

# Echantillonnage compressé avec acquisition structurée et parcimonie structurée

Claire BOYER<sup>1</sup>, Jérémie BIGOT<sup>2</sup>, Pierre WEISS<sup>3</sup>

<sup>1</sup> UPS IMT UMR5219, F-31062 Toulouse Cedex 9, France

<sup>2</sup> IMB UMR 5251351, cours de la Libération - F 33 405 Talence, France

<sup>3</sup>ITAV USR 3505, 1 Place Pierre Potier Oncopole entrée B, 31106 Toulouse Cedex 1, France

claire.boyer@math.univ-toulouse.fr, jeremie.bigot@math.u-bordeaux1.fr,  
pierre.armand.weiss@gmail.com

**Résumé** – L'échantillonnage compressé (CS) a eu un impact fort dans des domaines variés. Cependant, les schémas d'échantillonnage proposés par le CS consistent en des mesures isolées, et sont donc souvent incompatibles avec la physique d'acquisition. Afin de prendre en compte les contraintes d'acquisition, nous introduisons la notion de bloc de mesures, qui est un ensemble de mesures pouvant représenter une forme arbitraire, par exemple une ligne droite. L'acquisition structurée par blocs de mesures est utilisée en pratique et donne de bons résultats de reconstruction. Afin de combler le fossé entre les théories CS et les acquisitions faites en pratiques, nous donnons des résultats théoriques de reconstructions CS avec acquisition de blocs de mesures pour un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  de support  $S$  fixé - et pas seulement  $s$ -parcimonieux. Nous proposons ainsi une nouvelle classe de matrices d'échantillonnage, compatibles avec de nombreux domaines d'applications.

**Abstract** – Compressed Sensing (CS) is an appealing framework for many applications. However, the sensing schemes suggested by CS theories are made of random isolated measurements, which can be incompatible with the physics of acquisition. To reflect the physical constraints of the imaging device, we introduce the notion of blocks of measurements: the sensing scheme is not a set of isolated measurements anymore, but a set of groups of measurements which may represent any arbitrary shape (radial lines for instance). Structured acquisition with blocks of measurements are easy to implement, and they provide good reconstruction results in practice. To fill the gap between CS theory and acquisitions made in practice, we provide recovery guarantees for vectors  $x \in \mathbb{C}^n$  with a fixed support  $S$ . This is in strong contrast with the usual works that consider the reconstruction of arbitrary  $s$ -sparse vectors. By doing so, we enrich the family of sensing matrices available for CS.

## 1 Introduction

Les résultats typiques d'échantillonnage compressé (CS) garantissent que si  $x \in \mathbb{C}^n$  est un vecteur  $s$ -parcimonieux, si la matrice d'échantillonnage  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est incohérente, alors  $x$  peut être reconstruit exactement via

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n, Ax=y} \|x\|_1. \quad (1)$$

avec seulement  $m \gtrsim s \ln(n)$  mesures [1]. Malgré des résultats récents, les théories existantes peinent à justifier le succès du CS dans les applications pratiques. Dans ce travail, nous cherchons à étendre l'applicabilité du CS en combinant deux nouveaux ingrédients : la parcimonie structurée et l'acquisition structurée.

Les matrices d'échantillonnage principalement étudiées par le CS sont (i) les matrices aléatoires à entrées i.i.d. (ii) les transformées orthogonales sous-échantillonnées aléatoirement. Les premières ont l'avantage d'être quasi-optimales [2], mais sont rares dans les domaines d'application. Les deuxièmes ont déjà plus d'intérêt d'un point de vue applicatif, puisque une transformée orthogonale (déterministe) peut modéliser la physique d'acquisition du système d'imagerie. Et même si elles ne vérifient pas toujours la propriété de RIP, elles peuvent apporter

de bonnes garanties de reconstructions si leur cohérence est faible [1]. Cependant, ces catégories de matrices restent peu utilisables en pratique. Prenons l'exemple de l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). En IRM, les données sont acquises dans l'espace de Fourier, et les images à reconstruire sont considérées parcimonieuses dans le domaine des ondelettes. Des théories standards de CS, peuvent justifier des stratégies d'échantillonnage à densité variable, voir Figure 1(a). Les points blancs dans la Figure 1(a) représentent les mesures prises dans le domaine de Fourier. Seulement 4,6% des échantillons permettent de reconstruire une image de bonne qualité. Cependant, l'acquisition de mesures isolées tirées aléatoirement en Fourier n'est pas envisageable en IRM : les mesures doivent rester le long de trajectoires continues et régulières. Par exemple, une stratégie très usitée en IRM est d'acquérir des lignes entières de coefficients de Fourier, voir Figure 1(c), et les reconstructions obtenues sont de bonne qualité. A notre connaissance, aucune théorie n'est capable d'expliquer ces résultats. Les seuls travaux considérant des mesures très structurées tels que [3] manquent d'expliquer leurs bons résultats pratiques car aucune hypothèse n'est faite sur la structure du support. Nous montrons dans ce papier que la structure de parcimonie joue un rôle crucial pour obtenir des garanties de re-

constructions quand l'acquisition est structurée.

Le plan du présent article est le suivant : dans la section 2, nous présentons le résultat principal dans un cadre général ; dans la section 3, nous déclinons le précédent résultat dans plusieurs cadres d'applications, ce qui d'une part montrera une cohérence avec l'état de l'art, et d'autre part illustrera l'extension des théories CS à des cas qui ne pouvaient être traités auparavant.

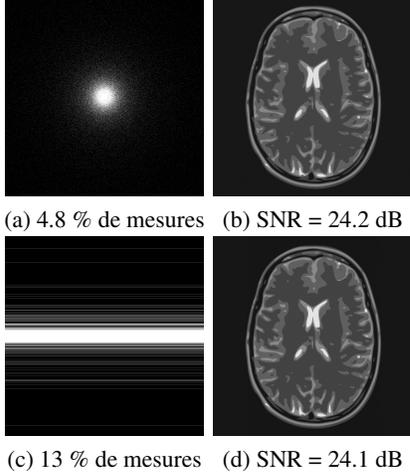


FIGURE 1 – Exemple de reconstruction d'une image  $2048 \times 2048$  à partir de (a) mesures isolées et (c) de blocs de mesures. Les reconstructions correspondantes via minimisation  $\ell_1$  sont présentées en (b) et (d).

## 2 Principaux résultats

### 2.1 Cadre général

Soit  $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice orthogonale représentant l'ensemble des projections linéaires possibles. Les vecteurs-lignes  $(a_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$  de  $A_0$  sont partitionnés en blocs  $(B_k)_{1 \leq k \leq M}$ , tels que  $B_k = (a_i^*)_{i \in \mathcal{I}_k} \in \mathbb{C}^{|\mathcal{I}_k| \times n}$  avec  $\bigsqcup_{k=1}^M \mathcal{I}_k = \{1, \dots, n\}$ . La matrice d'échantillonnage  $A$  est alors construite en tirant des blocs aléatoirement

$$A = \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi_{K_\ell}}} B_{K_\ell} \right)_{1 \leq \ell \leq m}, \quad (2)$$

où  $(K_\ell)_{1 \leq \ell \leq m}$  sont des copies i.i.d. de la variable aléatoire  $K$  telle que  $\mathbb{P}(K = k) = \pi_k$  pour tout  $1 \leq k \leq M$ . On notera que  $\mathbb{E} \left( \frac{B_k^* B_k}{\pi_k} \right) = \text{Id}$ .

### 2.2 De nouvelles quantités d'intérêt

La très grande majorité des papiers de CS utilisent la notion de cohérence ou les propriétés de Restricted Isometry Property (RIP) pour obtenir des résultats de reconstruction exacte. Ces quantités sont le bon outil lorsqu'on s'intéresse à la reconstruction d'un vecteur  $s$ -parcimonieux de support arbitraire. Un résultat important de ce papier est de proposer de nouvelles

quantités utiles lorsqu'on s'intéresse à la reconstruction d'un vecteur  $S$ -parcimonieux dont le support est  $S$ .

**Définition 2.1.** Soient le dictionnaire de blocs  $(B_k)_{1 \leq k \leq M}$ ,  $S \subset \{1, \dots, n\}$  et  $\pi$  une loi de probabilité sur  $\{1, \dots, M\}$ . On pose  $\Gamma(S, \pi) := \max(\Upsilon(S, \pi), \Theta(S, \pi))$ ,

$$\Theta(S, \pi) := \max_{1 \leq k \leq M} \frac{1}{\pi_k} \|B_k^* B_{k,S}\|_{\infty \rightarrow \infty} \quad (3)$$

$$\Upsilon(S, \pi) := \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{\|v\|_{\infty} \leq 1} \sum_{k=1}^M \frac{1}{\pi_k} |e_i^* B_k^* B_{k,S} v|^2, \quad (4)$$

où  $\|B\|_{\infty \rightarrow \infty} = \sup_{\|v\|_{\infty} \leq 1} \|Bv\|_{\infty}$ , et  $B_S$  est la matrice extraite de  $B$  dont les colonnes sont indexées par  $S$ .

### 2.3 Garanties de reconstruction exacte

Le théorème suivant apporte des garanties de reconstruction quand l'acquisition est structurée par blocs.

**Théorème 2.2.** Soit  $x \in \mathbb{C}^n$  un vecteur de support  $S$  tel que  $|S| = s \geq 16$ . Fixons  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Soit  $A$  la matrice d'échantillonnage définie en (2). Si le nombre de blocs satisfait

$$m \geq 73 \cdot \Gamma(S, \pi) \ln(64s) \left( \ln \left( \frac{9n}{\varepsilon} \right) + \ln \ln(64s) \right), \quad (5)$$

alors  $x$  est l'unique solution du problème de minimisation (1) avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .

On notera que la borne sur  $m$  donnée dans le Théorème 2.2 dépend explicitement du support  $S$  et de la probabilité de tirage  $\pi$ . Illustrons dès à présent l'intérêt du Théorème 2.2 dans des cas concrets.

## 3 Applications

### 3.1 Mesures isolées et signaux $s$ -parcimonieux

Dans un premier temps, nous pouvons supposer que les blocs ne sont constitués que d'un seul vecteur ligne, ce qui revient aux acquisitions CS standards de mesures isolées. Ceci revient à choisir  $B_k = a_k^*$  pour  $1 \leq k \leq n$  avec  $M = n$ , où  $a_k^*$  sont les lignes de la matrice orthogonale  $A_0$ . La matrice de mesure peut alors s'écrire comme suit

$$A = \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi_{K_\ell}}} a_{K_\ell}^* \right)_{1 \leq \ell \leq m}, \quad (6)$$

où  $(K_\ell)_{1 \leq \ell \leq m}$  sont des copies i.i.d. de  $K$  vérifiant  $\mathbb{P}(K = k) = \pi_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$ .

Appliquons le Théorème 2.2 quand seule la parcimonie  $s$  du signal est connue.

**Corollaire 3.1.** Soit  $x \in \mathbb{C}^n$  un vecteur  $s$ -parcimonieux. Supposons que  $A$  est la matrice d'échantillonnage définie en (6). Si le nombre de mesures vérifie

$$m \geq C \cdot s \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\|a_k\|_{\infty}^2}{\pi_k} \ln(s) \ln \left( \frac{n}{\varepsilon} \right), \quad (7)$$

alors  $x$  est l'unique solution du problème de minimisation (1) avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .

La borne (7) est similaire à celle de [1], à une constante multiplicative et un terme logarithmique près.

### 3.2 Mesures isolées et parcimonie structurée

Dans les applications, la matrice de mesure peut être partiellement cohérente. Le corollaire précédent devient insuffisant à expliquer le succès du CS. Il est alors nécessaire de prendre en compte des informations supplémentaires sur le support  $S$  du signal.

Illustrons le Théorème 2.2 sur un exemple pratique. Soit  $A_0 = \mathcal{F}\phi^*$ , où  $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la transformée de Fourier 1d, et  $\phi^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la transformée inverse en ondelettes 1d. On décompose le signal en ondelettes au niveau maximal  $J = \log_2(n) - 1$ . On définit la partition dyadique  $(\Omega_j)_{0 \leq j \leq J}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , i.e.  $\Omega_0 = \{1\}$ ,  $\Omega_1 = \{2\}$ ,  $\Omega_2 = \{3, 4\}$ ,  $\dots$ ,  $\Omega_J = \{n/2 + 1, \dots, n\}$ . On définit également :  $j : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, J\}$  par  $j(u) = j$  si  $u \in \Omega_j$ .

**Corollaire 3.2.** Soit  $S \subset \{1, \dots, n\}$  tel que  $|S \cap \Omega_j| = s_j$  pour  $0 \leq j \leq J$ . Soit  $x \in \mathbb{C}^n$  un vecteur supporté par  $S$ . La matrice de mesure  $A$  est définie en (6) avec  $A_0$  la transformée Fourier-Haar. On choisit  $\pi_k$  constant par niveau, i.e.  $\pi_k = \tilde{\pi}_{j(k)}$  :

$$\tilde{\pi}_j = \frac{2^{-j} \sum_{p=0}^J 2^{-|j-p|/2} s_p}{\sum_{\ell=1}^n 2^{-j(\ell)} \sum_{p=0}^J 2^{-|j(\ell)-p|/2} s_p}.$$

Si

$$m \gtrsim \sum_{j=0}^J \left( s_j + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^J 2^{-|j-p|/2} s_p \right) \ln(s) \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right). \quad (8)$$

alors  $x$  est l'unique solution du problème de minimisation (1) avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .

Notons que ce résultat est très similaire aux travaux récents de [4]. Ce corollaire peut être interprété de la façon suivante : le nombre de mesures au niveau  $j$  doit dépendre essentiellement du degré de parcimonie restreinte à ce niveau ; la parcimonie des autres niveaux vient également interférer mais son influence est d'autant plus atténuée que la distance entre les niveaux croît. Notons aussi l'intérêt d'un théorème dépendant du support  $S$  : si on a a priori sur le signal (ici une parcimonie structurée par sous-bandes), on peut exploiter cette information pour i) dériver des densités de tirage optimales et ii) étendre l'applicabilité du CS dans des cas non-couverts par la théorie actuelle.

### 3.3 Acquisition structurée et parcimonie structurée

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où les blocs ne sont plus de simples vecteurs lignes de  $A_0$  mais un ensemble de lignes de  $A_0$ .

#### 3.3.1 Les limites de l'acquisition structurée

Dans [3], les auteurs mettent en exergue une des principales limites du CS lorsque l'on échantillonne des lignes horizontales de transformées tensorielles. Ce cadre est notamment très utilisé en imagerie, cf [5].

**Proposition 3.3** ([3]). Soit  $A_0 = \phi \otimes \phi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une transformée 2d séparable, où  $\phi \in \mathbb{C}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$  est une transformée orthogonale. Les blocs de mesures consistent en  $\sqrt{n}$  lignes horizontales de l'espace d'acquisition 2d, i.e. pour  $1 \leq k \leq \sqrt{n}$

$$B_k = (\phi_{k,1}\phi, \dots, \phi_{k,\sqrt{n}}\phi).$$

Si le nombre  $m$  de blocs mesurés est inférieur à  $\min(2s, \sqrt{n})$ , alors il n'existe pas de décodeur  $\Delta$  tel que  $\Delta(Ax) = x$  pour tout vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$   $s$ -parcimonieux. Autrement dit, le nombre minimal  $m$  de blocs distincts requis pour identifier tout vecteur  $s$ -parcimonieux est nécessairement plus grand que  $\min(2s, \sqrt{n})$ .

Ce théorème semble indiquer que pour reconstruire un vecteur  $s$ -parcimonieux, il faut tirer  $s$  blocs de  $\sqrt{n}$  mesures, soit un total de  $s\sqrt{n}$  mesures isolées. A première vue, cette borne théorique semble entrer en contradiction avec les résultats observés en pratique comme ceux de la Figure 1(d) ou comme la stratégie proposée dans [5]. La subtilité est que si on ne peut pas reconstruire tous les vecteur  $s$ -parcimonieux, on peut en reconstruire une sous-classe importante pour les applications. Par la suite, nous montrons comment le Théorème 2.2 peut nous affranchir de telles limites.

#### 3.3.2 Passer outre ces limites

Dans ce paragraphe, nous montrons l'importance d'hypothèses supplémentaires telles que la parcimonie structurée pour expliquer le succès du CS dans les applications.

**Corollaire 3.4.** Soit  $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  la transformée de Fourier 2d. Soit  $x$  un signal qui peut être représenté en 2d, et tel que son support  $S$  est concentré sur seulement  $q$  lignes horizontales de l'espace. En choisissant une stratégie de tirage uniforme entre les lignes, i.e.  $\pi_k^* = 1/\sqrt{n}$  pour  $1 \leq k \leq \sqrt{n}$ , le nombre  $m$  de lignes horizontales suffisant pour reconstruire  $x$  avec probabilité  $1 - \varepsilon$  est

$$m \geq C \cdot q \cdot \ln(s) \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right).$$

Le nombre  $m$  de lignes suffisant pour la reconstruction exacte de  $x$  n'est plus de l'ordre de  $s$  comme le prédisait la Proposition 3.3, mais de l'ordre du nombre de lignes horizontales constituant le support !

#### 3.3.3 Conséquences pour l'échantillonnage en IRM

Nous nous intéressons maintenant à un cas pratique, celui de l'échantillonnage en IRM. On considère une matrice  $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , produit de la transformée de Fourier 2d  $\mathcal{F}_{2D}$  avec la transformée 2d inverse en ondelettes  $\Phi^*$ . On souhaite reconstruire un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  (qui peut être considéré comme une transformée en ondelettes de taille  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ ). Soit  $J = \log_2(\sqrt{n}) -$

1 et posons  $(\tau_j)_{0 \leq j \leq J}$  la partition dyadique de l'ensemble  $\{1, \dots, \sqrt{n}\}$ , i.e.  $\tau_0 = \{1\}$ ,  $\tau_1 = \{2\}$ ,  $\tau_2 = \{3, 4\}$ ,  $\dots$ ,  $\tau_J = \{\sqrt{n}/2 + 1, \dots, \sqrt{n}\}$ . Soit  $j : \{1, \dots, \sqrt{n}\} \rightarrow \{0, \dots, J\}$  définie par  $j(u) = j$  si  $u \in \tau_j$ . Enfin, définissons  $\Omega_{\ell, \ell'} = \tau_\ell \times \tau_{\ell'}$ , pour  $0 \leq \ell, \ell' \leq J$ .

**Définition 3.5.** Soit  $S = \text{supp}(x)$ , on définit

$$s_\ell^c := \max_{0 \leq \ell' \leq J} \max_{k \in \tau_{\ell'}} |S \cap \Omega_{\ell, \ell'} \cap C_k|, \quad (9)$$

où  $C_k$  représente les indices correspondant à la  $k$ -ème ligne verticale.

La quantité  $s_\ell^c$  représente le degré de parcimonie maximal de  $x$  restreint à ses colonnes et aux niveaux  $(\Omega_{\ell, \ell'})_{1 \leq \ell' \leq J}$ .

**Corollaire 3.6.** Soit  $x \in \mathbb{C}^n$  un vecteur supporté par  $S$ . Fixons  $A_0$  comme la transformée 2d Fourier-Haar. Considérons que les blocs de mesures sont les  $\sqrt{n}$  lignes horizontales de l'espace 2d. On choisit  $(\pi_k)_{1 \leq k \leq \sqrt{n}}$  constant par niveau, i.e.  $\pi_k = \tilde{\pi}_{j(k)}$  :

$$\pi_k = \frac{2^{-j(k)} \sum_{r=0}^J 2^{-|j-r|/2} s_r^c}{\sum_{\ell=1}^{\sqrt{n}} 2^{-j(\ell)} \sum_{r=0}^J 2^{-|j(\ell)-r|/2} s_r^c}.$$

Si le nombre  $m$  de lignes horizontales acquises vérifie

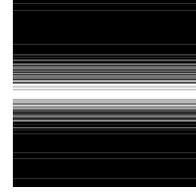
$$m \gtrsim \sum_{j=0}^J \left( s_j^c + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^J 2^{-|j-r|/2} s_r^c \right) \cdot \ln(s) \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right).$$

alors  $x$  est l'unique solution du problème de minimisation (1) avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .

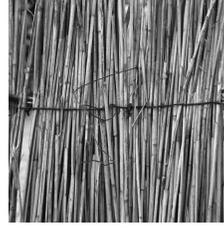
Ce résultat indique que le nombre de lignes à acquérir dans le niveau "horizontal"  $j$  dépend essentiellement de la quantité  $s_j^c$ . De plus, le Corollaire 3.6 s'affranchit totalement de la condition  $m \geq \min(2s, \sqrt{n})$  requise par la Proposition 3.3, ceci au prix d'une meilleure connaissance de la structure du support. Finalement, le Corollaire 3.6 révèle que plus l'acquisition est structurée, plus le support doit être structuré afin d'assurer des résultats de reconstruction exacte. On notera que cette structure dans le support est explicitement donnée. Nous illustrons le Corollaire 3.6 dans la Figure 2.

## 4 Conclusion

Les contributions présentées dans ce papier sont multiples : (i) nous donnons des garanties de reconstruction d'un signal  $x$  à support  $S$  fixé, quand l'acquisition est structurée par blocs, ce qui diffère des stratégies standards du CS ; (ii) pour ce faire, nous proposons une nouvelle classe de matrices d'échantillonnage ; (iii) nous montrons que l'utilisation de transformées cohérentes (de par les exemples où  $A_0$  est l'identité ou la matrice Fourier-Haar) devient possible, à condition d'avoir un certain *a priori* sur le support  $S$  ; (iv) nous montrons qu'une acquisition structurée par blocs, cadre très utilisé en pratique, donne de bons résultats de reconstruction théoriques, à condition que la parcimonie du support soit structurée en conséquence.



9.8% de mesures



(a) Image originale

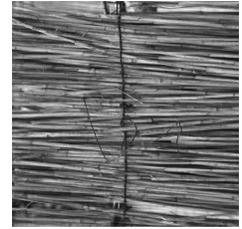


(b) SNR = 27.8 dB

$$s^c = (16, 16, 32, 59, 81, 75, 48)$$



(c) Image originale



(d) SNR = 14.7 dB

$$s^c = (16, 16, 32, 64, 124, 240, 411)$$

FIGURE 2 – Dans cet exemple, on cherche à reconstruire une image, en mesurant tous ses coefficients de Fourier, le long de lignes horizontales. Cette stratégie est similaire à ce qui se fait en IRM. L'image est de taille  $2048 \times 2048$ . (a) et (c) sont les images à reconstruire. Notons que l'image (c) est la même que celle en (a) mais tournée de  $90^\circ$ . On évalue les quantités  $s^c = (s_j^c)_{1 \leq j \leq 7}$  pour (a) et (c). Nous utilisons pour les 2 reconstructions le schéma d'échantillonnage en haut de la figure. Les images en (b) et (d) sont les reconstructions correspondantes via minimisation  $\ell_1$ . On voit que la reconstruction de (b) est de très bonne qualité alors que la reconstruction de (c) est de mauvaise qualité. Ce résultat est prédit par le Corollaire 3.6.

## Références

- [1] E. Candès and Y. Plan. A probabilistic and ripless theory of compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 57(11) :7235–7254, 2011.
- [2] E. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(12) :4203–4215, 2005.
- [3] J. Bigot, C. Boyer, and P. Weiss. An analysis of blocks sampling strategies in compressed sensing. *arXiv preprint arXiv :1310.4393*, 2014.
- [4] B. Adcock, A. Hansen, and B. Poon, C. and Roman. Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing. *arXiv preprint arXiv :1302.0561*, 2013.
- [5] M. Lustig, D. Donoho, and J. Pauly. Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic resonance in medicine*, 58(6) :1182–1195, 2007.