

Reconstruction par transformation parcimonieuse de solutions à alphabet fini de systèmes linéaires sous-déterminés

Abdeldjalil AÏSSA-EL-BEY, Dominique PASTOR

Institut Mines-Télécom; Télécom Bretagne; UMR CNRS 6285 Lab-STICC,
Technopôle Brest-Iroise CS 83818, 29238 Brest, France
Université européenne de Bretagne
Prénom.Nom@telecom-bretagne.eu

Résumé – Nous considérons le problème d’estimer un vecteur à alphabet fini à partir d’un système sous-déterminé $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f}$, où \mathbf{A} est une matrice aléatoire générique réelle donnée de dimension $n \times N$. Une méthode originale par optimisation convexe est proposée pour reconstruire le vecteur par minimisation ℓ_1 . Cette méthode est basée sur une transformation du problème dans un domaine où la solution recherchée est parcimonieuse. Le comportement théorique de cette méthode est donné et illustrée expérimentalement.

Abstract – Consider the problem of estimating a deterministic finite alphabet vector \mathbf{f} from underdetermined measurements $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f}$, where \mathbf{A} is a given real random generic $n \times N$ matrix. A new convex optimization method is presented for the recovery of finite alphabet signals via ℓ_1 -norm minimization. This method is transform-based since it involves stating the problem as the recovery of sparse signals after a suitable sparse transform. The theoretical behavior of this transform-based method is given and experimentally illustrated.

1 Introduction

La séparation de sources est un problème rencontré dans de nombreuses applications, en traitement du signal audio et de la parole, en radar, en traitement d’images, en communications numériques. La séparation de sources a pour objectif d’estimer des signaux source à partir de leur mélange. Les méthodes sont classifiées suivant la nature du mélange (instantané, convolutif) et le rapport entre nombre de sources et nombre de capteurs du problème (déterminé, sous-déterminé, sur-déterminé). Le cas le plus difficile est évidemment le cas sous-déterminé où le nombre de sources est plus grand que le nombre de capteurs. Il faut alors recourir à des hypothèses supplémentaires. Par exemple, on peut souvent supposer que les sources peuvent être séparées grâce à leur représentation parcimonieuse dans le domaine temps-fréquence. On peut aussi exploiter les propriétés géométriques des signaux.

Dans cet article, nous considérons la séparation de sources ou signaux à alphabet fini, dans le cas instantané et sous-déterminé où la matrice de mélange est connue. Ce problème est important en communications numériques, en traitement d’images et en recherche opérationnelle. Le problème est posé en absence de bruit, comme dans [1–4]. Cependant, à la différence de ces références qui sont dédiées à des alphabets binaires, la solution que nous proposons s’applique à toute taille d’alphabet fini et sans supposer que le signal à reconstruire est nécessairement parcimonieux.

Pour ce faire, après avoir posé le problème mathématiquement, nous montrons que la séparation de signaux à alphabet fini dans le cas sous-déterminé et instantané peut être ré-

solu en transformant le problème initial de manière à ce que les signaux dans le domaine transformé soient parcimonieux. Nous utilisons ensuite une optimisation par minimisation de la norme ℓ_0 pour déterminer la solution parcimonieuse du problème transformé et reconstruire le signal à alphabet fini par transformée inverse. En suivant une approche similaire à celle proposée dans [5] ou [6], nous relaxons la norme ℓ_0 par une norme ℓ_1 afin de garantir la convexité du problème et simplifier son optimisation en pratique. Lorsque la matrice de mélange est aléatoire générique (*random generic*), nous énonçons le résultat théorique démontré dans [7] et selon lequel la relaxation par la norme ℓ_1 permet de reconstruire la solution exacte avec une forte probabilité, en vertu d’un principe d’incertitude. Nous illustrons ce résultat par des résultats expérimentaux et une discussion sur la complexité de la méthode.

2 Énoncé du problème

Soit le système linéaire sous-déterminé suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ est le vecteur source de dimension $N \times 1$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ est le vecteur observé de dimension $n \times 1$ et \mathbf{A} est une matrice de mélange réelle, aléatoire générique [1], de dimension $n \times N$ avec $n < N$. Nous rappelons qu’une matrice \mathbf{A} de taille $n \times N$ est aléatoire générique si tous les ensembles de n colonnes sont linéairement indépendants avec une probabilité 1 et si chaque colonne est symétriquement distribuée autour de 0.

Pour éviter le cas où le système sous-déterminé (1) n'admet aucune solution, nous supposons que \mathbf{A} est de rang plein. En communications numériques, la plupart des signaux sont générés à partir d'alphabets finis. Nous allons donc supposer que le système (1) admet au moins une solution dans \mathcal{F}^N où $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ est un alphabet fini donné. Etant donné $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{F}^N, \quad (2)$$

nous allons étudier sous quelles conditions \mathbf{f} est l'unique solution de cette équation et comment cette unique solution dans \mathcal{F}^N peut être reconstruite en un temps polynomial.

3 Méthode de reconstruction par transformation parcimonieuse

Une solution au problème (2) a été donnée dans [1] pour $\mathcal{F} = \{-1, 1\}$. Cette solution consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P_\infty) : \quad \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{sous contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (3)$$

Cette solution s'étend immédiatement au cas de tout alphabet $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$. Les solutions sont parmi les sommets de l'hypercube $[\alpha_1, \alpha_2]^N$. Cependant, par construction, cette méthode ne s'applique aux alphabets de cardinalité $p > 2$. En effet, quand $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ où $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$, l'ensemble des solutions dans \mathcal{F}^N du système (2) peut comprendre des points à l'intérieur de l'hypercube $[\alpha_1, \alpha_p]^N$.

La solution que nous proposons permet de pallier cette limitation en transformant le problème pour le résoudre grâce à des contraintes de parcimonie.

Nous allons plonger \mathcal{F}^N dans \mathbb{R}^{Np} , de sorte que tout $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^N$ est représenté par un vecteur parcimonieux $\mathbf{s}(\mathbf{f}) \in \mathbb{R}^{Np}$. Ce vecteur parcimonieux résulte de la concaténation de N vecteurs de dimension p . Chaque sous-vecteur de dimension p a toutes ses coordonnées nulles sauf une égale à 1. Plus précisément, pour tout $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^N$, nous définissons :

$$\mathbf{s}(\mathbf{f}) = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N]^T \in \mathbb{R}^{Np} \quad (4)$$

avec $\epsilon_i = [\mathbb{I}(f_i = \alpha_1), \mathbb{I}(f_i = \alpha_2), \dots, \mathbb{I}(f_i = \alpha_p)]$ et où $\mathbb{I}(f_i = \alpha_j)$ est la fonction indicatrice égale à 1 si $f_i = \alpha_j$ et 0 si $f_i \neq \alpha_j$. Ce type de transformation est connue en recherche opérationnelle sous le nom de codage disjonctif complet.

Soient les matrices \mathbf{B}_α et \mathbf{B}_1 dans $\mathbb{R}^{N \times Np}$ définies par :

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\alpha}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}_p^T, \quad (5)$$

où $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_p]^T$ et \otimes est le produit de Kronecker. Par définition, nous avons donc :

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{s}(\mathbf{f}) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_1 \mathbf{s}(\mathbf{f}) = \mathbf{1}_N. \quad (6)$$

Par conséquent :

$$\Phi \mathbf{s}(\mathbf{f}) = \mathbf{b} \quad \text{with} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}_\alpha \\ \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{1}_N \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Grâce à la transformation (7), nous pouvons reconstruire le signal \mathbf{f} par application du résultat suivant.

Proposition 3.1 *Si $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^N$ est l'unique solution du système (2), le vecteur $\mathbf{s}(\mathbf{f})$ défini par Eq. (4) est l'unique solution du problème :*

$$(TP_{\mathcal{F},0}) : \quad \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Np}} \|\mathbf{u}\|_0 \quad \text{sous contrainte } \Phi \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

L'application de ce résultat requiert une recherche exhaustive pour calculer l'unique solution de $(TP_{\mathcal{F},0})$, avant d'appliquer la transformation linéaire \mathbf{B}_α qui nous permet de reconstruire \mathbf{f} . Il est donc souhaitable de chercher à réduire le coût de calcul en relaxant la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 . Nous sommes donc amenés à considérer le problème d'optimisation suivant :

$$(TP_{\mathcal{F},1}) : \quad \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Np}} \|\mathbf{u}\|_1 \quad \text{sous contrainte } \Phi \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

L'ensemble des solutions de $(TP_{\mathcal{F},1})$ ne se réduit pas forcément à seulement $\mathbf{s}(\mathbf{f})$. Cependant, on peut espérer que la projection de cet ensemble de solution par \mathbf{B}_α se réduit à la solution recherchée \mathbf{f} . Autrement dit, a-t-on $\mathbf{f} = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{s}$ pour toute solution \mathbf{s} de $(TP_{\mathcal{F},1})$? La réponse à cette question est fournie par le théorème suivant, qui est notre résultat principal et dont le lecteur trouvera la démonstration dans [7]. Dans cet énoncé, nous utilisons la notion de croissance proportionnelle [8] : une suite de couples (n, N_n) croît proportionnellement s'il existe $\delta \in (0, 1)$ tel que : $\frac{n}{N_n} \rightarrow \delta$ when $n \rightarrow +\infty$. Conformément à l'usage, l'indexation par n sera omise dans la suite.

Théorème 3.1 *Soit l'alphabet fini $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ avec $p \geq 2$. Si \mathcal{S} est l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^{Np} du problème d'optimisation $(TP_{\mathcal{F},1})$, alors :*

- (i) $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^N$ est l'unique solution de (2) si et seulement si $\mathbf{B}_\alpha(\mathcal{S}) \cap \mathcal{F}^N = \{\mathbf{f}\}$,
- (ii) Si \mathbf{A} est une matrice aléatoire générique réelle de dimension $n \times N$ et si (2) est vérifiée pour un vecteur \mathbf{f} choisi aléatoirement et de manière uniforme dans \mathcal{F}^N , la probabilité que $\mathbf{B}_\alpha(\mathcal{S}) \cap \mathcal{F}^N = \{\mathbf{f}\}$ est donnée par :

$$Q_{n,N}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N}{k} \left(\frac{2}{p}\right)^{N-k} \left(\frac{p-2}{p}\right)^k (1 - P_{N-n, N-k})$$

$$\text{avec : } P_{n,N} = 2^{-N+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N-1}{i},$$

- (iii) **[Principe d'incertitude]** *Si les hypothèses de (ii) sont vérifiées et si (n, N) croît de manière proportionnelle, $Q_{n,N}(p)$ tend vers 0 quand $\frac{n}{N} < \frac{p-1}{p}$ et tend vers 1 si $\frac{n}{N} > \frac{p-1}{p}$.*

Pour $p = 2$, nous disposons donc de deux critères différents : le critère $(TP_{\mathcal{F},1})$ introduit ci-dessus et le critère (P_∞) proposé dans [1]. En prenant $p = 2$ dans (ii) et (iii) du théorème précédent, on constate que les performances du critère $(TP_{\mathcal{F},1})$ sont les mêmes que celles de (P_∞) .

4 Simulations

Dans ces expérimentations, nous comparerons l’approche par transformation introduite dans cet article à celle proposée dans [1], puisque cette dernière représente l’état de l’art pour la reconstruction de signaux dans un alphabet binaire. Ensuite, nous présentons les résultats obtenus avec notre approche pour plusieurs valeurs de p afin de confirmer expérimentalement le théorème 3.1.

Sans perte de généralité, nous considérons des valeurs paires de p et l’alphabet est $\mathcal{F} = \{\pm(2k - 1) : k = 1, \dots, p/2\}$. Le nombre d’observations n varie ensuite de manière à tester un nombre significatif du rapport n/N . Pour chaque couple (n, N) et chaque méthode testée, 1000 itérations de Monte-Carlo sont réalisées. Pour chaque itération, nous générons une réalisation de la matrice aléatoire générique \mathbf{A} dont les coefficients sont tirés aléatoirement et indépendamment selon une distribution normale. Nous générons aussi le vecteur \mathbf{f} en choisissant aléatoirement et indépendamment chacune de ses coordonnées selon une loi uniforme dans \mathcal{F} . Une fois \mathbf{f} généré, on calcule $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ et résolvons (P_∞) — quand $p = 2$ — et $(TP_{\mathcal{F},1})$. Les solutions à ces problèmes d’optimisation sont calculées en utilisant la boîte à outils CVX de Matlab [9, 10]. Nous comparons ensuite la solution $\hat{\mathbf{f}}$ obtenue par minimisation au vrai signal \mathbf{f} . Nous considérons que la reconstruction est correcte si l’erreur relative $\frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}$ est inférieure à 10^{-6} .

Les figures 1 et 2 présentent les diagrammes de phase pour $p = 2$ et $N = 256, 512$. Ces figures montrent que, conformément à la théorie, la méthode par transformation introduite ci-dessus et la méthode proposée par Mangasarian et Recht dans [1] ont les mêmes performances, avec un point de rupture commun à $n/N = 1/2$. Ces méthodes sont équivalentes aussi en terme de complexité, comme le montre le tableau 1 dont les explications détaillées sont données dans [7].

Pour $p > 2$, l’approche proposée dans [1] ne s’applique pas. Aussi, les figures 3 et 4 présentent les diagrammes de phase de la méthode par transformation proposée pour $p = 4, p = 6$ et différentes valeurs de N . On constate que le point de rupture de la méthode par transformation est conforme à celui démontré par le Théorème 3.1.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode pour résoudre des systèmes linéaires sous-déterminés dont on cherche une solution à alphabet fini. L’originalité de l’approche consiste à employer une transformation qui permet de rendre parcimonieux le vecteur à alphabet fini recherché. Une minimisation de norme ℓ_1 permet de déterminer les solutions du problème dans le domaine transformé et nous avons énoncé le résultat théorique qui permet la reconstruction du signal à alphabet fini et garantit que cette reconstruction est exacte avec forte probabilité selon un principe d’incertitude.

Pour traiter le cas bruité, le critère $(TP_{\mathcal{F},1})$ peut être légè-

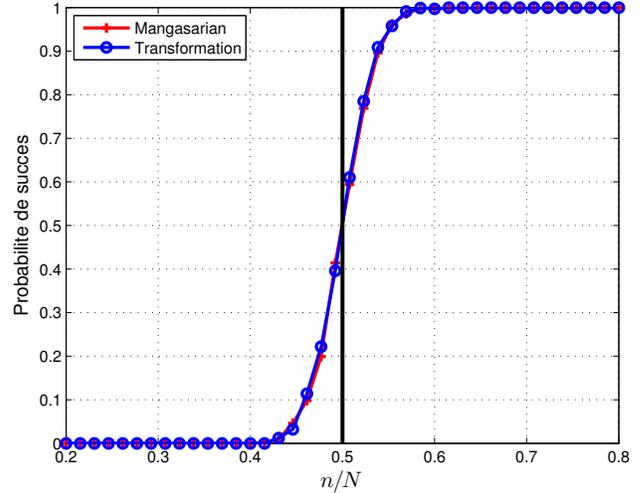


FIGURE 1 – Diagrammes de phase de la méthode par transformation en comparaison de [1] pour $p = 2$ et $N = 256$.

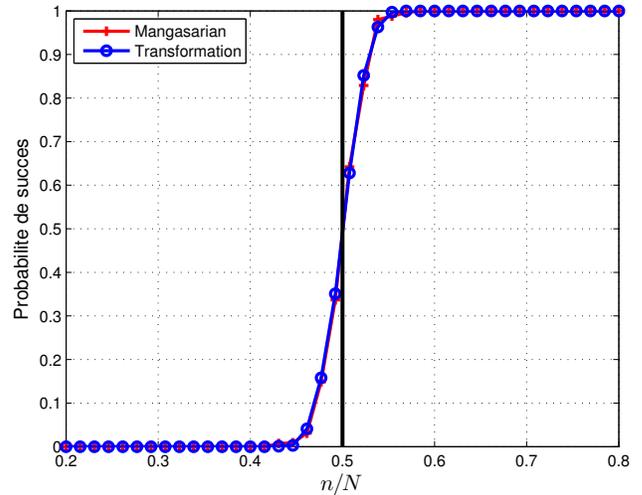


FIGURE 2 – Diagrammes de phase de la méthode par transformation en comparaison de [1] pour $p = 2$ et $N = 512$.

rement modifié comme proposé dans [11, 12]. Une étude théorique du cas bruité, se basant sur [11, 12], est donc en cours.

Références

- [1] O. L. Mangasarian and B. Recht, “Probability of unique integer solution to a system of linear equations,” *European Journal of Operational Research*, vol. 214, no. 1, pp. 27–30, April 2011.
- [2] Z. Tian, G. Leus, and V. Lottici, “Detection of sparse signals under finite alphabet constraints,” in *IEEE In-*

TABLE 1 – Analyse de complexité

	Dimension	# contraintes	# itérations	coût par iteration	Total
(P_∞)	N	$2N + n$	$\mathcal{O}(\sqrt{2N + n})$	$\mathcal{O}(N^2(2N + n))$	$\mathcal{O}(N^2(2N + n)^{3/2})$
$(TP_{\mathcal{F},1})$	pN	$N + n$	$\mathcal{O}(\sqrt{N + n})$	$\mathcal{O}(p^2 N^2(N + n))$	$\mathcal{O}(p^2 N^2(N + n)^{3/2})$

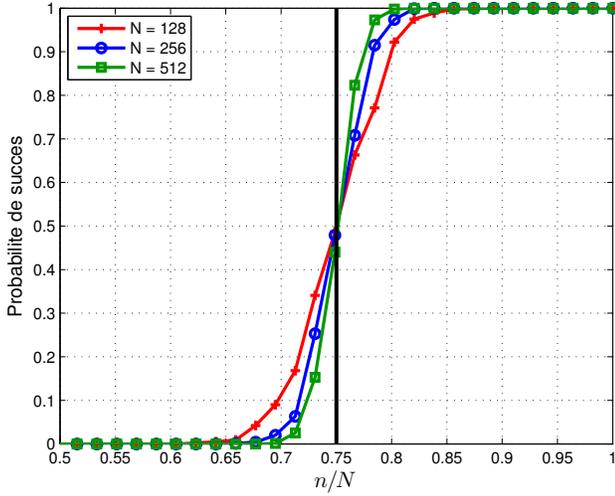


FIGURE 3 – Diagrammes de phase de la méthode par transformation, pour $p = 4$ et $N \in \{128, 256, 512\}$.

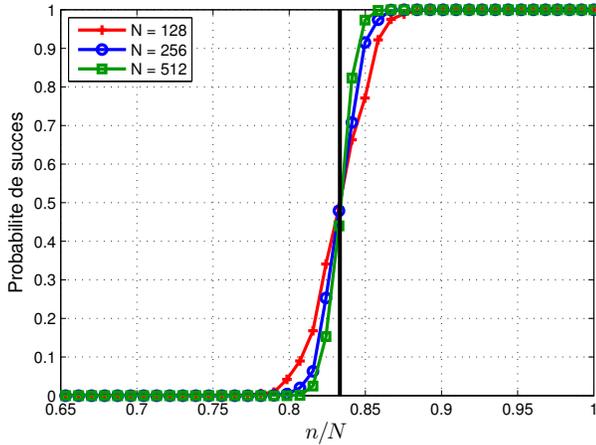


FIGURE 4 – Diagrammes de phase de la méthode par transformation, pour $p = 6$ et $N \in \{128, 256, 512\}$.

International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), Taipei, Taiwan, April 2009, pp. 2349–2352.

- [3] T. S. Jayram, S. Pal, and V. Arya, “Recovery of a sparse integer solution to an underdetermined system of linear equations,” *CoRR*, vol. abs/1112.1757, December 2011.
- [4] S. M. Aziz-Sbai, A. Aïssa-El-Bey, and D. Pastor, “Underdetermined source separation of finite alphabet signals via ℓ_1 minimization,” in *IEEE International Conference on Information Sciences, Signal Processing and their Applications (ISSPA)*, Montreal, Quebec, Canada, July 2012, pp. 625–628.
- [5] D. L. Donoho and M. Elad, “Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS)*, vol. 100, no. 5, pp. 2197–2202, March 2003.
- [6] R. Gribonval and M. Nielson, “Sparse representations in unions of bases,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 12, pp. 3320–3325, December 2003.
- [7] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S.M. Aziz-Sbai, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based Recovery of Finite Alphabet Solutions to Underdetermined Linear Systems,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, April 2015.
- [8] D.L. Donoho and J. Tanner, “Counting faces of randomly projected polytopes when the projection radically lowers dimension,” *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 22, no. 1, pp. 1–53, 2009.
- [9] M. Grant and S. Boyd, “CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1,” <http://cvxr.com/cvx>, March 2014.
- [10] M. Grant and S. Boyd, “Graph implementations for nonsmooth convex programs,” in *Recent Advances in Learning and Control*, pp. 95–110. Springer-Verlag Limited, 2008, http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html.
- [11] Y. Fadlallah, A. Aïssa-El-Bey, K. Amis, R. Pyndiah, and D. Pastor, “New decoding strategy for underdetermined MIMO transmission sparse decomposition,” in *21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, September 2013.
- [12] Y. Fadlallah, A. Aïssa-El-Bey, K. Amis, D. Pastor, and R. Pyndiah, “New iterative detector of MIMO transmission using sparse decomposition,” to appear in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2015.