

Design D-optimal d'une couronne d'inclinomètres

Mikael CARMONA¹, Regis PERRIER¹

¹CEA, Leti, 17 avenue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex, France

mikael.carmona@cea.fr, regis.perrier@cea.fr

Résumé – L'instrumentation d'une structure rigide par des inclinomètres de répartition connue permet d'estimer l'inclinaison de cette structure. Pour un nombre donné d'inclinomètres le design D-optimal consiste à déterminer la meilleure répartition de ces inclinomètres, au sens où elle maximise le déterminant de la matrice d'information de Fisher. Dans ce papier, on s'intéresse au design D-optimal d'une couronne instrumentée par des inclinomètres mono-axiaux dont les vecteurs de mesure sont dans le plan définis par la couronne. L'article introduit dans un premier temps le modèle de mesure d'une couronne instrumentée dont les paramètres sont l'inclinaison et le roulis de la couronne. La matrice d'information de Fisher est ensuite calculée et les propriétés de son déterminant sont étudiées. Enfin, les répartitions D-optimales sont caractérisées et des exemples de telles répartitions sont présentées.

Abstract – The tilt of rigid structure can be estimated with distributed inclinometers of known repartition. For a given number of inclinometers, the D-optimal design relies in determining the best sensors distribution in the sense that it maximises the determinant of the Fisher information matrix. In that paper, we study the D-optimal design of a ring instrumented by 1-axes inclinometers such that their measurement vectors lie in the plane defined by the ring. Firstly, the article introduces the measurement model of an instrumented ring which parameters are the tilt and the roll of that ring. Then, the Fisher information matrix is calculated and the properties of its determinant are studied. Finally, D-optimal repartitions are characterized and examples of such repartitions are proposed.

1 Introduction

Un inclinomètre est un accéléromètre utilisé dans un contexte quasi-statique *i.e.* où l'accélération propre est négligeable devant la gravité. Le capteur mesure alors la projection de la gravité sur son vecteur de mesure. Il faut au moins deux inclinomètres (de vecteurs de mesure non colinéaires) pour estimer l'inclinaison de la structure rigide sur laquelle ils sont fixés. Pour un nombre $N \geq 2$ d'inclinomètres, il est alors légitime de s'intéresser à l'existence de répartitions "optimales" de ces inclinomètres sur la structure. Ici, les répartitions optimales sont celles qui maximisent le déterminant de la matrice d'information de Fisher (MIF) [1], on parle de design D-optimal. On trouvera dans [2] un autre exemple d'application de la D-optimalité.

Dans ce papier, on caractérise toutes les configurations D-optimales d'une structure dont tous les vecteurs de mesure sont dans le même plan, ce dernier étant orthogonal au vecteur définissant l'inclinaison de la structure. Le modèle de mesure d'un inclinomètre étant invariante par translation, cela revient à considérer que la structure est une couronne (cf. figure 1). Cette configuration expérimentale trouve des applications dans l'instrumentation des structures tubulaires [3].

Le papier est organisé comme suit. La section 2 introduit le modèle de mesure associée à une couronne instrumentée. La MIF est calculée et son déterminant étudié. La section 3 présente la caractérisation des configurations D-optimales et propose 3

exemples de telles configurations.

2 Design D-optimal d'une couronne

2.1 Modèle de mesure

On fixe un repère orthonormé (OX, OY, OZ) où l'axe (OZ) est parallèle à l'axe dirigé par la gravité terrestre \underline{g} ¹. On considère une couronne instrumentée par N inclinomètres 1-axe dont les vecteurs de mesure sont contenus dans le plan de la couronne (cf. figure 1). Les angles entre chaque capteur sont supposés connus et invariants dans le temps. Cette hypothèse se traduit par la connaissance des angles $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ entre le capteur 1 et les autres capteurs (on a donc $\alpha_1 = 0$). Soit \underline{u} le vecteur unitaire normal au plan défini par la couronne. On note ϕ l'angle entre \underline{u} et \underline{g} , c'est l'inclinaison de la couronne. On note \underline{v}_1 le vecteur (unitaire) de mesure du capteur 1 et $\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}_1$ où \wedge est le produit vectoriel, de sorte que $(\underline{u}, \underline{v}_1, \underline{w})$ soit un repère orthonormé attaché à la couronne. Le vecteur de mesure du capteur i s'écrit $\underline{v}_i = \cos(\alpha_i)\underline{v}_1 + \sin(\alpha_i)\underline{w}$. Le modèle de la mesure \mathbf{m}_i d'un inclinomètre 1-axe correspond à la projection de la gravité sur son axe de mesure, d'où [4] :

$$\mathbf{m}_i = -\sin(\phi) [\cos(\alpha_i) \sin(\alpha_i)] \underline{V}(\eta) + \mathbf{b}_i \quad (1)$$

avec $\underline{V}(\eta) = [\sin(\eta) \cos(\eta)]^T$ et \mathbf{b}_i est le bruit de mesure supposé stationnaire, gaussien, centré et d'écart-type noté σ_i . L'angle η paramètre le vecteur unitaire à l'intersection du plan

1. Les vecteurs sont soulignés et les matrices sont doublement soulignées.

(OXY) et du plan de la couronne [3]. L'équation (1) se généralise pour tous les capteurs de la couronne sous la forme vectorielle suivante :

$$\underline{\mathbf{m}} = -\sin(\phi)\underline{\underline{A}}(\alpha)\underline{V}(\eta) + \underline{\mathbf{b}} \quad (2)$$

avec :

$$\underline{\mathbf{m}} = [\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_N]^T \quad (3)$$

$$\underline{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N]^T \quad (4)$$

$$\underline{\underline{A}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ \dots & \dots \\ \cos(\alpha_N) & \sin(\alpha_N) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\underline{\underline{b}}$ est un vecteur stationnaire gaussien centré de matrice de covariance notée $\underline{\underline{\Gamma}}$. Cette dernière est supposée symétrique définie-positive. On notera $\underline{\underline{\Gamma}}^{\frac{1}{2}}$ sa racine carrée définie-positive.

2.2 Matrice d'information de Fisher

Dans le cadre d'un modèle de mesure de type (2), la MIF et son déterminant sont calculables à partir de la log-vraisemblance associée à ce modèle [5]. Cette dernière s'écrit :

$$\mathcal{C}(\phi, \eta) = \frac{1}{2} (\sin(\phi)\underline{\underline{A}}(\alpha)\underline{V}(\eta) + \underline{\mathbf{m}})^T \times \underline{\underline{\Gamma}}^{-1} (\sin(\phi)\underline{\underline{A}}(\alpha)\underline{V}(\eta) + \underline{\mathbf{m}}) \quad (6)$$

La MIF correspond à l'opposée de l'espérance de la matrice Hessienne de \mathcal{C} [5] :

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}}(\phi, \eta) = -\mathbb{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\phi, \eta)}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\phi, \eta)}{\partial \phi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\phi, \eta)}{\partial \phi \partial \eta} & \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\phi, \eta)}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi)^2 F(\eta) & \cos(\phi) \sin(\phi) G(\eta) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) G(\eta) & \sin(\phi)^2 H(\eta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec :

$$F(\eta) = \underline{f}(\eta)^T \underline{f}(\eta) \quad (9)$$

$$G(\eta) = \underline{f}(\eta)^T \underline{g}(\eta) \quad (10)$$

$$H(\eta) = \underline{g}(\eta)^T \underline{g}(\eta) \quad (11)$$

$$\underline{f}(\eta) = \underline{\underline{\Gamma}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{A}}(\alpha) \underline{V}(\eta) \quad (12)$$

$$\underline{g}(\eta) = \underline{\underline{\Gamma}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{A}}(\alpha) \frac{\partial \underline{V}(\eta)}{\partial \eta} \quad (13)$$

La dépendance en $\underline{\alpha}$ de F, G, H, \underline{f} et \underline{g} n'apparaît volontairement pas ci-dessus par souci de simplification. Elle apparaît dans la suite lorsque cela est nécessaire.

Le calcul du déterminant de la MIF, via (8), mène à l'expression suivante :

$$\mathcal{D}(\phi, \eta; \underline{\alpha}) = \cos(\phi)^2 \sin(\phi)^2 R(\eta; \underline{\alpha}) \quad (14)$$

avec :

$$R(\eta; \underline{\alpha}) = F(\eta; \underline{\alpha})H(\eta; \underline{\alpha}) - G(\eta; \underline{\alpha})^2 \quad (15)$$

où la dépendance en $\underline{\alpha}$ sera importante dans la caractérisation des configurations D-optimales. En dérivant l'expression (15)

par rapport à η on montre que R est constant par rapport à cette variable *i.e.* $R(\eta; \underline{\alpha}) = R(0; \underline{\alpha})$. Désormais, pour toutes les variables dépendant de η et $\underline{\alpha}$ on notera uniquement la dépendance en $\underline{\alpha}$.

On peut noter que le déterminant de la MIF est nul pour trois configurations : si $\phi = \pi/2 \bmod \pi$ (ϕ non observable), si $\phi = 0 \bmod \pi$ (η non observable), ou, si $N = 2$ et les vecteurs de mesures des 2 inclinomètres sont colinéaires. Cette dernière assertion n'est pas démontrée ici, c'est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Schwartz appliqué aux vecteurs $\underline{f}(\eta)$ et $\underline{g}(\eta)$.

2.3 Répartitions D-optimales.

On caractérise ici les répartitions D-optimales dans le cas où les bruits de mesure sont indépendants *i.e.* $\underline{\underline{\Gamma}} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)$. Formellement, ces répartitions sont celles qui maximisent le déterminant de la MIF, ce qui revient à minimiser le volume de l'ellipse d'incertitude [1]. Avec les notations introduites précédemment, il s'agit de déterminer les vecteurs $\underline{\alpha}$ qui vérifient :

$$\underline{\alpha}^{\text{opt}} := \arg \max_{\underline{\alpha}} R(\underline{\alpha}) \quad (16)$$

On a le :

Théorème 1. *On note $\max(\underline{\underline{\Gamma}}^{-1})$ la valeur maximale de la matrice diagonale $\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}$. Alors :*

Cas 1) Si $N > 2$ et

$$\max(\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}) \leq \frac{1}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}) \quad (17)$$

où Tr est l'opérateur trace, alors un vecteur $\underline{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ est solution de (16) si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^N \sigma_k^{-2} \exp(2I\alpha_k) = 0 \quad (18)$$

où I est la racine de -1 de partie imaginaire positive.

Cas 2) Si $N > 2$ et si la condition (17) n'est pas satisfaite alors il existe un unique capteur k tel que $\sigma_{\max}^{-2} = \sigma_k^{-2}$, et, toute répartition optimale implique que le vecteur de mesure du capteur k soit orthogonal à tous les autres capteurs.

Cas 3) Si $N = 2$ alors toute configuration optimale est une configuration où les vecteurs de mesure des deux capteurs sont orthogonaux.

Pour démontrer le théorème 1, on démontre tout d'abord l'inégalité suivante :

$$R(\underline{\alpha}) \leq \frac{1}{4} \text{Tr}(\underline{\underline{\Gamma}}^{-1})^2 \quad (19)$$

En considérant l'égalité $\text{Tr}(\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}) = F(\underline{\alpha}) + H(\underline{\alpha})$ qui découle des expressions (9) et (11), alors il vient que l'équation (19) est

équivalente à :

$$(F(\underline{\alpha}, 0) - H(\underline{\alpha}, 0))^2 + 4G(\underline{\alpha}, 0)^2 \geq 0 \quad (20)$$

Cette dernière est toujours vérifiée, ce qui démontre (19). Le membre de droite de cette inégalité est indépendant de $\underline{\alpha}$, c'est donc un majorant de la fonction R . Ce dernier est atteint si et seulement si :

$$F(\underline{\alpha}, 0) = H(\underline{\alpha}, 0) \quad (21)$$

$$G(\underline{\alpha}, 0) = 0 \quad (22)$$

En utilisant les égalités $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$, vraies pour tout réel x , il vient que l'équation (18) est équivalente au système d'équations (21) et (22). Finalement, la borne maximale $\frac{1}{4} \text{Tr}(\underline{\Gamma}^{-1})^2$ est atteinte s'il existe au moins une solution à l'équation (18). Les solutions de cette dernière sont donc les répartitions D-optimales.

Nous montrons maintenant qu'il existe au moins une solution $\underline{\alpha}$ à l'équation (18) si et seulement si la condition (17) est satisfaite. Soit k un entier vérifiant :

$$\sigma_k^{-2} = \max_{i=1, \dots, N} \sigma_i^{-2} = \max(\underline{\Gamma}^{-1}) \quad (23)$$

En isolant le k -ième terme de l'équation (18), cette dernière s'écrit :

$$\sigma_k^{-2} = - \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i^{-2} \exp(2I(\alpha_i - \alpha_k)) \quad (24)$$

En appliquant le module complexe aux deux membres de cette égalité et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\max(\underline{\Gamma}^{-1}) \leq \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i^{-2} = \text{Tr}(\underline{\Gamma}^{-1}) - \max(\underline{\Gamma}^{-1}) \quad (25)$$

Cette inégalité est équivalente à l'inégalité (17), ce qui prouve que l'équation (18) admet une solution si la condition (17) est vérifiée.

On suppose maintenant que la condition (17) est satisfaite et on va démontrer que l'équation (18) admet une solution. On introduit l'ensemble suivant :

$$E_k = \left\{ \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i^{-2} \exp(I\theta_i), \text{ avec } \forall i \neq k, \theta_i \in [0, 2\pi] \right\} \quad (26)$$

où k vérifie (23). Comme $N > 2$, cet ensemble est une couronne du plan \mathbb{R}^2 de rayon interne $r_1 \leq \max(\underline{\Gamma}^{-1})$ et de rayon externe $r_2 = \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i^{-2} = \text{Tr}(\underline{\Gamma}^{-1}) - \max(\underline{\Gamma}^{-1})$. Par hypothèse, $r_2 \geq \max(\underline{\Gamma}^{-1})$, ce qui implique que $\max(\underline{\Gamma}^{-1}) \in E_k$ i.e. il existe un ensemble d'angles $(\theta_i)_{i=1, \dots, N, i \neq k}$ tels que :

$$\sigma_k^{-2} = - \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i^{-2} \exp(I\theta_i) \quad (27)$$

En posant $\alpha_i = \alpha_k + \theta_i$ pour tout $i \neq k$ et pour α_k quelconque, ceci démontre l'existence d'une solution à l'équation

(24). Ainsi, l'équation (18) admet au moins une solution. Ceci achève la preuve du cas 1 du théorème 1.

On se place maintenant dans le cas 2 pour lequel la condition (17) n'est pas satisfaite. L'entier k défini en (23) est alors nécessairement unique. Le cas 2 apparaît donc lorsque l'information d'un capteur (i.e. l'inverse de la variance de son bruit de mesure) est supérieure à la somme des informations des autres capteurs. Sans aucune perte de généralité, on indexe les capteurs de sorte que $k = 1$. Soit $\underline{\alpha}^{\text{opt}}$ une solution D-optimale. Cette dernière annule le gradient de la fonction R i.e. pour tout $i = 1, \dots, N$, on a :

$$\sin(2\alpha_i^{\text{opt}}) (H(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) - F(\underline{\alpha}^{\text{opt}})) = 2 \cos(2\alpha_i^{\text{opt}}) G(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) \quad (28)$$

En considérant le cas $i = k$ et en rappelant que, par convention, $\alpha_k^{\text{opt}} = 0$, il vient que $G(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) = 0$. En substituant cette égalité dans (28), on a :

$$\sin(2\alpha_i^{\text{opt}}) (H(\underline{\alpha}^{\text{opt}}, 0) - F(\underline{\alpha}^{\text{opt}}, 0)) = 0 \quad (29)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$. Dans le cas 2 du théorème 1, les égalités $G(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) = 0$ et $F(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) = H(\underline{\alpha}^{\text{opt}})$ ne peuvent être vérifiées simultanément (sinon on serait dans le cas 1). D'où $H(\underline{\alpha}^{\text{opt}}, 0) \neq F(\underline{\alpha}^{\text{opt}}, 0)$ puis, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\sin(2\alpha_i^{\text{opt}}) = 0$ i.e. :

$$\alpha_i^{\text{opt}} \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad (30)$$

De plus, il existe au moins un capteur j tel que $\alpha_j^{\text{opt}} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$, sinon $\mathcal{R}(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) = 0$, ce qui est contradictoire avec la définition d'une solution D-optimale. Soit A l'ensemble des capteurs j tels que $\alpha_j^{\text{opt}} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$. Il vient $R(\underline{\alpha}^{\text{opt}})$:

$$R(\underline{\alpha}^{\text{opt}}) = \sum_{j \in A} \sigma_j^{-2} \left(\text{Tr}(\underline{\Gamma}^{-1}) - \sum_{j \in A} \sigma_j^{-2} \right) \quad (31)$$

Cette expression est maximale si et seulement si A contient tous les capteurs exceptés le capteur k , ce qui achève la preuve du cas 2.

La preuve du cas 3 (où $N = 2$) s'établit par le calcul direct de $R(\underline{\alpha}) = (\sigma_1 \sigma_2)^{-2} \sin(\alpha_2)^2$ qui est maximal si et seulement si $\alpha_2 = \pm \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, toute répartition optimale dans ce cas est telle que les vecteurs de mesure des deux capteurs soient orthogonaux.

Le cas 1 du théorème 1 est maintenant illustré sur deux exemples.

Exemple 1. On suppose que tous les bruits de mesure des capteurs ont le même écart-type σ i.e. : $\underline{\Gamma} = \sigma^2 \underline{I}_N$ avec \underline{I}_N la matrice identité de taille $N \times N$. Dans ce cas, le vecteur :

$$\underline{\alpha}^{\text{opt}} = \frac{2\pi}{N} [0, 1, \dots, N-1]^T \quad (32)$$

est D-optimal. Géométriquement, ce vecteur correspond à la distribution spatiale uniforme des capteurs le long de la couronne.

Exemple 2 : On considère $N = 3$ capteurs dont le vecteur des bruits de mesure admet la matrice de covariance suivante : $\underline{\Gamma} = \sigma^2 \text{diag}(1, 1, 2)$ i.e. le capteur 3 admet un bruit d'écart-type deux fois supérieur aux capteurs 1 et 2. Dans ce cas :

$$\underline{\alpha}^{\text{opt}} = \left[0, \text{asin}\left(\sqrt{15}/4\right), -\text{asin}\left(\sqrt{5}/8\right) \right]^T \quad (33)$$

$$\approx [0^\circ, 75.52^\circ, 307.76^\circ]^T \quad (34)$$

Cette solution analytique a été obtenue par résolution directe de l'équation (18). La figure 2 représente la solution (33) D-optimale pour cet exemple et la solution D-optimale de l'exemple 1 pour $N = 3$.

3 Conclusion

Ce papier a présenté le design D-optimal d'une couronne instrumentée par des inclinomètres mono-axiaux. Le théorème 1 fournit une caractérisation complète des répartitions spatiales D-optimales. Trois cas sont distingués en fonction de l'existence d'un capteur dont la confiance est supérieure à la somme des confiances des autres capteurs. On retrouve en particulier la D-optimalité de la distribution uniforme lorsque que les capteurs ont des bruits de mesure de même écart-type. Enfin, pour $N = 2$ capteurs, qui est la configuration minimale pour que l'inclinaison et le roulis de la couronne soit observable, la configuration D-optimale est celle qui place les vecteurs de mesure des 2 capteurs orthogonaux.

Références

- [1] R. K. Mehra, *Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic Systems-Survey and New Results*, IEEE Transactions On Automatic Control vol 19 p. 753-768, 1974.
- [2] Y. Liu, H. Reza Karimi, Z. Yu, D-Optimal Design for Parameter Estimation in Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems, *Mathematical Problems in Engineering* 2012, 2012.
- [3] M. Carmona, R. Perrier, L. Jouanet, N. Saguin, O. Delcroix, *Estimation optimale temps-espace de la courbure de structures tubulaires via un réseau d'accéléromètres mono-axiaux*, GRETSI 2015.
- [4] CW. Tan, S. Park, *Design of accelerometer-based inertial navigation systems*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 54 (2005), pp. 2520-2530.
- [5] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*, Wiley-Interscience, 2001.

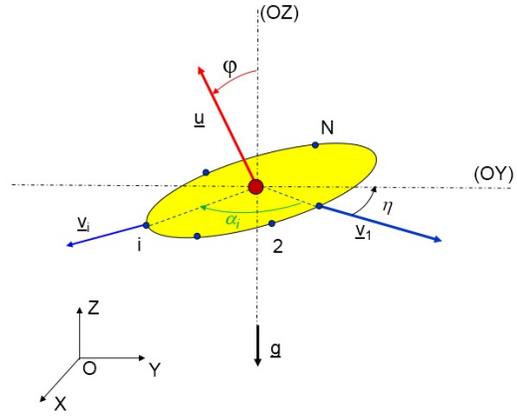


FIGURE 1 – Représentation géométrique d'une couronne instrumentée par des inclinomètres.

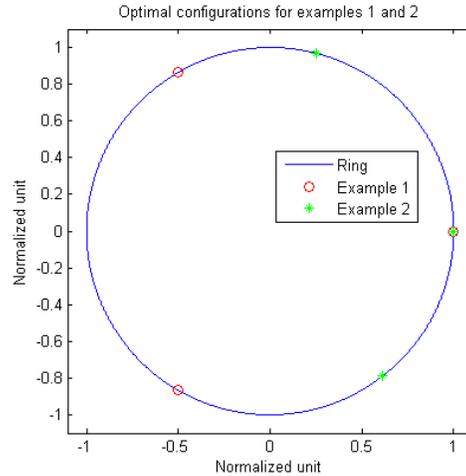


FIGURE 2 – Représentation des répartitions D-optimales pour les exemples 1 (cercles rouges) et 2 (étoiles vertes).