

Reconstruction et filtrage linéaire avec échantillonnage irrégulier

David BONACCI, Bernard LACAZE

Laboratoire Télécommunications Spatiales et Aéronautiques

7 boulevard de la gare, 31500 Toulouse, France

david.bonacci@tesa.prd.fr, bernard.lacaze@tesa.prd.fr

Résumé – Cet article traite du problème de l'échantillonnage non uniforme dans le cas des processus aléatoires. Une nouvelle méthode est proposée permettant d'effectuer une reconstruction exacte du signal avec une meilleure vitesse de convergence en termes de nombre d'échantillons et un filtrage linéaire directement à partir des échantillons non uniformes. Ce procédé peut être appliqué à des signaux de type passe-bas comme à des signaux de type passe-bande.

Abstract – The problem of non uniform sampling in the case of random processes is considered in this paper. A method is proposed allowing to perform exact signal reconstruction with a better convergence speed in terms of number of samples and linear filtering directly from non-uniform samples. The method can be applied to either lowpass or bandpass signals.

1 Introduction

Le problème considéré dans cet article est la reconstruction d'un processus aléatoire stationnaire échantillonné à des instants non périodiques mais connus. Il étend des résultats précédents concernant l'échantillonnage non uniforme de fonctions à énergie finie. Il est également possible, sans complexité supplémentaire, de déduire à la fois la Transformée de Fourier (et le spectre) du signal et d'avoir accès à des versions filtrées du processus. Une telle situation (instants non périodique mais connus) se rencontre dans de nombreuses applications comme la détection de planètes extra-solaires avec l'observation d'un comportement sinusoïdal de la vitesse radiale ou de l'éclat d'une étoile observée en raison de son interaction avec la planète à détecter (mesures effectuées uniquement lorsque l'étoile est visible) ou l'utilisation d'interféromètres composés d'un ensemble de miroirs de petite taille : des défauts de fabrication conduisent à une distribution spatiale non uniforme des miroirs mais leur position peut être mesurée avec une grande précision et peut donc être supposée parfaitement connue. Les contributions de ce travail sont les suivantes :

- Des formules de reconstruction exactes sont démontrées.
- Possibilité de réaliser une estimation spectrale et un filtrage numérique linéaire directement à partir des échantillons non uniformes.
- Applicabilité des formules à des réalisations de processus aléatoires.
- Application directe à des processus passe-bande échantillonnés en-dessous de la fréquence de Nyquist, du moment que la bande de fréquence est connue approximativement, sans besoin de translation préalable du spectre.

Dans le contexte d'un échantillonnage irrégulier pour lequel les instants d'échantillonnage ne sont pas espacés régulièrement

mais supposés connus sans erreur, beaucoup de formules de reconstruction approximatives existent dans la littérature comme les méthodes d'interpolation par polynômes ou splines ([1], [2], [3] par exemple). Parmi les méthodes plus récentes on trouve des articles de Selva [4] et Eldar [5] pour les signaux multi-bandes ou Aldroubi (échantillonnage compressif [6], lissage de données et interpolation par splines cubiques [7]) ou Oppenheim [8] sur la reconstruction par sinc (sinus cardinal) d'un signal passe-bande en utilisant le filtrage numérique. Des conditions garantissant qu'un signal de bande limitée peut être reconstruit exactement à partir d'un échantillonnage irrégulier et infini peuvent être trouvées dans [9]. Dans cet article, de telles formules exactes sont présentées, avec une meilleure vitesse de convergence par rapport à celles présentées dans [10]. Le paragraphe 2 introduit les formules d'interpolation (les démonstrations des formules sont développées) et les simulations sont présentées dans le paragraphe 3, démontrant la précision de la reconstruction. Le paragraphe 4 conclut l'article.

2 Formules de reconstruction

2.1 Processus passe-bande et échantillonnage irrégulier

On suppose que le processus aléatoire Z est de type passe-bande. La fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance sont reliés comme suit, conduisant à deux bandes de fréquences sans dimension de largeur π

$$E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = \int_{-\pi-\alpha}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} s(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \alpha > 0 \quad (1)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'opérateur d'espérance mathématique et l'exposant $*$ le complexe conjugué. Le cas limite $\alpha = 0$ corres-

pond à un spectre en une seule partie autour de l'origine (le processus \mathbf{Z} est alors en bande de base). \mathbf{Z} est échantillonné aux instants $\theta_m, m \in \mathbb{Z}$ vérifiant la condition de Landau : $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m/m = \theta < 1$ (\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs). Les formules utilisées seront des approximations de formules basées sur les suites d'échantillonnage

$$t_{mn} = \theta_m + 2nL, 0 < |m| \leq L, n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

correspondant à un schéma d'échantillonnage du type PNS $2L$ (Periodic Nonuniform Sampling d'ordre $2L$) [11], [12]. On néglige les termes $Z(t_{mn}), n \neq 0$, ce qui est légitime lorsque L est suffisamment grand, et lorsque les formules proposées montrent un taux de décroissance suffisant. On propose dans cet article une formule décroissant en $1/n^2$ plus rapide que de nombreuses formules qui convergent en $1/n$.

2.2 Reconstruction d'un processus filtré

Dans ce paragraphe, nous donnons une formule générale permettant de reconstruire une famille de versions filtrées \mathbf{U}_k de \mathbf{Z} . Soit $G_1(\omega)$ une fonction telle que

$$G_1(\omega) = 0, \omega \notin \Delta_1 = \left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{L} \right] \quad (3)$$

où $\alpha \geq 0$ et $L \in \mathbb{N}^*$ (\mathbb{N}^* est l'ensemble des entiers naturels privé de l'élément nul). les fonctions $G_k(\omega)$ et les ensembles Δ_k vérifient

$$G_k(\omega) = \begin{cases} G_1(\omega - (k-1)\frac{\pi}{L}), & k > 0 \\ G_1(-\omega + (k+1)\frac{\pi}{L}), & k < 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\Delta_k = \begin{cases} \left[\alpha + (k-1)\frac{\pi}{L}, \alpha + k\frac{\pi}{L} \right], & k > 0 \\ \left[-\alpha + k\frac{\pi}{L}, -\alpha + (k+1)\frac{\pi}{L} \right], & k < 0. \end{cases} \quad (5)$$

$G_k(\omega)$ est une version décalée de $G_1(\omega)$ de support Δ_k . On utilisera par la suite (section 2.3) le cas particulier décrit figure 1. On suppose que \mathbf{U}_k est la sortie du filtre linéaire invariant

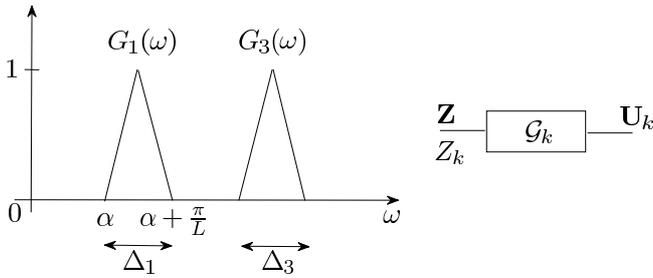


FIGURE 1 – Illustration des filtres d'analyse du processus \mathbf{Z} .

\mathcal{G}_k d'entrée \mathbf{Z} et de gain complexe $G_k(\omega)$. Le résultat est bien sûr le même que si l'on prend comme entrée \mathbf{Z}_k (restriction de \mathbf{Z} sur Δ_k , ou résultat du filtrage de \mathbf{Z} par le filtre passe-bande de support Δ_k). En utilisant la méthode exposée dans [10] on arrive aux équations suivantes :

$$\begin{cases} U_k(t)/b_k^+(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^+(t - \theta_m) Z_k(\theta_m + 2nL), & k > 0 \\ U_k(t)/b_k^-(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^-(t - \theta_m) Z_k(\theta_m + 2nL), & k < 0 \end{cases} \quad (6)$$

où les coefficients vérifient

$$\begin{aligned} b_k^+(t) &= e^{it(\alpha + (k-1/2)\pi/L)} \\ b_k^-(t) &= e^{it(-\alpha + (k+1/2)\pi/L)} \\ c_n^+(t) &= \frac{(-1)^n L e^{-2i\alpha n L}}{\pi} \int_{-\pi/2L}^{\pi/2L} G_1(\omega + \alpha + \frac{\pi}{2L}) e^{i\omega(t-2nL)} d\omega \\ c_n^-(t) &= \frac{(-1)^n L e^{2i\alpha n L}}{\pi} \int_{-\pi/2L}^{\pi/2L} G_1(\omega + \alpha + \frac{\pi}{2L}) e^{-i\omega(t-2nL)} d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

pour $k \in \mathbb{Z}, 0 < |m| \leq L$. Dans les équations précédentes, les θ_m définissent les instants d'échantillonnage et la bande de fréquences est définie par α . Les échantillons $Z(\theta_m + 2nL)$ sont connus seulement pour $n = 0$. Pour les $Z(\theta_m + 2nL)$ apparaissant dans (6), le paramètre α et la fonction $G_1(\omega)$ doivent vérifier des conditions particulières. Supposons que

$$\alpha \in \frac{\pi}{2L}\mathbb{Z} \text{ et } G_1\left(\omega + \alpha + \frac{\pi}{2L}\right) \text{ est pair.} \quad (8)$$

La dernière condition signifie que $G_1(\omega)$ est symétrique par rapport à l'axe $\omega = \alpha + \frac{\pi}{2L}$. Lorsque (8) est vérifiée, les formules (6) peuvent être sommées par rapport à l'indice k car $c_n^+(t) = c_n^-(t) = c_n(t)$. Alors

$$\sum_{0 < |k| \leq L} \frac{U_k(t)}{b_k(t - \theta_m)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t - \theta_m) Z(\theta_m + 2nL) \quad (9)$$

où $b_k(t) = b_k^+(t)$ si $k > 0$ et $b_k(t) = b_k^-(t)$ si $k < 0$. (9) est un système linéaire de taille $2L \times 2L$ où les $U_k(t)$ sont les inconnues, chaque indice k et m parcourant l'ensemble des valeurs $-L, -L+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, L-1, L$. Les b_k, c_n, θ_m sont connus. Si le système (9) est inversible (cette propriété dépend uniquement des $b_k(t - \theta_m)$), les $U_k(t)$ sont obtenus en fonction des $Z(\theta_m + 2nL)$. En négligeant les termes pour $n \neq 0$, le système (9) permet de calculer les valeurs des $U_k(t)$. La sous-section suivante montre comment en déduire la valeur de $Z(t)$.

2.3 Nouvelle formule de reconstruction

Une première formule a été obtenue dans [10] avec $G_1(\omega) = 1$ donnant de bons résultats pour la reconstruction à la fois d'une fonction et de son spectre (comparé à l'estimateur spectral de Lomb-Scargle [13]) pour les fonctions déterministes à bande limitée tendant vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Ces formules faisaient apparaître au membre de droite pour $n \neq 0$ les échantillons inconnus (négligés) $Z(\theta_m + 2nL)$ multipliés par une fonction sinc qui décroît lentement. Dans cet article, on montre qu'un autre choix pour $G_1(\omega)$ peut conduire à des formules faisant intervenir une fonction sinc au carré (meilleure décroissance) dans le membre de droite, permettant d'étendre son applicabilité aux processus aléatoires stationnaires, n'ayant pas la propriété de tendre vers 0 à l'infini. On définit $G_1(\omega)$ sur Δ_1 par

$$G_1(\omega) = \begin{cases} \frac{2L}{\pi}(\omega - \alpha), & \omega \in \left(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2L}\right) \\ 2 - \frac{2L}{\pi}(\omega - \alpha), & \omega \in \left(\alpha + \frac{\pi}{2L}, \alpha + \frac{\pi}{L}\right) \end{cases} \quad (10)$$

Avec cette fonction, le produit $G_1(\omega) e^{i\omega t}$ est continu sur Δ_1 (sa valeur est nulle aux bornes α et $\alpha + \frac{\pi}{L}$), ce qui améliore la convergence de sa série de Fourier par rapport à la formule précédente [10]. On définit l'ensemble des filtres translétés en fréquence $H_k(\omega)$ (11).

$$\begin{cases} H_1(\omega) = G_1\left(\omega - \frac{\pi}{2L}\right), \omega \in \left(\alpha + \frac{\pi}{2L}, \alpha + \frac{3\pi}{2L}\right) \\ H_k(\omega) = \begin{cases} H_1\left(\omega - (k-1)\frac{\pi}{L}\right), k > 0 \\ H_1\left(-\omega + (k+1)\frac{\pi}{L}\right), k < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

Les $H_k(\omega)$ sont des versions modulées des filtres $G_k(\omega)$ avec une translation fréquentielle de $\pi/2L$ (le quart d'une bande Δ_k). À part aux bornes des intervalles $[\alpha, \alpha + \pi], [-\alpha - \pi, -\alpha]$, la somme des fonctions $H_k(\omega)$ et $G_k(\omega)$ est égale à la constante 1. Si on suppose que le spectre $s(\omega)$ est nul sur les intervalles $[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2L}]$ et $[-\alpha - \frac{\pi}{2L}, -\alpha]$, on arrive à

$$Z(t) = \sum_{0 < |k| \leq L} [U_k + V_k](t) \quad (12)$$

où $V_k(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire invariant ayant comme entrée $Z(t)$ et une transmittance $H_k(\omega)$ (définie sur $\Delta_k \pm \frac{\pi}{2L}$, suivant le signe de k). Les DSF (Développements en Série de Fourier) des coefficients $a_k(t)$ et $a'_k(t)$ de $G_k(\omega) e^{i\omega t}$ et $H_k(\omega) e^{i\omega t}$ sont déduits du DSF de $G_1(\omega) e^{i\omega t}$:

$$a_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n'}}{2} e^{i(\alpha + (k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{L})(t-2nL)} \text{sinc}^2\left[\frac{\pi t}{4L} - \frac{n\pi}{2}\right], k > 0 \\ \frac{(-1)^{n'}}{2} e^{i(-\alpha + (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L})(t-2nL)} \text{sinc}^2\left[\frac{\pi t}{4L} - \frac{n\pi}{2}\right], k < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$a'_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+n'}}{2} e^{i(\alpha + k\frac{\pi}{L})(t-2nL)} \text{sinc}^2\left[\frac{\pi t}{4L} - \frac{n\pi}{2}\right], k > 0 \\ \frac{(-1)^{n+n'}}{2} e^{i(-\alpha + k\frac{\pi}{L})(t-2nL)} \text{sinc}^2\left[\frac{\pi t}{4L} - \frac{n\pi}{2}\right], k < 0 \end{cases} \quad (14)$$

avec $n' = n(1 + \frac{2\alpha L}{\pi})$. En utilisant (9) et (12), ces DSF conduisent aux nouvelles formules en négligeant les termes $\theta_m + 2nL$ pour $n \neq 0$.

$$2 \sum_{0 < k \leq L} U_k(t) e^{-i(t-\theta_m)(\alpha + (k-1/2)\pi/L)} + 2 \sum_{-L \leq k < 0} U_k(t) e^{i(t-\theta_m)(\alpha - (k+1/2)\pi/L)} \approx \text{sinc}^2\left[\frac{\pi}{4L}(t - \theta_m)\right] Z(\theta_m) \quad (15)$$

$$2 \sum_{0 < k \leq L} V_k(t) e^{-i(t-\theta_m)(\alpha + k\pi/L)} + 2 \sum_{-L \leq k < 0} V_k(t) e^{i(t-\theta_m)(\alpha - k\pi/L)} \approx \text{sinc}^2\left[\frac{\pi}{4L}(t - \theta_m)\right] Z(\theta_m). \quad (16)$$

La résolution des systèmes linéaires (15) et (16) donne accès aux versions filtrées de $Z(t)$ ($U_k(t)$ et $V_k(t)$) et permet la reconstruction de $Z(t)$ en utilisant (12).

3 Simulations

Pour les simulations, une réalisation d'un processus aléatoire en bande de base à temps continu $W(t)$ est d'abord construite comme un bruit aléatoire gaussien filtré par un filtre passe-bas avec fréquence de coupure ω_c de manière que la bande de fréquence totale de $W(t)$ soit $2\omega_c$. Cette réalisation du processus $W(t)$ est alors modulée en utilisant (17) pour obtenir un processus passe-bande $Z_\alpha(t)$ avec une bande totale deux fois plus

importante. A noter que la symétrie entre les bandes positive et négative n'est pas nécessaire pour appliquer les formules.

$$Z_\alpha(t) = W(t) \cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)t\right) \quad (17)$$

Le cas $\alpha = 0$ correspond à la bande de base dans laquelle le spectre de $Z_0(t)$ est dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ du moment que la fréquence de coupure ω_c est choisie plus petite que $\frac{\pi}{2}$. Une fenêtre d'analyse glissante de longueur $B - A$ est considérée (le processus doit être reconstruit entre $t = A$ et $t = B$). Dans ces simulations, $B - A$ est lié au nombre d'échantillons : la condition $2L \geq B - A$ doit être vérifiée pour obtenir une période de Landau inférieure à 1.

Les $2L$ instants d'échantillonnage θ_m sont choisis uniformément répartis sur $\left[\left(m - \frac{1}{10}\right)\frac{B-A}{2L}, \left(m + \frac{1}{10}\right)\frac{B-A}{2L}\right]$, représentant une gigue non négligeable dans la distribution des instants par rapport à des instants uniformes (10 pour-cent). Notons que même si les instants sont choisis au hasard pour les simulations, ils ne représentent qu'une réalisation d'un tirage : les instants sont alors supposés connus et on reste dans le cadre de l'échantillonnage déterministe.

Le critère utilisé dans les simulations est l'EQMN (Erreur Quadratique Moyenne Normalisée) de reconstruction dans l'intervalle $[A, B]$ définie par

$$\text{EQMN} = \left(\int_A^B |Z_\alpha(t) - \hat{Z}_\alpha(t)|^2 dt \right) / \left(\int_A^B |Z_\alpha(t)|^2 dt \right), \quad (18)$$

où $\hat{Z}_\alpha(t)$ est la réalisation reconstruite du processus $Z_\alpha(t)$.

3.1 Influence du nombre d'échantillons $2L$

Dans ces simulations, on suppose qu'on a une période de Landau légèrement inférieure à 1 ($6/7$) et $\alpha = 0$. Par conséquent, $B = A + 2L\frac{6}{7}$ et l'influence de L peut aussi s'interpréter comme l'influence de la taille de la fenêtre $B - A$. Un processus à large bande est construit en utilisant $\omega_c = 0.44\pi$ et la condition supplémentaire pour appliquer les nouvelles formules $\omega_c < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2L}$ n'est vraie que pour $L \geq 9$. La figure 2 montre l'EQMN de reconstruction en utilisant les anciennes formules [10] (formule 1) et les nouvelles formules (15), (16) (formule 2). Grâce à la vitesse de convergence accrue des nou-

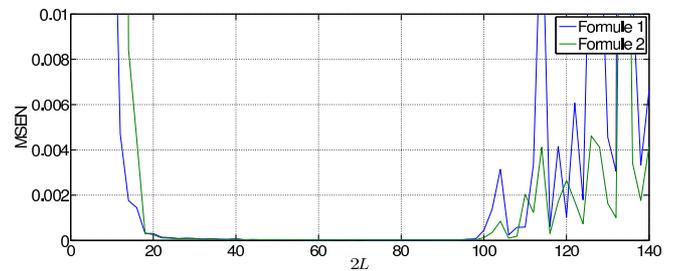


FIGURE 2 – EQMN de reconstruction en fonction du nombre d'échantillons non uniformes $2L$.

velles formules (sinc^2 au membre de droite de (15) et (16) au lieu d'un sinc au membre de droite dans [10]), l'EQMN de reconstruction reste globalement inférieure à celle obtenue avec les formules précédentes, sauf lorsque $2L < 18$. Dans ce cas, le spectre $s(\omega)$ n'est pas nul dans les intervalles $[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2L}]$ et $[-\alpha - \frac{\pi}{2L}, -\alpha]$ et (12) n'est plus parfaitement vraie. Les meilleurs résultats sont obtenus avec un assez faible nombre d'échantillons non uniformes $2L$ de l'ordre de 70. Avec un plus grand nombre d'échantillons ($2L > 100$), des instabilités numériques dans la résolution des systèmes linéaires peuvent causer des problèmes à cause de matrices de taille importante.

3.2 Décalage fréquentiel α

On utilise un nombre d'échantillons non uniformes $2L = 70$ et le processus est supposé être observé entre les instants $A = 10$ et $B = 70$. Comme $\omega_c = 0.44\pi$, la bande totale du processus est 1.76π . Lorsque $\alpha > 0.04\pi$, on ne peut plus appliquer les formules classiques de reconstruction sans filtrage et décalage fréquentiel en bande de base préalables car la condition de Shannon n'est plus respectée mais les formules proposées ici peuvent toujours s'appliquer (comme illustré figure 3 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 3\pi/2$), du moment que α est connu (au moins approximativement). Avec 100 tirages indépendants de

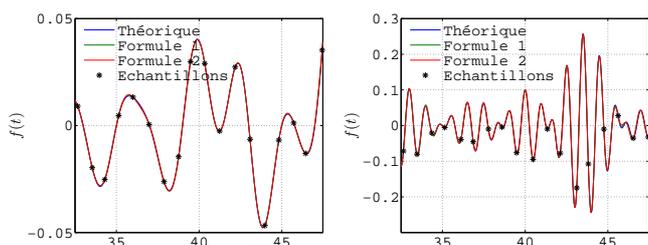


FIGURE 3 – Processus $Z_\alpha(t)$ (théorique et reconstruit) en fonction du temps pour $L = 35$. Gauche : $\alpha = 0$. Droite : $\alpha = 3\pi/2$. Les 3 courbes sont superposées.

Monte-Carlo, les EQMN obtenues pour $\alpha = 0$ avec les formules 1 et 2 sont respectivement de 1.77×10^{-5} et 1.72×10^{-5} . Avec $\alpha = 3\pi/2$, les EQMN sont respectivement de 0.0086 and 0.00071, démontrant que la reconstruction peut aussi être effectuée avec $\alpha > 0$ pour des processus passe-bande avec un faible sur-échantillonnage par rapport à la période de Landau et forte gigue.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons donné et prouvé de nouvelles formules exactes permettant de déduire une estimation temporelle du signal lorsque les instants d'échantillonnage ne sont pas espacés régulièrement, mais supposés connus. On a démontré l'applicabilité des formules obtenues en utilisant un schéma du type PNS $2L$ (Periodic Nonuniform Sampling d'ordre $2L$) aux processus aléatoires passe-bande avec des instants d'obser-

vation non uniformes et une forte gigue (grâce à l'utilisation de filtres triangulaires qui conduisent à une décroissance en $1/n^2$). En outre, une solution originale pour effectuer un filtrage numérique directement à partir des échantillons non uniformes est déduite des formules, donnant accès à des versions filtrées du processus. Enfin, les formules ont été généralisées au cas où le support spectral est divisé en deux intervalles symétriques, utilisant le concept général de période de Landau (mettant en avant la largeur réelle du spectre) plutôt que la période de Nyquist. L'approche pourra être étendue pour avoir des décroissances en $1/n^3$.

Références

- [1] Y.R. Sun et S. Signall. *Algorithms for nonuniform band-pass sampling in radio receiver*. Proc. ISACS, vol. 1, pp. 25-28, 2003.
- [2] P.P. Vaidyanathan. *Generalizations of the sampling theorem : seven decades after Nyquist* IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 9, pp. 1094-1109, 2001.
- [3] P. Thevenaz, T. Blu et M. Unser. *Interpolation revisited* IEEE Trans. on Med. Imag., vol. 7, pp. 739-758, 2000.
- [4] J. Selva. *Regularized Sampling of Multiband Signals* IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 58, no. 11, pp. 5624-5638, 2010.
- [5] M. Mishali et Y.C. Eldar. *From Theory to Practice : Sub-Nyquist Sampling of Sparse Wideband Analog Signals* IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 4, no. 2, pp. 375-391, 2010.
- [6] A. Aldroubi et W. Haichao. *An Adaptive and Information Theoretic Method for Compressed Sampling* 3rd IEEE International Workshop on CAMSAP, pp. 193-196, 2009.
- [7] A. Aldroubi et H. Feichtinger. *Complete iterative reconstruction algorithms for irregularly sampled data in spline-like spaces* IEEE International Conference on ICASSP, vol. 3, pp. 1857-1860, 1997.
- [8] S. Maymon et A.V. Oppenheim. *Sinc Interpolation of Nonuniform Samples* IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 59, pp. 4745-4758, 2011.
- [9] F.A. Marvasti. *Nonuniform sampling, theory and practice* Kluwer Ac. Press, 2002. IEEE Trans. on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, vol. 45, no. 3, pp. 340-351, 1998.
- [10] D. Bonacci et B. Lacaze. *A New Approach to Spectral Estimation From Irregular Sampling* Proc. IEEE EUSIPCO, Lisbon, Portugal, 2014.
- [11] J. Yen. *On Nonuniform Sampling of Bandwidth-Limited Signals* Circuit Theory, vol. 3, no. 4, pp. 251-257, 1956.
- [12] Y.P. Lin et P.P. Vaidyanathan. *Periodically nonuniform sampling of bandpass signals*
- [13] J. Scargle. *Statistical Aspects of Spectral Analysis on Unevenly Spaced Data* The Astronomical Journal, vol. 263, pp. 835-853, 1982.