

Estimation parcimonieuse des directions d'arrivées pour les antennes multi-échelle

Marc-Abel BISCH¹, Sebastian MIRON¹, David BRIE¹, Denis LEJEUNE²

¹Université de Lorraine, Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), UMR 7039,
Vandœuvre-lès-Nancy, F-54506, France.

²Ministère de la Défense, Paris, France.
marc-abel.bisch@univ-lorraine.fr

Résumé – Dans cette communication nous proposons une nouvelle méthode (KR-SOLS) pour l'estimation des directions d'arrivées (DDAs) des sources incidentes sur une antenne multi-échelle. L'approche proposée est fondée sur l'algorithme d'approximation parcimonieuse simultanée SOLS [1] et exploite la structure Khatri-Rao du dictionnaire pour diminuer la charge de calcul. Nous montrons que, dans certains cas difficiles, l'approche proposée donne de meilleurs résultats que l'approche de type Candecomp/Parafac (CP) proposée dans [6] pour le même type d'antenne.

Abstract – In this paper, we introduce a new method (KR-SOLS) for estimating the directions of arrival for multiple sources impinging on a multi-scale array. The proposed approach is based on the simultaneous sparse approximation algorithm SOLS [1] and exploits the Khatri-Rao dictionary structure to reduce the computational load. We show that, in some difficult cases, the proposed approach gives better results than the Candecomp / Parafac (CP) - based method proposed in [6] for the same type of sensor array.

1 Introduction

Les antennes de capteurs de très grande dimension sont devenues un domaine de recherche très actif ces dernières années grâce à leur très grand pouvoir résolutif. Un exemple dans ce sens est le «Vaste Réseau d'antennes Sub-Millimétriques de l'Atacama» déployé dans les Andes chiliennes par l'Observatoire européen austral. Avec une envergure de 15 km il permet d'atteindre une résolution angulaire de 35 millisecondes d'arc, près de 2 fois mieux que le télescope spatial Hubble. Cependant, le traitement des signaux issus de ce type d'antenne fait face à des nouveaux défis concernant principalement l'énorme quantité de données à traiter et les problèmes d'ambiguïté liés au sous-échantillonnage spatial. Une solution algorithmique, exploitant une géométrie multi-échelle d'antenne, a été proposée dans [6]. Elle est basée sur une décomposition multilinéaire de type Candecomp / Parafac (CP) des données acquises ; ses performances, en termes d'estimation de la DDA, ont été démontrées supérieures à d'autres méthodes équivalentes. Néanmoins, l'approche proposée dans [6] est basée sur un décomposition CP itérative des données et peut poser des problèmes de convergence et de temps de calcul. Dans cette communication, nous introduisons une approche parcimonieuse pour l'estimation des DDAs à l'aide d'une antenne multi-échelle ne présentant pas les inconvénients énumérés ci-dessus. Comparés aux autres méthodes parcimonieuses d'estimation de la DDA [3, 5], notre approche exploite la structure Khatri-Rao du dictionnaire (engendré par la géométrie multi-échelle de l'antenne) pour réduire de façon significative le coût de calcul.

2 Modélisation du problème

2.1 Antennes multi-échelle

Nous introduisons dans cette section la configuration d'une antenne multi-échelle telle qu'elle a été définie dans [6]. Considérons une antenne composée de L_1 capteurs isotropes et identiques, indexés par $l_1 = 1, \dots, L_1$. Nous répliquons cette antenne L_2 fois dans l'espace, par des translations arbitraires mais connues de la première antenne. Cette antenne sera appelée de niveau 2 et elle sera constituée de L_2 sous-antennes de niveau 1, indexées par $l_2 = 1, \dots, L_2$. L'opération pourra être répétée sur autant de niveaux que souhaités ; par la suite on notera le nombre total de niveaux N . La position du capteur l_1 de l'antenne de niveau 1 est donnée dans un repère Cartésien $OXYZ$ par le vecteur $(x_{l_1}^{(1)}, y_{l_1}^{(1)}, z_{l_1}^{(1)})$. La position du capteur l_1 de l'antenne de niveau L_2 indexée par l_2 sera donnée par $(x_{l_1}^{(1)} + x_{l_2}^{(2)}, y_{l_1}^{(1)} + y_{l_2}^{(2)}, z_{l_1}^{(1)} + z_{l_2}^{(2)})$, où $(x_{l_2}^{(2)}, y_{l_2}^{(2)}, z_{l_2}^{(2)})$ est le déplacement de l'antenne l_2 par rapport à l'antenne de référence. En général, pour une antenne à N niveaux, la position d'un capteur sera donnée par $(x_{l_1}^{(1)} + \dots + x_{l_N}^{(N)}, y_{l_1}^{(1)} + \dots + y_{l_N}^{(N)}, z_{l_1}^{(1)} + \dots + z_{l_N}^{(N)})$.

2.2 Modèle des données

Dans le repère $OXYZ$, la DDA d'une source arrivant sur l'antenne sera représentée par son cosinus-directeur :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle d'incidence en élévation de la source, mesuré par rapport à l'axe positif des Z , et $\varphi \in [0, 2\pi]$ est l'angle d'incidence en azimut de la source, mesuré par rapport à l'axe positif des X . Notons $\mathbf{k} = [u \ v \ w]^T$ la DDA d'une source incidente sur l'antenne et $\mathbf{d}_{i_n}^{(n)} = [x_{i_n}^{(n)} \ y_{i_n}^{(n)} \ z_{i_n}^{(n)}]^T$, $n = 1, \dots, N$, la position du $i_n^{\text{ème}}$ capteur du niveau n de l'antenne multi-échelle. Sous l'hypothèse de source bande-étroite, le vecteur directionnel $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ de taille $(L \times 1)$, $L = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_N$ de la source incidente est donné par :

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{k}) \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_N(\mathbf{k}), \text{ avec} \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_n(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{j(2\pi/\lambda)\mathbf{k}^T \mathbf{d}_1^{(n)}} \\ \vdots \\ e^{j(2\pi/\lambda)\mathbf{k}^T \mathbf{d}_{L_n}^{(n)}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où « \otimes » symbolise le produit de Kronecker et $\mathbf{a}_n(\mathbf{k})$ est le vecteur directionnel de taille $(L_n \times 1)$ correspondant à la sous-antenne de niveau n . Nous considérons ensuite P sources arrivant sur l'antenne avec des DDAs différentes. On note $s_p(t)$ le signal temporel provenant de la source p , avec $p = 1, \dots, P$. Nous pouvons maintenant écrire les données en sortie de l'antenne à l'instant t sous la forme d'un vecteur $\mathbf{z}(t)$ de taille $(L \times 1)$,

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{p=1}^P (\mathbf{a}_1(\mathbf{k}_p) \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_N(\mathbf{k}_p)) s_p(t) + \mathbf{n}(t), \quad (4)$$

où L est le nombre total de capteurs de l'antenne, et $\mathbf{n}(t)$ est le terme lié au bruit sur les capteurs. Par la suite nous utiliserons le symbole « \odot » pour le produit de Khatri-Rao de deux matrices, *i.e* le produit de Kronecker par colonnes. Notons $\mathbf{A}_n = [\mathbf{a}_n(\mathbf{k}_1) \odot \dots \odot \mathbf{a}_n(\mathbf{k}_P)]$, avec $n = 1, \dots, N$ et soit \mathbf{S} la matrice de taille $(K \times P)$ contenant sur ses colonnes les séquences temporelles des P sources. Alors, les données enregistrées sur l'antenne peuvent s'exprimer comme :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{z}(t_1), \dots, \mathbf{z}(t_K)] = (\mathbf{A}_1 \odot \dots \odot \mathbf{A}_N) \mathbf{S}^T + \mathbf{N}, \quad (5)$$

où \mathbf{Z} est une matrice $(L \times K)$ contenant les K échantillons enregistrés sur l'antenne et \mathbf{N} une matrice $(L \times K)$ modélisant le bruit sur les capteurs pour tous les échantillons temporels.

3 Estimation de la DDA par approximation parcimonieuse multi-échelle

3.1 Approximation parcimonieuse simultanée pour l'estimation de la DDA

On peut formuler le problème d'estimation de la DDA comme un problème d'estimation parcimonieuse simultanée [3, 5] :

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Z} - \Phi \mathbf{X}\|^2 \text{ s/c } \|\mathbf{X}\|_{2,0} \leq P, \quad (6)$$

où $\|\mathbf{X}\|_{2,0}$ représente le nombre de lignes de \mathbf{X} actives, et Φ est le dictionnaire dans lequel sont rangés à la suite les atomes

obtenus par la discrétisation des angles θ et φ . Dans ce travail, nous utilisons un algorithme d'approximation parcimonieuse de type «glouton». Les performances de ce type d'algorithme ont été étudiées dans [2]. Si l'on considère N_θ valeurs de θ et N_φ valeurs de φ , alors le dictionnaire contient $N_\theta \cdot N_\varphi$ atomes. Estimer les DDAs des sources revient donc à identifier les atomes actifs du dictionnaire. Si dans son principe cette approche est intéressante, sa mise en œuvre effective peut s'avérer délicate. En effet, dès lors que l'on souhaite avoir une résolution importante (*i.e.* la capacité à distinguer deux DDA proches), il est nécessaire d'avoir une grille d'échantillonnage de θ et φ suffisamment fine. Ainsi, la taille du dictionnaire peut devenir extrêmement importante, ce qui entraîne une augmentation rédhibitoire du coût de calcul. Le raffinement de la grille d'échantillonnage a également un impact sur les performances de l'algorithme d'approximation parcimonieuse simultanée. En effet, en écrivant $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_M]$, où M est le nombre de colonnes du dictionnaire, la cohérence du dictionnaire est définie selon :

$$\mu(\Phi) = \max_{i \neq j} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle|. \quad (7)$$

En supposant que les atomes du dictionnaire sont de norme unité, $0 \leq \mu(\Phi) \leq 1$. Selon [2], la qualité de l'approximation parcimonieuse simultanée est d'autant meilleure que $\mu(\Phi)$ est faible. Or, plus la grille d'échantillonnage est fine, plus la valeur de $\mu(\Phi)$ sera importante. Ce point est étudié plus en détail dans la section suivante, pour les dictionnaires de type Khatri-Rao.

3.2 Dictionnaire de type Khatri-Rao

La structure particulière des antennes multi-échelle conduit à une matrice de vecteurs directionnels qui s'exprime sous la forme d'un produit de Khatri-Rao des matrices des vecteurs directionnels de chaque sous-antennes (éq. (5)). Cette structure particulière se retrouve au niveau du dictionnaire qui s'exprime de façon similaire selon :

$$\Phi = \Phi_1 \odot \dots \odot \Phi_N. \quad (8)$$

Des études se sont intéressées au cas où les dictionnaires sont de type Kronecker $\Phi = \Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_N$. Il a été démontré [4] que la cohérence est donné par $\mu(\Phi) = \max(\mu_1, \dots, \mu_N)$ où $\mu_n = \mu(\Phi_n)$. Dans ce cas, c'est le dictionnaire de plus grande cohérence qui domine la cohérence globale. Revenons au cas d'un dictionnaire de type Khatri-Rao et intéressons nous à la cohérence du dictionnaire donné par éq. (8). La proposition suivante permet d'établir un ordre sur la cohérence des dictionnaires successifs $\Phi_1, \Phi_1 \odot \Phi_2, \dots, \Phi_1 \odot \dots \odot \Phi_N$.

Proposition :

$$\mu(\Phi_1) \geq \mu(\Phi_1 \odot \Phi_2) \geq \dots \geq \mu(\Phi_1 \odot \dots \odot \Phi_N)$$

Démonstration : On pose

$$\Phi_n = [\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,M}]$$

Par définition $\mu(\Phi_1 \odot \Phi_2) = \max_{i \neq j} |\langle \phi_{1,i} \otimes \phi_{2,i}, \phi_{1,j} \otimes \phi_{2,j} \rangle|$
or $\langle \phi_{1,i} \otimes \phi_{2,i}, \phi_{1,j} \otimes \phi_{2,j} \rangle = \langle \phi_{1,i} \otimes \phi_{1,j} \rangle \cdot \langle \phi_{2,i} \otimes \phi_{2,j} \rangle$,
dont on déduit que

$$\begin{aligned} \mu(\Phi_1 \odot \Phi_2) &= \max_{i \neq j} |\langle \phi_{1,i} \otimes \phi_{1,j} \rangle \cdot \langle \phi_{2,i} \otimes \phi_{2,j} \rangle| \\ &\leq \max_{i \neq j} |\langle \phi_{1,i} \otimes \phi_{1,j} \rangle| \cdot \max_{i \neq j} |\langle \phi_{2,i} \otimes \phi_{2,j} \rangle| \\ &= \mu(\Phi_1) \cdot \mu(\Phi_2) \end{aligned}$$

De façon générale : $\mu(\Phi) \leq \prod_{n=1}^N \mu_n$.

Or $\forall n = 1, \dots, N, 0 \leq \mu_n \leq 1$; on a donc $\mu_1 \leq \mu_1 \cdot \mu_2 \leq \dots \leq \prod_{n=1}^N \mu_n$,
c'est à dire $\mu(\Phi_1) \geq \mu(\Phi_1 \odot \Phi_2) \geq \dots \geq \mu(\Phi_1 \odot \dots \odot \Phi_N)$. \square

En d'autres termes, pour une grille d'échantillonnage donnée, la cohérence minimale est obtenue avec le dictionnaire Φ global, tandis que la cohérence maximale est obtenue pour le dictionnaire Φ_1 . Il apparaît donc inapproprié d'envisager le développement d'une approche parcimonieuse exploitant la structure multi-échelle de l'antenne en maintenant une grille de discrétisation identique à tous les niveaux d'échelle. L'approche que nous proposons consiste à raffiner la grille de discrétisation au fur et à mesure que l'on parcourt les différentes échelles. Cependant afin d'éviter une augmentation du coût de calcul nous adoptons une procédure de raffinement locale de la grille adaptative selon une idée similaire à celle proposée dans [7].

3.3 Algorithme parcimonieux multi-échelle

Afin de prendre en compte la structure multi-échelle de l'antenne, nous proposons de traiter successivement les matrices \mathbf{Z}_i dans lesquelles sont rangées les données des sous-antennes de niveau 1 à i ; on notera $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{1:i}$. Comme cela a été souligné précédemment, il est nécessaire d'adapter la résolution du dictionnaire, qui est déterminée par la finesse de la grille d'échantillonnage, en fonction de i . On désignera par la suite i comme l'indice d'adaptation. Ainsi, les matrices \mathbf{Z}_i peuvent s'écrire.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \Phi_1^1 \mathbf{X}^T \\ \mathbf{Z}_2 &= \Phi_1^2 \odot \Phi_2^2 \mathbf{X}^T \\ &\vdots \\ \mathbf{Z}_i &= (\Phi_1^i \odot \dots \odot \Phi_i^i) \mathbf{X}^T, \end{aligned} \quad (9)$$

Φ_j^i correspond au dictionnaire de la $j^{\text{ème}}$ sous-antenne pour l'indice d'adaptation i . La construction des dictionnaires se fait de la façon suivante : on fixe la résolution maximale atteinte pour $i = N$. Le dictionnaire initial Φ_1^1 est alors obtenu en considérant une grille uniforme correspondant à une décimation par un facteur égal à q^N selon chaque dimension (u, v). Le dictionnaire Φ_j^2 aura pour sa part une résolution q^2 fois supérieure à celle de Φ_1^1 . De façon générale, à chaque nouvel indice d'adaptation, la résolution des dictionnaires sera multipliée par un facteur q^2 . Pour maintenir un coût de calcul faible, nous adoptons

une stratégie de raffinement de la grille [7] qui consiste à augmenter la résolution uniquement dans le voisinage des atomes actifs. La figure 1 illustre le mécanisme d'adaptation du dictionnaire selon une dimension, pour trois niveaux d'échelle et un facteur $q = 3$.

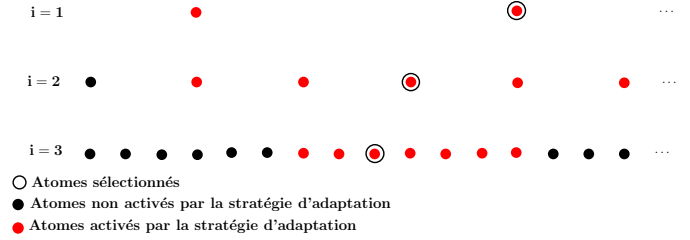


FIGURE 1 – Stratégie d'adaptation de la grille

L'algorithme final est présenté ci-dessous.

Algorithme 1 Algorithme KR-SOLS

Entrées: \mathbf{Z} : matrice des données de taille $(L \times K)$; P : nombre de sources; N : nombre de niveaux; q : facteur de décimation; Φ_1, \dots, Φ_N : dictionnaires de résolution maximale
1: Initialisation de l'ensemble des atomes actifs :
 $\Omega = (1 : q^N : N_\theta) \times (1 : q^N : N_\varphi)$
2: **pour** $i = 1 : N$
3: $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{1:i}$
4: $\Phi_j^i = \Phi_j(\Omega) \quad j = 1, \dots, i$
5: $\Phi = \Phi_1^i \odot \dots \odot \Phi_i^i$
6: $\mathbf{X} = S_OLS(\Phi, \mathbf{Z}_i, P)$
7: $\Omega = ADAPTE(\mathbf{X})$;
8: **fin pour**

Sortie: Ω

L'intérêt de la stratégie d'adaptation est de diminuer de façon significative le nombre d'atomes du dictionnaire à chaque itération i . Pour fixer les idées, le nombre d'atomes est de $N_\theta \cdot N_\varphi$ pour le dictionnaire complet tandis que le dictionnaire adapté inclut au niveau N $(2Pq + 1)^2$ atomes. Nous pouvons aussi évaluer le nombre total d'atomes pour les N niveaux selon $\frac{N_\theta N_\varphi}{q^{2N}} + (2Pq + 1)^2(N - 1)$. Ainsi pour $N_\theta = N_\varphi = 3^6, q = 3, N = 3, P = 2$ on trouve 1067 atomes (à comparer aux 531441 du dictionnaire complet). En fait le coût de calcul est essentiellement dominé par la taille du dictionnaire initial.

4 Simulations

Dans cette partie nous comparons l'approche KR-SOLS avec la méthode proposée dans [6] qui se fonde sur une décomposition CP des données, cette dernière ayant des performances supérieures aux méthodes de type ESPRIT et Tensor-ESPRIT sur ce type d'antenne. Les résultats sont évalués par rapport à la borne de Cramér-Rao établie dans [6]. L'antenne considérée comprend 2 niveaux d'échelle : une sous-antenne de 21 capteurs disposés en croix avec un espacement de $\lambda/2$ reproduite

4 fois avec un espacement égal à 15λ . Nous considérons 2 sources arrivant sur l'antenne ($u_1 = 0.2504, v_1 = 0.8406$) et ($u_2 = 0.3985, v_2 = 0.6757$). Chaque expérience est répétée 500 fois afin d'évaluer le temps de calcul moyen et l'erreur quadratique moyenne (E.Q.M.).

La figure 2 montre l'évolution du temps de calcul en fonction de la résolution de la grille d'échantillonnage ($N_\theta = N_\varphi = 2^R$), pour des valeurs de $q = 2^p$. La méthode proposée est plus rapide que la méthode CP lorsque R n'est pas trop grand. Notons que l'antenne utilisée ne comprend que 2 niveaux, ce qui correspond au cas le moins favorable pour l'approche KR-SOLS. La méthode sera d'autant plus rapide que le nombre de niveaux d'échelle est important. La figure 3 montre l'évolution de l'E.Q.M. en fonction du rapport signal à bruit (RSB). La résolution finie du dictionnaire fixe la limite inférieure de l'E.Q.M. de la méthode KR-SOLS. Plus la résolution est fine plus l'E.Q.M. limite diminue. Un point remarquable est le gain en terme de précision (par rapport à la méthode CP) obtenu pour les faibles RSB, ce qui rend la méthode adaptée à la détection de signaux à énergie faible. La figure 4 montre l'évolution de l'E.Q.M. en fonction du nombre d'échantillons temporels; la méthode KR-SOLS fournit des résultats très satisfaisants même avec un très faible nombre d'échantillons.

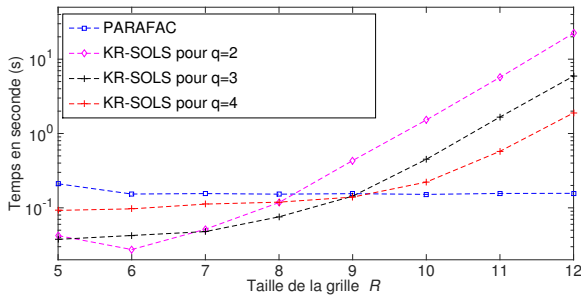


FIGURE 2 – Temps de calcul pour différentes tailles de grille, les R sont en exponentielle de base 2

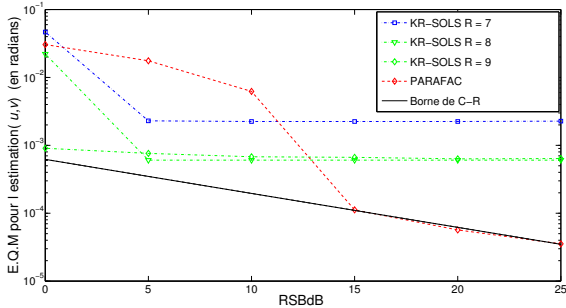


FIGURE 3 – E.Q.M. par taille de grille

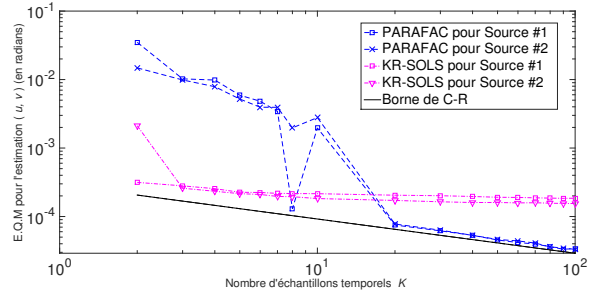


FIGURE 4 – E.Q.M. pour deux sources, en fonction du nombre d'échantillons temporels pour un RSB de 15 dB.

5 Conclusion

Nous avons proposé dans cette communication une nouvelle approche pour l'estimation des DDAs de sources non-cohérentes. C'est une approche parcimonieuse qui exploite la structure de type Khatri-Rao du dictionnaire résultant de la géométrie multi-échelle de l'antenne. Nous avons montré dans les simulations que cette méthode permet d'obtenir des performances intéressantes dans des cas difficiles. Une difficulté réside dans le choix initial de la résolution de grille et un des axes de développement futur serait de trouver une stratégie pour adapter automatiquement la grille en fonction du RSB et du nombre d'échantillons disponibles.

Références

- [1] L. Belmerhnia, E.-H. Djermoune, and D. Brie. Greedy methods for simultaneous sparse approximation. *Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, septembre 2014.
- [2] J. D. Blanchard, M. Cermak, and Y. Hanle, D. and Jing. Greedy Algorithms for Joint Sparse Recovery. *IEEE Trans. Signal Process.*, avril 2014.
- [3] M. M. Hyder and K. Mahata. Direction-of-arrival Estimation Using a Mixed L2,0 Norm Approximation. *IEEE Trans. Signal Process.*, septembre 2010.
- [4] S. Jokar and V. Mehrmann. Sparse solutions to underdetermined kronecker product systems. *Linear Algebra and its Applications*, décembre 2009.
- [5] D. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. Signal Process.*, août 2005.
- [6] S. Miron, D. Yang, S. and Brie, and K. T. Wong. A multilinear approach of direction finding using a sensor-array with multiple scales of spatial invariance. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, janvier 2015.
- [7] S. Sahnoun, E.-H. Djermoune, C. Soussen, and D. Brie. Sparse multidimensional modal analysis using a multigrid dictionary refinement. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, mars 2012.