

# Approximation du LLR pour un Décodage Multi-niveaux de Réseaux de Points Imbriqués

Carole AL BECHLAWI, Frédéric GUILLOUD

Laboratoire Signal et Communications  
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3, France

Carole.Albechlawi@telecom-bretagne.eu  
Frederic.Guilloud@telecom-bretagne.eu

**Résumé** – Les modulations-codées multi-niveaux (MLC) offrent une solution d’encodage de faible complexité pour les réseaux de points obtenus par la construction D. D’autre part, le décodage multi-niveaux correspondant constitue également un schéma de décodage peu complexe, à condition que les codes correcteurs d’erreurs employés atteignent la capacité. Ceci nécessite l’utilisation d’un décodeur souple puissant pour chacun de ces codes. Dans cet article, nous proposons une approximation du rapport de vraisemblance (LLR) utilisé pour le décodage souple des différents codes employés dans la construction D des réseaux de points imbriqués. Cette approximation est basée sur la distribution de von Mises et permet d’égaliser, avec une moindre complexité, les taux d’erreurs obtenus avec le calcul exact de LLR.

**Abstract** – Multilevel coding (MLC) provides a low-complexity encoding scheme for lattice codes obtained via construction D. On the other hand, multistage decoding is also a practical decoding scheme for MLC provided that the underlying error correcting codes are capacity achieving, which requires using a powerful soft decoder for each code. In this article, we propose an approximation of the log-likelihood ratio (LLR) used for the soft decoding of the different error correcting codes employed in the lattice construction. This approximation is based on the von Mises distribution and achieves, with lower complexity, the same error rate performance obtained with the exact LLR calculation.

## 1 Introduction

L’augmentation du nombre d’utilisateurs, des débits de données et la gestion des interférences sont des évolutions majeures auxquelles devra répondre la 5<sup>e</sup> génération du système de téléphonie mobile (5G) [1]. Pour satisfaire à de telles spécifications, il est possible d’avoir recours au codage en réseaux des systèmes sans fil, en s’inspirant de [2] et [3] où l’interférence est exploitée en utilisant des codes ayant une structure linéaire dans le domaine du signal : les codes basés sur les réseaux de points imbriqués. Un réseau de point (ou *lattice*) réel  $\Lambda$  de dimension  $n$  est défini comme étant un sous-groupe discret additif de l’ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}^n$  [4]. Deux réseaux de points réels  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  sont imbriqués si  $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ , et le groupe quotient fini  $\Lambda_1/\Lambda_2$  est appelé *lattice partition* [5]. Une famille de  $r$  réseaux de points imbriqués permet d’obtenir une partition chaînée  $\Lambda_1/\Lambda_2/\dots/\Lambda_r$ .

Un schéma pratique pour l’encodage des réseaux de points peut être obtenu en utilisant le codage multi-niveaux (MLC) [6]. Le MLC consiste à combiner plusieurs codes correcteurs d’erreurs avec les partitions d’une constellation de symboles. Plus précisément, une constellation est partitionnée en plusieurs sous-ensembles  $\Lambda_1/\Lambda_2/\dots/\Lambda_r$ , et chaque partition  $\Lambda_i/\Lambda_{i+1}$  est associée à un code  $C_i$  de longueur  $N$  et de dimension  $k_i$  noté  $C_i(N, k_i)$  [7]. L’ordre d’une partition, noté  $|\Lambda_i/\Lambda_{i+1}|$ , est égal au nombre de décalage de  $\Lambda_{i+1}$  nécessaires pour obtenir  $\Lambda_i$  (coset), et le code  $C_i$  choisit une séquence de ces cosets. Lorsque

$|\Lambda_i/\Lambda_{i+1}| = 2$ , l’ensemble des représentants des cosets de  $\Lambda_i/\Lambda_{i+1}$  est  $\{0, 1\}$  et par suite le code  $C_i$  est binaire. Lorsque les codes  $C_i$  sont linéaires binaires et imbriqués, c.à.d.,  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_{r-1}$ , le réseau de point est obtenu par ce qu’on appelle la "Construction D".

Du côté récepteur, un décodeur multi-niveaux pour le schéma MLC a été proposé dans [8], dans lequel les codes  $C_i$  sont décodés séparément. Dans un canal gaussien, le processus de décodage est sous-optimal à moins que chaque code sur chaque niveau soit un code atteignant la capacité du canal, décodé avec un décodeur optimal. Ce processus commence par le décodage du code  $C_1$ . Le décodage des codes  $C_i$  pour  $i = 2, \dots, r - 1$  est réalisé en utilisant les mots de codes précédemment décodés dans  $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$  (voir [5]).

Il apparaît donc nécessaire que le décodage au niveau de chaque couche soit réalisé par un décodeur à entrée souple. Sur un canal gaussien, le calcul des rapports de vraisemblance (LLR) est décrit dans [9] pour la chaîne de partition de réseaux de points unidimensionnels  $\mathbb{Z}/\dots/2^{r-1}\mathbb{Z}$ , et fait intervenir des sommes infinies. Dans cet article, nous proposons une méthode d’approximation de ces LLR en utilisant la distribution de Von Mises.

L’article est organisé comme suit : dans la section 2, nous décrivons le schéma de décodage multi-niveaux, nous expliquons brièvement les caractéristiques de la distribution de von Mises et ensuite nous proposons comment l’utiliser pour l’approximation des LLR. La section 3 est consacrée aux simulations, et

l'article est conclu en section 4.

## 2 Estimation des LLR à l'aide de la distribution de von Mises

Dans la suite de l'article, nous nous intéressons à la construction D des réseaux de points, basée sur la partition chaînée unidimensionnelle  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/\dots/2^{r-1}\mathbb{Z}$  dans laquelle  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers, et  $2^{i-1}\mathbb{Z}$ , pour  $2 \geq i \geq r$ , est l'ensemble des entiers multiples de  $2^{i-1}$ . Dans ce cas,  $|2^{i-1}\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}| = 2$ , et les codes  $C_i$  sont donc définis dans le corps de Galois  $\mathbb{F}_2^N$ .

### 2.1 Modèle du système

Le diagramme d'un décodeur multi-niveaux est illustré sur la Fig. 1. Le signal reçu est  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$ , avec  $\mathbf{w}$  un vecteur de  $N$  variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , et  $\mathbf{x}$  le vecteur transmis appartenant au réseau de points  $L$ . Ce réseau de points obtenu en employant un ensemble de  $r - 1$  codes binaires linéaires imbriqués  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_{r-1}$ , peut être décrit par l'expression suivante [10] :

$$L = C_1 + 2C_2 + \dots + 2^{r-2}C_{r-1} + 2^{r-1}\mathbb{Z}^N \quad (1)$$

Du côté récepteur,  $r$  niveaux de décodage fonctionnent en cascade. Au premier niveau, le vecteur  $\mathbf{y}'_1$  est défini comme étant le vecteur reçu  $\mathbf{y}$  modulo 2 :

$$\mathbf{y}'_1 = \mathbf{y} \bmod 2 = (\mathbf{x} \bmod 2 + \mathbf{w} \bmod 2) \bmod 2 = (\mathbf{x}'_1 + \mathbf{w}'_1) \bmod 2$$

Il en résulte de (1) que  $\mathbf{x}'_1 \in C_1$ . L'opération modulo 2 replie le bruit gaussien  $\mathbf{w}$  et le résultat est un vecteur  $\mathbf{w}'_1$  composé de  $N$  variables aléatoires indépendantes  $w'_{1j}$ , avec  $1 \leq j \leq N$  et  $w'_{1j} \in [0, 2)$ , distribuées suivant une loi dénommée Wrapped Normal ( $\mathcal{WN}$ ) dans [11]. La densité de probabilité (PDF) des composantes du vecteur bruit à la sortie de l'opération modulo 2 est :

$$\begin{aligned} f_{WN}(w'_{1j}, \mu = 0, \sigma) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_N(w'_{1j} + 2k, 0, \sigma) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-\frac{(w'_{1j} + 2k)^2}{2\sigma^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

pour  $j = \{1, \dots, N\}$

où  $f_N(x, \mu, \sigma)$  est la loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

Le vecteur  $\mathbf{y}'_1$  est ensuite transmis au décodeur de  $C_1$ , dont la sortie est notée  $\hat{\mathbf{c}}_1$ . Si aucune erreur ne se produit au cours du premier processus de décodage, on obtient  $\hat{\mathbf{c}}_1 = \mathbf{x}'_1$ . Le deuxième étage reçoit le vecteur  $\mathbf{y}_2$  égal à :

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{y} - \hat{\mathbf{c}}_1}{2}$$

L'application de la seconde opération modulo 2 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_2 &= \mathbf{y}_2 \bmod 2 \\ &= \left( \frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{c}}_1}{2} \bmod 2 + \frac{\mathbf{w}}{2} \bmod 2 \right) \bmod 2 \\ &= (\mathbf{x}'_2 + \mathbf{w}'_2) \bmod 2 \end{aligned} \quad (3)$$

De manière similaire au niveau précédent, les composantes du vecteur  $\mathbf{w}'_2$  suivent une loi Wrapped Normal. Si aucune erreur de décodage ne s'est produite au niveau 1, on a  $\mathbf{x}'_2 \in C_2$ , et si, en plus, on suppose que l'opération de décodage dans  $C_2$  est sans erreur, on peut écrire  $\hat{\mathbf{c}}_2 = \mathbf{x}'_2$ . On continue à exécuter ce processus de décodage jusqu'au niveau  $r - 1$ . Au niveau  $r$ , seul un arrondi est effectué sur  $\mathbf{y}_r$ , puis l'estimation du décodage  $\hat{\mathbf{x}}$  est obtenue par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{r-1} 2^{i-1} \hat{\mathbf{c}}_i + \text{round}(\mathbf{y}_r) \times 2^{r-1}$$

Le calcul des probabilités à postériori au niveau  $i$  est donné par :

$$\text{APP} = \Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-\frac{(y'_{ij} - m + 2k)^2}{2\sigma^2}}$$

pour  $m = \{0, 1\}$  and  $j = \{1, \dots, N\}$   
et l'expression du LLR est :

$$\text{LLR} = \ln \left( \frac{\Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = 1)}{\Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = 0)} \right) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-(y'_{ij} - 1 + 2k)^2}}{\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-(y'_{ij} + 2k)^2}}$$

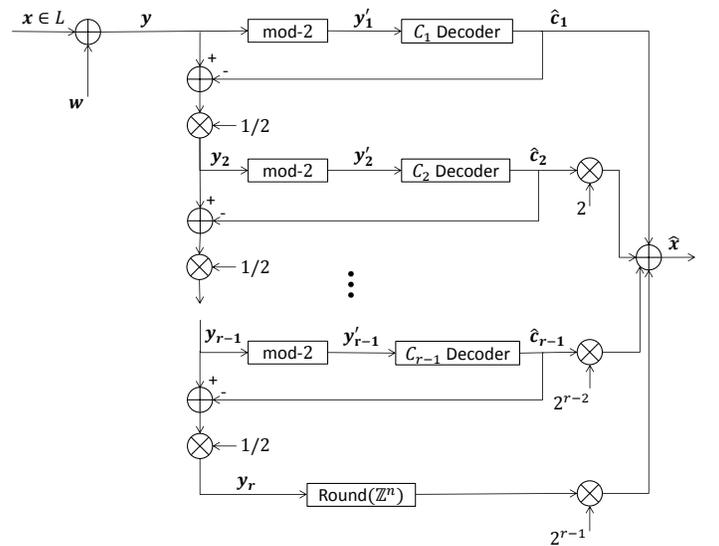


FIGURE 1 – Diagramme du décodeur multi-niveaux.

## 2.2 La distribution de von Mises

La distribution de von Mises, appelée également distribution normale circulaire ou distribution de Tikhonov, décrit une variable aléatoire circulaire. Cette distribution peut être considérée comme l'équivalent circulaire de la loi normale.

La densité de probabilité de la distribution de von Mises est donnée par [12] [13] :

$$f(\theta, \eta, \kappa) = \frac{e^{\kappa \cos(\theta - \eta)}}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (4)$$

où  $0 < \eta < 2\pi$  est la direction moyenne,  $\kappa \geq 0$  est le paramètre de concentration et

$$I_n(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos \xi} \cos(n\xi) d\xi \quad (5)$$

est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $n$ . La direction moyenne  $\eta$  est analogue à la moyenne d'une loi normale, alors que le paramètre de concentration  $\kappa$  est analogue à l'inverse de la variance d'une loi normale.

Une approximation de la loi de von Mises par une distribution Wrapped Normal a été proposée dans [14], en prenant  $\mu = \eta$  et  $\sigma^2 = -2 \ln(A(\kappa))$ , où  $A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$ .

Inversement, la loi de von Mises aura une direction moyenne  $\mu$  est un paramètre de concentration

$$\kappa = (A)^{-1} e^{-\sigma^2/2} \quad (6)$$

L'approximation de la probabilité à posteriori (4) par la loi de von Mises s'écrit donc :

$$\Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = m) = \frac{e^{\kappa \cos(\pi y'_{ij} - \pi m)}}{2\pi I_0(\kappa)} \quad \text{pour } m = \{0, 1\} \quad (7)$$

et l'estimation du LLR est :

$$\begin{aligned} \text{LLR} &= \ln \left( \frac{\Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = 1)}{\Pr(y'_{ij} | x'_{ij} = 0)} \right) \\ &= \kappa (\cos(\pi y'_{ij} - \pi) - \cos(\pi y'_{ij})) \end{aligned} \quad (8)$$

## 3 Résultats des Simulations

On applique l'estimation du LLR proposée à un décodeur à décision souple de deux niveaux. Les codes binaires linéaires employés sont les codes LDPC  $C_1$  de longueur 128 et de rendement 0.625 noté  $C_1(128, 80)$ , et le code  $C_2$  de longueur 128 et de rendement 0.5 noté  $C_2(128, 64)$  [15]. Au niveau du récepteur, les LLR estimés sont introduits dans un décodeur Belief Propagation et le Taux d'Erreur Symbole Normalisé (TESN) est calculé, où un symbole désigne un point du réseau de points de dimension 128. Le TESN est le taux d'erreur symbole par 2 dimensions et il est égal à  $\text{TES} \times \frac{2}{N}$  [16]. Aucune contrainte sur la puissance n'a été prise en compte dans les simulations illustrées dans la Fig. 2 : le TESN est tracé en fonction du rapport volume sur bruit (VNR) [16], défini par :

$$\text{VNR} = \frac{\det(\Lambda)^{\frac{2}{N}}}{2\pi e \sigma^2} \quad (9)$$

Pour chaque valeur du VNR, le paramètre de concentration  $\kappa$  est calculé selon l'équation (6) au moyen d'une table précalculée.

Deux méthodes différentes pour l'estimation du LLR sont comparées dans cette figure : la méthode proposée basée sur la distribution de von Mises, et le calcul exact utilisant les densités de probabilité du signal reçu [9]. Ces deux méthodes sont ensuite comparées au décodeur génie, qui permet de visualiser la limite inférieure des performances du décodeur multi-niveaux. Le décodeur génie possède une connaissance préalable des mots de code  $\mathbf{x}'_i$  sur chaque niveau, et l'erreur observée est donc due au décodage de  $\mathbf{y}_r$  dans le réseau de points des entiers décalés  $2^{r-1}\mathbb{Z}^N$ . Il est clair qu'une estimation du LLR utilisant la distribution de von Mises décrite précédemment n'introduit pas de perte en performance par rapport au calcul exact de LLR, et que les deux méthodes convergent vers la borne inférieure du décodeur génie.

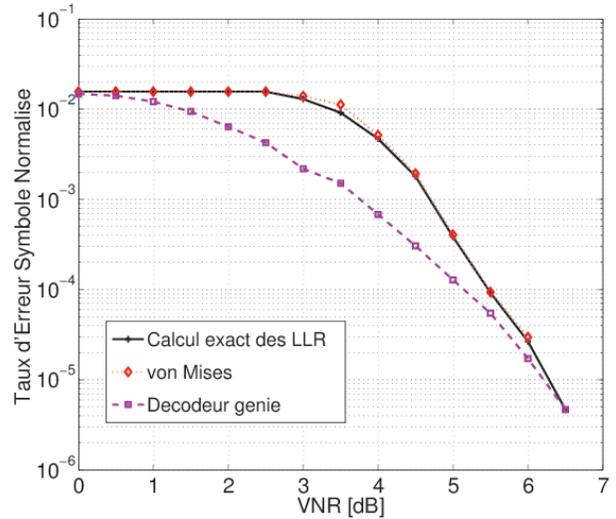


FIGURE 2 – Taux d'Erreur Symbole Normalisé pour différentes méthodes d'estimation du LLR.

## 4 Conclusion

Dans cet article, une approximation du LLR est proposée pour décoder des schémas de codage multi-niveaux basés sur les réseaux de points imbriqués. Cette approximation est basée sur la distribution de von Mises qui représente une approximation de la distribution du bruit gaussien replié par une opération modulo 2 dans le cas de l'utilisation des codes binaires. Elle a l'avantage d'être facilement réalisable puisque les sommes infinies impliquées dans l'expression des rapports de vraisemblance sont remplacées par une fonction cosinus. Les résultats

de simulation montrent que le gain en complexité apporté par cette approximation ne souffre d'aucune perte en taux d'erreur par rapport au calcul exact des rapports de vraisemblance.

[16] V. Tarokh, A. Vardy, and K. Zeger, "Universal Bound on the Performance of Lattice Codes.," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 2, pp. 670–681, 1999.

## Références

- [1] "Scenarios, requirements and kpis for 5g mobile and wireless system." Deliverable D1.1 of the METIS project, April 2013. available online at <https://www.metis2020.com>.
- [2] B. Nazer and M. Gastpar, "Compute-and-forward : Harnessing interference through structured codes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 57, pp. 6463–6486, Oct 2011.
- [3] C. Feng, D. Silva, and F. Kschischang, "An algebraic approach to physical-layer network coding," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 7576–7596, Nov 2013.
- [4] J. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer New York, 2010.
- [5] G. Forney, M. Trott, and S.-Y. Chung, "Sphere-bound-achieving coset codes and multilevel coset codes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 820–850, May 2000.
- [6] H. Imai and S. Hirakawa, "A new multilevel coding method using error-correcting codes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 23, pp. 371–377, May 1977.
- [7] S. Ma and W. Chen, "Binary multilevel coset codes with interlevel coding," *Electronics Letters*, vol. 43, pp. 936–937, August 2007.
- [8] A. Calderbank, "Multilevel codes and multistage decoding," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 37, pp. 222–229, Mar 1989.
- [9] Y. Yan and C. Ling, "A construction of lattices from polar codes," in *Information Theory Workshop (ITW), 2012 IEEE*, pp. 124–128, Sept 2012.
- [10] J. Forney, G.D., "Coset codes. II. binary lattices and related codes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 1152–1187, Sep 1988.
- [11] K. Mardia, *Statistics of Directional Data*. Academic Press, 1972.
- [12] N. I. Fisher, *Statistical Analysis of Circular Data*. Cambridge University Press, 1996.
- [13] J. P. E. Mardia K. V, *Directional Statistics*. New York : Wiley, 1999.
- [14] N. I. Fisher, "Problem with the current definition of the standard deviation of wind direction," *Journal of Climate and Applied Meteorology*, vol. 26, pp. 1522–1529, 1987.
- [15] "Short block length LDPC codes for TC synchronization and channel coding." CCSDS 231.0-O-y.y Orange book, October 2012.