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} I_N = I$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère les sous-espaces d'approximation

$V_N := \text{Vect}(\phi_i, i \in I_N)$ munis du produit scalaire induit par V . Ces sous-espaces sont emboîtés et leur réunion est dense dans V . Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit également les sous-espaces \tilde{V}_N^* de V^*

$$\tilde{V}_N^* := \{\mu \in V^* \mid v_\mu \in V_N\},$$

où v_μ est le représentant de Riesz de la forme linéaire μ . On notera $\mu^N = \underset{\nu \in \tilde{V}_N^*}{\text{argmin}} \|\mu - \nu\|_{V^*}$ (resp. $v_\mu^N = \underset{w \in V_N}{\text{argmin}} \|v_\mu - w\|_V$) la projection orthogonale de μ (resp. v_μ) sur \tilde{V}_N^* (resp. V_N).

Chaque élément μ de V^* peut être approché par un élément de \tilde{V}_N^* en utilisant la projection orthogonale v_μ^N de son représentant de Riesz v_μ sur V_N . On peut montrer que v_μ^N est un élément de V_N qui satisfait $\langle v_\mu^N; w \rangle_V = \mu(w)$, $\forall w \in V_N$. De manière équivalente, $v_\mu^N = \sum_{i \in I_N} \alpha_i \phi_i$, où $(\alpha_i)_i$ est la solution du système linéaire $\sum_{j \in I_N} g_{i,j} \alpha_j = \sum_{i \in I_N} \mu(\phi_i)$, pour tout $i \in I_N$ avec $g_{i,j} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_V$. Pour $i, j \in I_N$, on notera $h_{i,j}^N$ les termes qui satisfont $\sum_{k \in I_N} g_{(i,k)} h_{(k,j)}^N = \delta_{(i,j)}$, $\forall i, k \in I_N$. On a

$$v_\mu^N = \sum_{i \in I_N} \alpha_i \phi_i, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \sum_{j \in I_N} h_{(i,j)}^N \mu(\phi_j). \quad (11)$$

3.2 Construction des estimateurs

3.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance dans le modèle de variation

La moyenne μ du modèle de variation (4) est estimée via son représentant de Riesz v_μ . Soit v_μ^N la projection orthogonale de μ sur V_N donnée par l'Equation (11). Pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$, on définit les vecteurs aléatoires $Z_k^N := (S_k(\phi_i))_{i \in I_N}$, $\eta_k^N := (B_k(\phi_i))_{i \in I_N}$, et $\zeta^N := (\mu(\phi_i))_{i \in I_N}$. D'après le modèle de variation (4), on peut écrire

$$Z_k^N = \zeta^N + \eta_k^N, \quad \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket. \quad (12)$$

Pour $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$, les vecteurs aléatoires $Z_k^N = (Z_{k,i}^N)_{i \in I_N}$ sont *i.i.d.* et suivent une loi gaussienne multivariée d'espérance ζ^N et de matrice de covariance Γ^N dont les termes sont définis, pour tout (i, j) de I_N , par

$$\Gamma_{i,j}^N = \text{Cov}(Z_{k,i}^N, Z_{k,j}^N) = \gamma_B(\phi_i, \phi_j) = \sigma^2 \langle \phi_i, \phi_j \rangle_V.$$

Dans ce modèle, l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ζ^N est alors

$$\overline{Z}_K^N = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K Z_k^N. \quad (13)$$

On estime ainsi le représentant de Riesz v_μ de μ par

$$\widehat{v}_{\mu,K}^N = \sum_{m \in I_N} \sum_{l \in I_N} h_{m,l}^N \overline{Z}_{K,l}^N \phi_m. \quad (14)$$

Autrement dit, on estime la forme linéaire μ par la forme linéaire aléatoire

$$\widehat{\mu}_K^N(w) = \langle \widehat{v}_{\mu,K}^N; w \rangle_V, \quad \forall w \in V. \quad (15)$$

Cet estimateur n'est pas utilisé en pratique car il repose sur des surfaces $\mathcal{S}_k, k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ non observées. Toutefois il sert pour l'étude de la convergence d'un estimateur empirique proposé dans la section suivante.

3.2.2 Estimateur dans le modèle d'observation

On donne maintenant la définition d'un estimateur empirique $\widetilde{\mu}_{K,\rho}^N$ basé sur les représentants des surfaces discrètes. C'est celui-ci qui sera utilisé en pratique pour estimer μ . On construit cet estimateur en remplaçant $Z_{K,l}^N$ par la moyenne empirique des formes linéaires discrètes en ϕ_l $\overline{S_{K,\rho}^N}(\phi_l)$ dans la définition du représentant de Riesz (14). Notre estimateur du représentant moyen μ dans le modèle d'observation s'écrit donc

$$\widetilde{\mu}_{K,\rho}^N = \langle \widetilde{v}_{K,\rho}^N; \cdot \rangle_V,$$

$$\text{où } \widetilde{v}_{K,\rho}^N = \sum_{m \in I_N} \left(\sum_{l \in I_N} h_{m,l}^N \left(\overline{S_{K,\rho}^N}(\phi_l) \right) \phi_m \right).$$

3.3 Consistance

On énonce à présent le résultat établissant la consistance de l'estimateur défini en 3.2.2 quand la taille de l'échantillon ainsi que la dimension de l'espace d'approximation tendent vers l'infini et quand le paramètre de précision de la discrétisation tend vers 0. On n'en donnera pas la preuve détaillée dans ce document.

Théorème 1. *La forme linéaire $\mathbb{E}^*[\widetilde{\mu}_{K,\rho}^N]$ converge simplement vers μ quand N et K tendent vers $+\infty$ et ρ tend vers 0, i.e.*

$$\lim_{N,K \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow 0} \mathbb{E}^*[\widetilde{\mu}_{K,\rho}^N](w) = \mu(w), \forall w \in V.$$

L'erreur quadratique converge simplement vers 0 quand N et K tendent vers $+\infty$ et ρ tend vers 0, i.e.

$$\lim_{N,K \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow 0} \mathbb{E}[(\widetilde{\mu}_{K,\rho}^N(w) - \mu(w))^2] = 0, \forall w \in V.$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'utilisation de la Proposition 1 et du lemme suivant, donnant la consistance de l'estimateur construit dans le modèle de variation en 3.2.1.

Lemme 1. *La forme linéaire $\mathbb{E}^*[\widehat{\mu}_K^N]$ converge simplement vers μ quand N et K tendent vers $+\infty$, i.e.*

$$\lim_{N,K \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^*[\widehat{\mu}_K^N](w) = \mu(w), \forall w \in V.$$

L'erreur quadratique converge simplement vers 0 quand N et K tendent vers $+\infty$, i.e.

$$\lim_{N,K \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(\widehat{\mu}_K^N(w) - \mu(w))^2] = 0, \forall w \in V.$$

4 Discussion

On a établi un cadre statistique adapté à l'analyse des surfaces représentées par des courants (i.e. des formes linéaires

continues sur un espace de champs de vecteurs). Ce cadre consiste en une extension probabiliste utilisant des processus aléatoires généralisés de la représentation par courants introduite par Glaunès et Vaillant. En voyant les représentants des surfaces comme des réalisations de formes linéaires aléatoires, on a défini un modèle décrivant les variations aléatoires des surfaces puis un modèle d'observation. Dans le cadre de ce modèle d'observation, on propose un estimateur consistant pour le représentant moyen d'une population de surfaces.

Le modèle d'observation donné par l'Équation (10) est étendu pour prendre en compte les variations géométriques des surfaces.

$$S_{k,\rho} = \psi_k \cdot \mu + B_k + \epsilon_{k,\rho}, \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket, \quad (16)$$

où $\psi_k \cdot \mu$ représente l'action d'une déformation ψ_k sur le représentant moyen μ . Ce représentant moyen correspond alors à un prototype déformable. De tels modèles probabilistes existent pour les images et les objets euclidiens, mais ne sont pas encore bien établis pour des objets tels que les surfaces ou leurs représentations par des courants. Dans ce nouveau cadre, on projette d'étendre notre méthode d'estimation au calcul du prototype. Dans un second temps, on s'intéressera au problème de la récupération d'une surface à partir d'un représentant dans l'espace des formes linéaires. Cela permettrait de définir et estimer la surface moyenne d'un échantillon de surfaces.

Références

- [1] S. Allasonnière, J. Bigot, J. Glaunès, F. Maire, and F. Richard. Statistical models for deformable templates in image and shape analysis. *Annales Mathématiques de l'Institut Blaise Pascal*, 20(1) :1–35, 2013.
- [2] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3) :337–404, 1950.
- [3] I. Gelfand and N.Y. Vilenkin. *Generalized functions*, volume 4 : Applications to harmonical analysis. Academic Press, 1964.
- [4] M. Vaillant and J. Glaunès. Surface matching via currents. In G. Christensen and M. Sonka, editors, *Information Processing in Medical Imaging*, volume 3565 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–5. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [5] J. Glaunès and S. Joshi. Template estimation from unlabeled point set data and surfaces for Computational Anatomy. In X. Pennec and S. Joshi, editors, *Proc. of the International Workshop on the Mathematical Foundations of Computational Anatomy (MFCA-2006)*, pages 29–39, october 2006.
- [6] K. Itô. Stationary random distributions. *Mem. Col. Sci. Kyoto Imp. Univ.*, Ser. A, 28 :229–223, 1954.
- [7] K. Itô. Isotropic random current. In *Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, volume 2, pages 125–132, 1956.