

Analyse multirésolution opérée sur des exposants de singularité en formalisme microcanonique: détermination de la dynamique océanique et des échanges océan/atmosphère submésoséchelle

Joel SUDRE¹, Hussein YAHIA², Véronique GARÇON¹,

¹Équipe DYNBIO, LEGOS CNRS UMR 5566, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue E. Belin, F-31400 Toulouse, France.

²INRIA, 200 rue de la Vieille Tour, 31405 Talence Cedex, France.

joel.sudre@legos-obs-mip.fr, hussein.yahia@inria.fr
veronique.garcon@legos.obs-mip.fr

Résumé – Cet article propose une méthodologie générale permettant la génération à haute résolution spatiale de données physiques à partir de données basse résolution et leur propagation le long des échelles d’une analyse multirésolution appropriée. L’idée principale réside en la définition d’une analyse multirésolution déterminée sur des exposants de singularité d’un signal turbulent calculés dans un formalisme microcanonique. Nous présentons deux résultats principaux: le calcul de la dynamique océanique submésoséchelle (géostrophique et agéostrophique) sur des données réelles et sans utiliser de multiples occurrences temporelles; et le calcul à haute résolution spatiale des cartes de pression partielle de dioxyde de carbone océanique pCO_2 à partir de données de simulation à basse résolution spatiale.

Abstract – This article introduces a general methodology for the determination of high resolution physical data from low resolution counterpart; the method makes use of an appropriate multiresolution analysis for inference along the scales, the fundamental point being that such analysis is determined on critical transitions (*singularity exponents* computed in a microcanonical framework). Two results are presented: first, the determination of submesoscale (geostrophic and ageostrophic) ocean dynamics from real data without the use of extra temporal occurrences; second, the computation of high resolution maps of oceanic carbon dioxide partial pressures pCO_2 .

1 Introduction

Dans cet article, nous introduisons une méthode radicalement nouvelle pour la détermination à haute résolution spatiale (submésoséchelle [1]) de la dynamique océanique de surface. La méthode s’applique à la génération à haute résolution d’un signal complexe à partir de données basse résolution par inférence, le long des échelles, d’informations propagées par une analyse multirésolution [6] associée à la hiérarchie multiéchelles naturellement présente dans les acquisitions de systèmes complexes [7]. Nous montrons le caractère général de l’approche en calculant des cartes de pressions pCO_2 [4] à haute résolution spatiale à partir de données basse résolution. L’idée fondamentale repose sur la détermination d’une analyse multirésolution calculée sur des exposants de singularité à haute précision numérique, et dans un cadre microcanonique [6][8].

2 Exposants de singularité en formulation microcanonique et analyse multirésolution associée

On sait que la plupart des systèmes présentant une invariance d’échelle, et en particulier les acquisitions de fluides turbu-

lents, peuvent être décrits sous la forme d’une hiérarchie multiéchelles [2, 3]. L’analyse des singularités donne un moyen d’accès à cette hiérarchie multiéchelles prévue par la théorie: dans une description globale thermodynamique et macroscopique de ces systèmes, les variables intensives et les fonctions thermodynamiques présentent naturellement un comportement en loi de puissance au voisinage des points critiques. De plus, une telle hiérarchie multiéchelles entretient des rapports avec les phénomènes de cascades multiplicatives liés à l’intermittence, et elle est donc susceptible de jouer un rôle important pour l’inférence optimale de variables physiques le long des échelles. Il existe plusieurs voies d’approches au calcul des exposants de singularité, et nous considérons ici un cadre microcanonique et l’introduction d’une mesure basée sur le gradient [7]. Etant donné un signal 2D s correspondant à l’acquisition d’un phénomène turbulent, des exposants de singularité peuvent être calculés de diverses manières, soit en considérant l’analogie de "fonctions de structure" sur un grand ensemble [9], ou d’un point de vue "microcanonique", en examinant le comportement local d’une mesure dont la densité est la norme du gradient du signal:

$$d\mu(\mathbf{x}) = \|\nabla s\|(\mathbf{x}) dx \quad (1)$$

c’est à dire que la mesure d’un borélien quelconque \mathcal{A} est donnée par:

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} d\mathbf{x} \|\nabla s\|(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Soit $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$ la boule de de rayon r centrée en \mathbf{x} . On a [9]:

$$\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x}) r^{2+h(\mathbf{x})} + o\left(r^{2+h(\mathbf{x})}\right) \quad (r \rightarrow 0) \quad (3)$$

cependant une regression log-log directe basée sur cette équation donne lieu à des instabilités numériques [9] c'est la raison pour laquelle il est préférable de considérer le comportement de la mesure en fonction des échelles via une projetée en ondelettes:

$$\mathcal{T}_\psi \mu(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mu(\mathbf{x}') \frac{1}{\mathbf{r}^2} \psi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\mathbf{r}}\right) \quad (4)$$

On a alors:

$$\mathcal{T}_\psi \mu(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \sim \mathbf{r}^{h(\mathbf{x})} \quad \mathbf{r} \rightarrow 0 \quad (5)$$

pour les mêmes exposants de singularité $h(\mathbf{x})$ en \mathbf{x} . La détermination numérique peut alors être implémentée sous la forme d'une regression log-log sur les échelles \mathbf{r} , mais les expériences numériques montrent que les estimées ponctuelles des exposants de singularité sous la forme:

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\log(\mathcal{T}_\psi \mu(\mathbf{x}, r_0) / \langle \mathcal{T}_\psi \mu(\cdot, r_0) \rangle)}{\log r_0} + o\left(\frac{1}{\log r_0}\right) \quad (6)$$

avec $\langle \mathcal{T}_\psi \mu(\cdot, r_0) \rangle$: valeur moyenne de la projetée en ondelettes sur le signal permettent de diminuer l'amplitude relative du terme correcteur $o\left(\frac{1}{\log r_0}\right)$. L'échelle r_0 est choisie telle que, pour une image de taille $N \times M$, elle corresponde au plus petit élément d'aire du signal numérique sachant que le domaine du signal a pour mesure 1, donc

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{NM}} \quad (7)$$

La cascade multiplicative associée à la dissipation d'énergie entre les échelles possède également une formulation microcanonique [5]:

$$\mathcal{T}_\psi(s)(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) = \xi_{\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2}(\mathbf{x}) \mathcal{T}_\psi(s)(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2) \quad (8)$$

et le processus d'injection $\xi_{\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2}(\mathbf{x})$ entre les échelles est indépendant de $\mathcal{T}_\psi(s)(\mathbf{x}, \mathbf{r})$. En outre, l'injection d'énergie ou, d'un point de vue signal, d'"information" entre les échelles s'opère dans la hiérarchie multiéchelles qui est ici accessible par les exposants de singularité localisés calculés dans un cadre microcanonique [7]:

$$\mathcal{F}_h = \{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) = h\} \quad (9)$$

et, en particulier, l'ensemble des points les plus imprédictibles s'obtient en considérant les points du signal dont l'exposant de singularité est le plus petit, correspondant au lieu géométrique, dans le domaine du signal, où les transitions sont les plus fortes:

$$\mathcal{F}_\infty = \{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) = h_\infty = \min(h(\mathbf{x}))\}. \quad (10)$$

Puisque les exposants de singularité localisés et calculés dans un cadre microcanonique donnent accès à la hiérarchie multiéchelles des signaux complexes et turbulents prévue par la

théorie, et que ces exposants ont, au contraire des détecteurs de bord habituellement utilisés en traitement d'image, des valeurs non binaires et situées dans un continuum, il est possible de les utiliser pour construire une analyse multirésolution [6]:

$$\{0\} \subset \dots \subset V_0 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}^2) \quad (11)$$

calculée sur ces exposants pour approximer les phénomènes de cascade multiplicative présents dans les systèmes et inférer des informations entre les échelles. L'analyse multirésolution que nous avons testée est implémentée de façon classique par une trame dyadique, des bancs de filtre et une ondelette mère de Battle-Lemarié 3-41 [6]. Dans la section suivante, nous appliquons cette idée à deux exemples.

3 Applications: haute résolution en dynamique océanique submésoscale et en évaluation des échanges océan-atmosphère

La dynamique submésoscale complète peut être obtenue à la résolution des données MODIS de température de surface (SST) d'une manière qui généralise l'étude initialement restreinte à l'orientation d'un champ unitaire présentée dans [5]. A basse résolution ($1/4^\circ$, ici 28 kms), nous utilisons une combinaison des données de courants d'Ekman à 15 m, obtenues à partir de données de vent QuikSCAT journalières, et de données hebdomadaires MLSA de topographie dynamique moyenne dont on déduit des courants géostrophiques moyens. Ces données combinées sont journalières et constituent les données de dynamique océanique à basse résolution. L'analyse multirésolution est calculée sur les exposants de singularité des données SST haute résolution submésoscale (taille du pixel: 4 kms), obtenue par combinaison de données OSTIA (produits SST fusion de SST IR et MW à la résolution $1/20^\circ$) et de données MODIS AQUA SST (IR) au $1/24^\circ$. Le champ de vecteurs est propagé le long des échelles de l'analyse multirésolution composante par composante (données scalaires). Nous résumons ci-dessous l'algorithme de génération de la dynamique océanique à haute résolution à partir des données basse résolution et d'une analyse multirésolution calculée sur les données à haute résolution SST):

Données d'entrée:

- Données SST MODIS et OSTIA haute résolution.
- Champ de vecteurs basse résolution QuickSCAT et MLSA.

- 1-Calculer les exposants de singularité des données SST.
- 2-Déterminer une analyse multirésolution sur les exposants de singularité des données SST.
- 3-Propager composante par composante

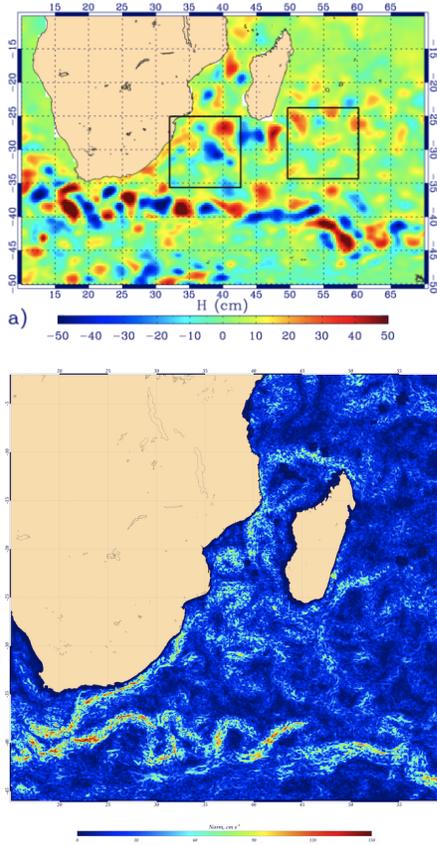


FIG. 1: **Haut**: donnée d'altimétrie à basse résolution spatiale ($1/4^\circ$) sur laquelle la dynamique géostrophique et agéostrophique est extraite. **Bas**: résultat du calcul de la dynamique océanique en obtenue en propageant le champ de vitesse à basse résolution issu de l'altimétrie (image de gauche) par une analyse multirésolution calculée sur les exposants de singularité d'un signal température de surface acquis au même moment (données SST: OSTIA et MODIS, l'image de droite est une représentation du flot du champ de vitesses instantané).

le champ de vecteurs basse résolution donné en entrée le long des échelles de l'analyse multirésolution calculée en 2 pour obtenir un champ de vecteurs à la résolution des données SST.

Un résultat est montré figure 1.

Dans un deuxième exemple, nous effectuons une régression linéaire calculée sur les exposants de singularité microcanoniques et conduite sur 10 années de données issues du modèle de simulation ROMS (ROMS Benguela, configuration SAFE AGRIF 2 ways, $1/12^\circ$ et $1/4^\circ$ - mis à $1/3^\circ$ pour s'adapter à la résolution dyadique des ondelettes - correspondant aux zones $-2^\circ\text{E}/55^\circ\text{E}$ et $-5^\circ\text{S}/-48^\circ\text{S}$ pour le $1/4^\circ$, child domain $7^\circ\text{E}/20^\circ\text{E}$ et $-11^\circ\text{S}/-35^\circ\text{S}$ pour le $1/12^\circ$). Ensuite nous générons un signal $p\text{CO}_2$ haute résolution de la manière suivante: le signal basse résolution $p\text{CO}_2$ (taille du pixel: 28 kms) est généré par ROMS, puis nous calculons un signal haute réso-

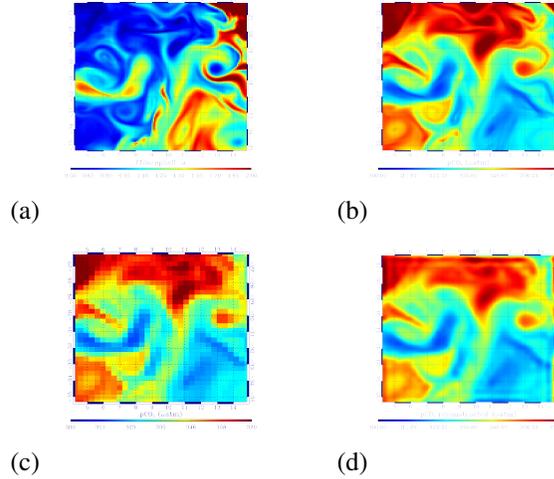


FIG. 2: Reconstruction d'un signal $p\text{CO}_2$ haute résolution par inférence de la donnée $p\text{CO}_2$ basse résolution, le long d'une analyse multirésolution conduite sur les exposants de singularités en formulation microcanonique et interpolés linéairement à partir des données d'exposants de singularité $\mathcal{S}(\text{SST})$ et $\mathcal{S}(\text{CHL}_a)$. (a): donnée de CHLa haute résolution. (b): donnée haute résolution $p\text{CO}_2$ générée par ROMS et utilisée ici pour vérifier la qualité de la reconstruction obtenue. (c): donnée $p\text{CO}_2$ basse résolution. (d): $p\text{CO}_2$ haute résolution reconstruit par l'analyse multirésolution. Comparer les images (b) et (d).

lution d'exposants de singularité $\mathcal{S}(p\text{CO}_2)$ en utilisant la régression linéaire et les données haute résolution $\mathcal{S}(\text{SST})$ et $\mathcal{S}(\text{CHL}_a)$ d'exposants de singularité issus des données correspondantes SST et CHL_a (haute résolution) disponibles par ROMS. Le signal $\mathcal{S}(p\text{CO}_2)$ d'exposants de singularité génère une analyse multirésolution, et un signal reconstruit $p\text{CO}_2$ est obtenu en remontant cette analyse multirésolution dans laquelle la donnée basse résolution a été substituée par le signal ROMS $p\text{CO}_2$ basse résolution. Voir figure 2.

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons voulu montrer qu'une analyse multirésolution calculée non pas sur les signaux eux-mêmes, mais sur des quantités qui encodent à haute précision numérique les transitions d'un signal complexe, est d'un intérêt considérable pour l'inférence le long des échelles, et donc pour le calcul d'un signal physique à haute résolution spatiale à partir de données acquises en basse résolution. Nous avons également montré expérimentalement que les exposants de singularité calculés en formulation microcanonique constituent un signal privilégié pour effectuer une telle analyse. La raison provient du fait que ces exposants permettent d'accéder à la structuration multiéchelles existante dans un signal complexe -en particulier un signal turbulent -, cette dernière étant le lieu de réalisation d'une cascade multiplicative (en mode microcanon-

ique): par conséquent les inférences sont optimisées le long des échelles d'une analyse multirésolution associée aux exposants de singularité. Les deux applications que nous avons envisagées dans cette étude, la dynamique océanique submésoscale et les échanges de flux entre l'océan et l'atmosphère, démontrent le potentiel considérable de cette approche en Sciences de l'Univers.

Remerciements

Ces recherches sont financées par les contrats CNES-OSTST: ICARODE, HIRESUBCOLOR, et le contrat ESA: OCEAN-FLUX (Esrin/AO/1-6668/11-I-AM).

Références

- [1] L. N. Thomas, A. Tandon, A. Mahadevan, "Submesoscale processes and dynamics", *Ocean Modeling in an Eddy Regime, Geophysical Monograph Series 177*, American Geophysical Union, doi: 10.1029/177GM04, 2008.
- [2] U. Frisch, "Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov", *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, MA, 1995.
- [3] Z. S. She, E. Leveque, "Universal scaling laws in fully developed turbulence", *Physical Review Letters*, 72:336â339, 1994.
- [4] C. S. Garbe, R. A. Handler, B. Jahne, "Transport at the Air-Sea Interface - Measurements, Models and Parameterizations", *Heidelberg: Springer Verlag*, doi: 10.1007/978-3-540-36906-6, 2007.
- [5] H. Yahia, J. Sudre, C. Pottier, V. Garçon, "Motion analysis in oceanographic satellite images using multiscale methods and the energy cascade", *Pattern Recognition*, Elsevier, 43 (10), 3591–3604, doi: 10.1016/j.patcog.2010.04.011, 2010.
- [6] S. Mallat, "A wavelet tour of signal processing, Third edition: The sparse way", *Academic Press*, 2008.
- [7] A. Turiel, H. Yahia, C. Perez-Vicente, "Microcanonical multiscale formalism: a geometrical approach to multifractal systems. Part 1: singularity analysis", *Journal of Physics A: Math. Theor.*, 41, doi: 10.1088/1751-8113/41/1/015501, 2008.
- [8] J. F. Muzy, E. bacry, A. Arneodo, "Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data", *Physical Review Letters*, 67, 3515, doi: 10.1103/PhysRevLett67.3515, 1991.
- [9] A. Turiel, C. Perez-Vicente, J. Grazzini, "Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra on sampled data: a comparative study", *Journal of Computational Physics*, 216, 362–390, doi: 10.1016/j.jcp.2005.12.004, 2005.