

# Sur l'aspect banc de filtres de l'EMD multivariée

Ali KOMATY<sup>1,2</sup> et Abdel BOUDRAA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IRENav (EA3634), Ecole Navale  
BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest Cedex 9, France

<sup>2</sup>Lab-STICC (UMR CNRS 6285), ENSTA Bretagne  
2, rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9, France  
akomaty@gmail.com, boudra@ecole-navale.fr

**Résumé** – L'objectif de ce travail est d'analyser le comportement statistique de la décomposition modale empirique multivariée (MEMD) dans le cas d'un bruit large bande stationnaire. Partant du modèle général du bruit Gaussien fractionnaire (fGn), nous conduisons des simulations numériques qui mettent en évidence, comme dans le cas de l'EMD, le comportement en banc de filtres du MEMD pour chaque canal du signal multivarié d'entrée. De plus, en première approximation, le MEMD se comporte comme un banc de filtres dyadique avec des filtres passe bande de facteur de qualité constant. Par ailleurs, nous observons une auto-similarité entre les spectres des modes extraits. Finalement, cette structure hiérarchique des modes du MEMD est exploitée pour estimer l'exposant de Hurst du fGn. Dans l'ensemble, nous généralisons les résultats obtenus dans le cas de l'EMD [3] au MEMD.

**Abstract** – In this paper the behavior of the Multivariate Empirical Mode Decomposition (MEMD) in stochastic situation involving boardband noise is analyzed. We report numerical experiments based on fractional Gaussian noise (fGn) supporting the claim that, similarly to EMD, MEMD acts as filter bank on each channel of the multivariate input signal. Furthermore, in first approximation, this equivalent filter bank structure is dyadic with constant-Q band-pass filters. Moreover, a self-similarity of the band-pass filters of the extracted modes is observed. Finally, the hierarchy of the extracted modes is exploited for getting access to the Hurst exponent of the fGn. Overall, the revealed MEMD properties generalize what was previously established for EMD [3] to MEMD.

## 1 Introduction

La décomposition modale empirique (EMD) est une méthode permettant de décomposer de manière adaptative tout signal en un nombre réduit de composantes modulées en amplitude et en fréquence (AM-FM) [1]. Malgré son caractère intuitive, elle est uniquement définie comme la sortie d'un algorithme et donc, pour comprendre son comportement (possibilités et limitations) des simulations intensives dans des situations contrôlées sont nécessaires [2],[3]. Ainsi, il a été montré sur la base de simulations que l'EMD, appliquée à un bruit large bande comme le bruit Gaussien fractionnaire (fGn), a une structure de banc de filtres dyadique qui rappelle ce qu'on observe avec une transformée en ondelettes [3]. À la différence des approches classiques à base d'ondelettes, l'extraction des modes empiriques est faite localement avec aucun noyau ou filtre pré-déterminé guidant la décomposition. Cet aspect banc de filtres permet ainsi d'exploiter la décomposition des signaux par l'EMD à des fins, par exemple, d'estimation de l'exposant de Hurst du fGn [3], de filtrage [4], de codage [5] ou de tatouage des signaux [6]. Néanmoins, l'EMD reste limitée aux signaux univariés et son extension au traitement multidimensionnel composante par composante n'est pas optimale. Plus exactement, cette extension ne permet pas de garantir la concordance en termes de réponses fréquentielles des modes du même indice et

par conséquent la comparaison mode à mode n'as pas de sens. Pour pallier à cette limite, une version multidimensionnelle de l'EMD (MEMD pour multivariate EMD) a été récemment proposée par Rehman et Mandic [7]. L'objectif de ce travail est de chercher à mieux comprendre le comportement statistique du MEMD en s'intéressant à la décomposition du fGn. Ce modèle de bruit a été choisi car c'est une généralisation du bruit blanc et il permet d'obtenir aussi bien des bruits basse fréquence que haute fréquence [8].

## 2 Principe du MEMD

Le MEMD est une extension de l'EMD standard (ou univarié) pour la décomposition des signaux multicanaux (multivariés) [7]. Pour les signaux multivariés la notion de modes oscillatoires adoptée dans l'EMD est confuse et les extrema ne peuvent pas être définis directement. Contrairement à l'EMD, qui s'appuie sur la notion d'oscillation définie à partir des extrema locaux du signal, le MEMD est basé sur le concept de séparation de rotations (modes rotationnels). Ainsi, les données multivariées contiennent des modes de rotation couplés qui peuvent être vus comme une généralisation des modes extraits par l'EMD classique. Une propriété importante du MEMD est l'alignement des modes qui garantit que le nombre de rotations extraites est le même pour tous les canaux et assure une concor-

dance en terme de contenu fréquentiel et de propriétés d'échelle des modes de même indice [7]. L'objectif est aussi de prendre en compte les liens possibles entre les différents canaux. Sur le principe, le MEMD reprend l'aspect récursif de l'EMD mais avec des opérateurs de tamisage différents de l'approche originale. En effet, la recherche des extrema dans un espace multidimensionnel est très compliquée et les interpolations des enveloppes multidimensionnelles ne peuvent pas être obtenues directement. Ce problème d'extrema locaux est résolu dans le cas du signal multivarié à  $P$  canaux en utilisant le concept de projection sur  $(P-1)$  sphères [7]. Ainsi, une enveloppe à  $P$  dimensions est obtenue par projection du signal multivarié sur les différentes directions de l'espace à  $P$ -dimensions. Ces directions de l'espace sont construites en considérant un ensemble de points sur une sphère générée par une séquence de Hammersley à faible discrédance. Les différentes enveloppes s'appuyant sur les extrema des projections, obtenues en pratique par une interpolation spline cubique, sont moyennées pour estimer la valeur moyenne du signal multivarié. Soit  $\mathbf{x}[n]$  un signal multivarié à  $P$  canaux. Le MEMD réalise une décomposition de  $\mathbf{x}[n]$  sur un nombre de modes rotationnels couplés restreint comme suit [7] :

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}_m[n] + \mathbf{d}[n] \quad (1)$$

où  $M$  est la profondeur de la décomposition à  $P$  dimensions, les composantes  $\mathbf{c}_m$  sont les modes rotationnels et  $\mathbf{d}[n]$  est le résidu. A l'instar de l'EMD classique, le MEMD considère que tout signal multivarié peut être décrit comme une somme de rotation rapide et d'une rotation lente.

### 3 Modèle fGn

Les fGn sont définis comme des processus d'accroissements du mouvement Brownien fractionnaire. Ces processus sont auto-similaires à accroissements stationnaires, de moyenne nulle et entièrement caractérisés par les statistiques du second ordre [9]. A temps discret, le fGn est une série temporelle  $\{x_H[n], n \in \mathbb{Z}\}$  indexée par un seul paramètre : l'exposant de Hurst et telle que sa fonction d'auto-corrélation est donnée par

$$\begin{aligned} r_H[k] &= \mathbb{E}\{x_H[n]x_H[n+k]\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}) \end{aligned} \quad (2)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ . Le cas  $H = 0.5$  se réduit à celui du bruit blanc (décorrélé) et les autres valeurs,  $H \neq 0.5$ , introduit des corrélations négatives pour  $H \in [0, 0.5]$  et positives pour  $H \in [0.5, 1]$  (longue mémoire). La transformée de Fourier (TF) de la relation (2) est la densité spectrale de puissance (ou DSP) de la série temporelle :

$$S_H(f) = C\sigma^2 |e^{j2\pi f} - 1|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|f+k|^{2H+1}} \quad (3)$$

avec  $|f| < 0.5$ . Pour  $H \neq 0.5$  et  $|f| \rightarrow 0$ , l'équation (3) peut être approximée par

$$S_H(f) \simeq C(2\pi\sigma)^2 |f|^{1-2H} \quad (4)$$

Ainsi les fGns peuvent être séparés en deux classes : quand  $H \in [0, 0.5]$ ,  $S_H(0) = 0$  et le spectre est de type passe-haut et quand  $H \in [0.5, 1]$ ,  $S_H(0) = 0 \rightarrow \infty$  le spectre est de type passe-bas (divergence en  $1/f$ ) [8].

## 4 Conditions de simulation

Des simulations numériques ont été conduites pour des valeurs de  $H$  allant de 0.1 à 0.9. Pour les illustrations graphiques seules les résultats de 4 valeurs de  $H$  sont présentés. La longueur de la série temporelle fGn a été fixée à  $N = 1024$ . Pour chaque valeur de  $H$ ,  $J = 500$  réalisations indépendantes de fGn ont été générées en utilisant les algorithmes décrits dans [10] ( $H \in [0.5, 1]$ ) and [11] ( $H \in [0, 0.5]$ ). Le nombre de canaux est fixé à  $P = 8$ . Dans la suite nous utilisons les notations suivantes :  $\mathbf{x}_H^{(j)}[n]$  est la  $j^{eme}$  série fGn de dimension  $P$  et de taille  $N$  avec  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ .  $c_{m,p,H}^{(j)}[n]$  est la composante  $p$  du mode  $m$  extrait de la  $j^{eme}$  série fGn où  $p \in \{1, 2, \dots, P\}$ . Pour analyser le comportement des modes, une estimation spectrale a été réalisée comme suit :

$$\hat{S}_{m,p,H}(f) := \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \hat{r}_{m,H}[\tau] w[\tau] \exp(-i2\pi f\tau), \quad |f| < \frac{1}{2} \quad (5)$$

où  $w$  est une fenêtre de Hamming, et

$$\hat{r}_{m,p,H}[\tau] = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|\tau|} c_{m,p,H}^{(j)}[n] c_{m,p,H}^{(j)}[n+|\tau|] \right) \quad (6)$$

est la valeur moyenne d'ensemble sur les  $J$  réalisations de l'estimation de la fonction d'autocorrélation du mode d'indice  $m$  et  $|\tau| \leq N-1$ . La structure du banc de filtres est analysée, quantitativement, en utilisant la représentation graphique du nombre moyen de passage par zéro (ZCs)  $z_H[m]$  de chaque mode. Les résultats présentés dans la figure 2 montrent que cette fonction peut être approximée par :

$$z_H[m] \propto \rho_H^{-m} \quad (7)$$

où est le facteur d'échelle  $\rho_H$  est estimé par la méthode des moindres carrés à partir des données de la figure 2. Ce facteur représentant le taux de décroissance des ZCs quand l'indice  $m$  augmente a été estimé de la figure 2 par

$$\rho_H \approx 1.772 + 0.06 \left( H - \frac{1}{2} \right) - 0.02 \left( H - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (8)$$

Pour l'analyse de l'auto-similarité entre les spectres, l'objectif est de vérifier la relation entre les spectres des modes :

$$S_{m,p,H}(f) = \rho_H^{a(m-l)} S_{l,p,H}(\rho_H^{m-l} f) \quad (9)$$

TABLE 1 – Valeurs estimées et leurs écart-types (Moy ± std) par les deux estimateurs pour chaque valeur de  $H$ . Les meilleurs résultats sont indiqués en gras.

Estimateur	TOD	MEMD
$H = 0.1$	0.0216 ± 0.0751	-0.0128 ± <b>0.073</b>
$H = 0.2$	<b>0.1692</b> ± 0.1038	0.1487 ± <b>0.068</b>
$H = 0.3$	<b>0.2861</b> ± 0.1160	0.2778 ± <b>0.066</b>
$H = 0.4$	<b>0.4013</b> ± 0.1235	0.3983 ± <b>0.069</b>
$H = 0.5$	0.4965 ± 0.1225	<b>0.5000</b> ± <b>0.067</b>
$H = 0.6$	0.6005 ± 0.1179	<b>0.6002</b> ± <b>0.064</b>
$H = 0.7$	0.6937 ± 0.1215	<b>0.7003</b> ± <b>0.065</b>
$H = 0.8$	<b>0.8048</b> ± 0.1174	0.8154 ± <b>0.064</b>
$H = 0.9$	<b>0.9006</b> ± 0.1228	0.9172 ± <b>0.065</b>

où  $S_{m,p,H}(f)$  est la DSP de la composante  $p$  du mode  $m$ , et  $a = 1 - 2H$  et  $l > m \geq 2$ . La vérification est faite via le résultat de la figure 3. Enfin, pour l'estimation de la valeur de  $H$  par le MEMD, nous utilisons la même stratégie que celle du EMD classique [12] à savoir le calcul de la pente sur le diagramme représentant la variance  $V_{p,H}[m]$  de la composante  $p$  du mode  $m$  :

$$V_{p,H}[m] \propto \rho_H^{2(H-1)m} \quad (10)$$

En prenant le logarithme de l'équation (10), nous obtenons avec  $\rho_H \approx 2$

$$\hat{H} = 1 + \frac{s_H}{2} \quad (11)$$

$s_H$  est la pente de l'estimateur MEMD.

## 5 Résultats

Pour les 4 valeurs de  $H$  (0.1, 0.3, 0.7, 0.9) nous traçons le digramme log-log le spectre moyen des 9 premiers modes en fonction de la fréquence normalisée. Les graphiques de la figure 1 montrent que dans le cas du fGn, le MEMD s'interprète comme un banc de filtres passe-bande à  $Q$  constant pour  $m \geq 2$ . Le mode # 1 correspond à un filtre passe-haut. Cet aspect banc de filtre dyadique est confirmé, quantitativement, par l'alignement et la décroissance du nombre ZCs  $z_H[m]$  en fonction de l'indice du mode  $m$ , comme indiqué par la figure 2. Le graphique de la figure 2 permet de vérifier la relation (7). Pour mesurer la ressemblance entre les spectres des modes, ces derniers ont été normalisés. Ces spectres ont été calculés en utilisant la relation (9). La figure 3 montre une bonne superposition des spectres normalisés. Ces résultats mettent en évidence l'auto-similarité de la décomposition par MEMD. Dans l'ensemble les spectres se superposent bien quelque soit la valeur de  $H$ . Les résultats de calcul de  $H$  avec les estimateurs MEMD et celui basé sur la transformée en ondelettes (TOD) sont donnés dans les tableaux 1 et 2. Nous donnons pour chaque valeur de  $H$ , la moyenne de l'estimation et l'écart-type associé. Les résultats du tableau 1 montrent que les performances des deux estimateurs sont globalement comparables avec une légère préférence pour l'estimateur TOD. Par contre les résultats du tableau 2,

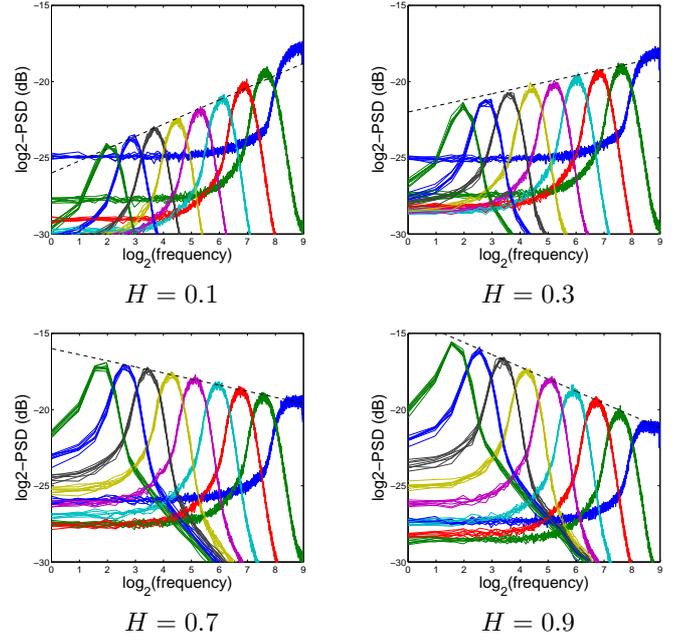


FIGURE 1 – DSPs des modes en fonction de  $\log_2(f)$ , pour  $H \in \{0.1, 0.3, 0.7, 0.9\}$ . Les bandes de fréquences qui se chevauchent correspondent aux modes du même indice, montrant ainsi l'alignement des modes extraits par le MEMD. Nous superposons sur les graphiques les DSPs théoriques.

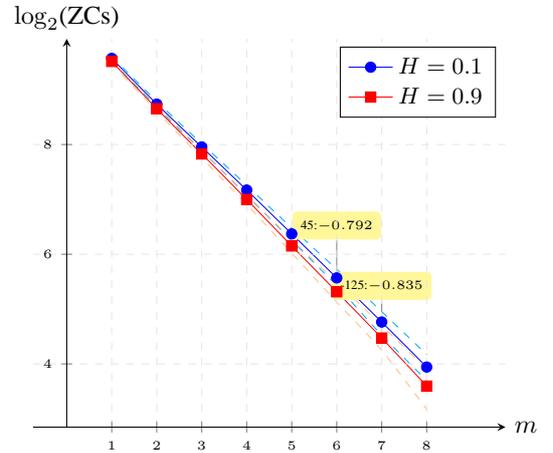


FIGURE 2 – Logarithme de ZCs en fonction de l'indice du mode  $m$ . Les pentes de la régression sont approximativement égales à  $-0.8$  pour  $H=0.1$  (Carrés) et  $-0.84$  pour  $H=0.9$  (Circles). Les lignes en pointillées correspondent au 5<sup>ème</sup> et 95<sup>ème</sup> quantiles.

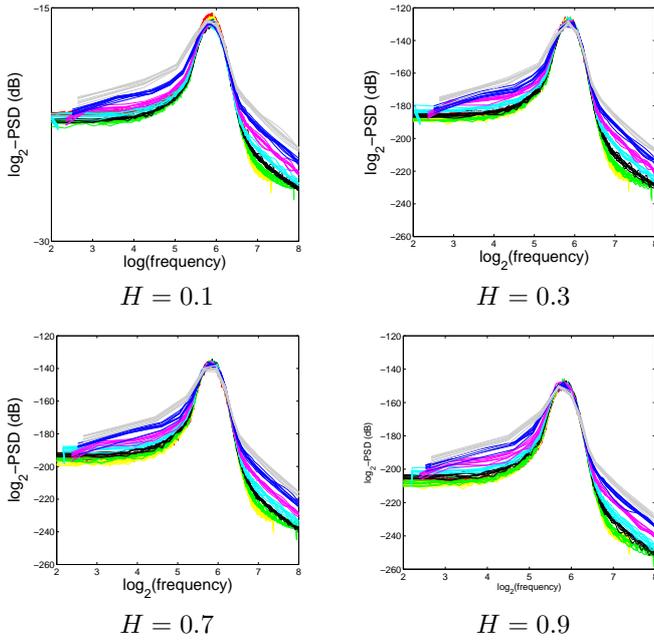


FIGURE 3 – Les PSDs représentées en fonction de  $\log_2(f)$ , pour  $H \in \{0.1, 0.3, 0.7, 0.9\}$ . Le chevauchement des spectres est obtenu en utilisant la relation (9).

TABLE 2 – Biais des deux estimateurs pour chaque valeur de  $H$ . Les meilleurs résultats sont indiqués en gras.

Estimateur	TOD	MEMD
$H = 0.1$	0.0211	<b>0.0170</b>
$H = 0.2$	0.0150	<b>0.0074</b>
$H = 0.3$	0.0139	<b>0.0050</b>
$H = 0.4$	0.0152	<b>0.0049</b>
$H = 0.5$	0.0150	<b>0.0045</b>
$H = 0.6$	0.0139	<b>0.0041</b>
$H = 0.7$	0.0148	<b>0.0044</b>
$H = 0.8$	0.0138	<b>0.0044</b>
$H = 0.9$	0.0151	<b>0.0046</b>

montrent que l'estimateur à base de MEMD est plus robuste, avec les valeurs de biais les plus faibles.

## 6 Conclusions

Dans cet article nous avons mis en évidence, sur la base de simulations numériques contrôlées, le fait que le MEMD appliqué au fGn peut s'interpréter comme un banc de filtres passe-bande à surtension constante. Les résultats d'analyse spectrale montrent qu'il y a une ressemblance entre les spectres des modes extraits par le MEMD. Plus exactement, les spectres normalisés de ces modes rotationnels mettent en évidence la structure d'autosimilarité de ces derniers. Comme dans le cas de l'EMD classique, les résultats obtenus montrent que la stratégie d'estimation du coefficient de Hurst utilisant la dépendance de la variance de la décomposition en fonction de l'échelle, est transposable au cas du MEMD. Les résultats d'estimation

du  $H$  par MEMD comparés à ceux obtenus par l'estimateur basé sur la TOD sont prometteurs. L'ensemble de ces résultats et des propriétés mise en évidence pour le MEMD appliqué aux signaux multivariés généralise ceux obtenus dans le cas de l'EMD univarié [3]. Ces résultats généralisent aussi ceux reportés récemment dans la littérature dans le cas d'un bruit blanc Gaussien [13] au cas du fGn.

## Références

- [1] N. Huang et al., "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proc. Royal Society of London*, vol. 454, no. 1971, pp. 903-995, 1998.
- [2] P. Flandrin et P. Goncalves, "Sur la décomposition modale empirique," *Colloque GRETSI*, pp. 1-14, 2003.
- [3] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Goncalves, "Empirical mode decomposition as a filter bank," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 11, no. 5, pp. 112-114, 2004.
- [4] A.O. Boudraa and J.C. Cexus, "EMD-based signal filtering," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 56, no. 21, pp. 2196-2202, 2007.
- [5] K. Khaldi and A.O. Boudraa, "On signals compression by EMD," *IEE Electronics Lett.*, vol. 48, no. 21, pp. 1159-1160, 2012.
- [6] K. Khaldi and A.O. Boudraa, "Audio watermarking via EMD," *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 675-682, 2013.
- [7] N.U. Rehman and D. Mandic, "Multivariate empirical mode decomposition," *Proc. Royal Society of London*, vol. 466, no. 2117, pp. 1291-1302, 2010.
- [8] G. Rilling, *Décompositions Modales Empiriques. Contributions à la théorie, l'algorithmie et l'analyse de performances*, Thèse de Doctorat, ENS Lyon, 2007.
- [9] B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM review*, vol. 10, no. 4, pp. 422-437, 1968.
- [10] C.R. Dietrich and G.N. Newsam, "Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance Matrix," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 18, no. 4, pp.1088-1107, 1997.
- [11] S.B. Lowen, "Efficient generation of fractional Brownian motion for simulation of infrared focal-plane array calibration drift," *Methodol. Comput. Appl. Prob.*, vol. 1, no. 4, pp.445-456, 1999.
- [12] G. Rilling, P. Flandrin et P. Goncalves, "Empirical mode decomposition, fractional Gaussian noise and Hurst exponent estimation," *Proc. ICASSP*, vol. 4, pp.445-456, 2005.
- [13] N.U. Rehman and D. Mandic, "Filter bank property of multivariate empirical mode decomposition," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 59, no. 5, pp. 2421-2426, 2011.