

# Estimation bayésienne du paramètre de multifractalité

Herwig WENDT<sup>1</sup>, Nicolas DOBIGEON<sup>1</sup>, Jean-Yves TOURNERET<sup>1</sup>, Patrice ABRY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Toulouse, IRIT/INP-ENSEEIH, UMR CNRS 5505, F-31062 Toulouse, France

<sup>2</sup>ENS Lyon, Laboratoire de Physique, UMR CNRS 5672, F-69007 Lyon, France

Travail soutenu par l'ANR AMATIS #112432, 2012-2015

prénom.nom@irit.fr ; patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – L’analyse multifractale est largement utilisée pour caractériser et interpréter les propriétés d’invariance d’échelle de données expérimentales issues de multiples et diverses applications. Cependant, l’estimation du paramètre dit *de multifractalité*, qui permet de discriminer entre grandes classes de processus modèles pour l’invariance d’échelle, est délicate. Quand la taille des données est limitée notamment, la performance des estimateurs classiques, reposant principalement sur des régressions linéaires, est souvent trop faible, limitant ainsi la possibilité d’une véritable utilisation pratique de ce paramètre. Dans cette contribution, nous envisageons une procédure dont l’originalité est double. D’une part, nous construisons un modèle semi-paramétrique générique pour décrire la statistique du logarithme des coefficients dominants de processus multifractals, construits à partir de cascades multiplicatives (une déclinaison adaptée à l’analyse multifractale des coefficients d’ondelettes classiquement utilisés). D’autre part, nous élaborons une formulation bayésienne adaptée à ce problème ainsi qu’un algorithme MCMC pour approcher la loi a posteriori et les estimateurs bayésiens. La pertinence du modèle semi-paramétrique proposé et l’intérêt et la qualité des estimateurs bayésiens construits sont évalués au moyen de simulations numériques. Nous montrons la réelle amélioration des performances d’estimation obtenues à partir du schéma bayésien.

**Abstract** – In a wide variety of applications, multifractal analysis has been abundantly used for the characterization and interpretation of scale invariance properties of experimental data. The parameter of *multifractality* or *intermittency* plays a central role in such an analysis as it enables the discrimination of large classes of scale invariance model processes. Yet, its estimation remains delicate in situations where sample size is limited since classical estimators, relying on simple linear regressions, exhibit large bias and / or variability, which severely limits the practical use of such estimates. To overcome such limitations, this contribution proposes an alternative estimation procedure. Its originality is twofold: First, we construct a generic semi-parametric model for the statistics of the logarithm of wavelet leaders (a declination, adapted for multifractal analysis, of classically used wavelet coefficients) for multiplicative cascade based multifractal processes. Second, we develop a Bayesian formulation of the estimation problem as well as an MCMC algorithm for approximating the associated posterior distributions and Bayesian estimators. The relevance of the proposed semi-parametric model and the performance of the Bayesian estimators are assessed by means of numerical simulations. We show that the proposed Bayesian procedure yields significantly improved estimation performance.

## 1 Contexte, motivations et contributions

**Analyse multifractale.** L’analyse multifractale vise à caractériser les propriétés d’invariance d’échelle et les fluctuations de la régularité locale d’un signal  $X$  et constitue aujourd’hui un outil classique en traitement du signal et de l’image, communément utilisé dans de multiples applications de natures très différentes, parmi lesquelles, par exemple, le biomédical (rythme cardiaque [9], IRMf [6]), physique (turbulence [13]), géophysique (rain-falls [7]), finance [14], trafic Internet [1], ...

Récemment, un formalisme, pour la mise en oeuvre pratique de l’analyse multifractale, a été proposé. Il repose sur l’utilisation des *coefficients dominants* d’ondelette,  $L_X(j, k)$ , une variation adaptée théoriquement et pratiquement aux propriétés multifractales des coefficients d’ondelettes [10, 18]. Il postule que les moyennes temporelles (à une échelle d’analyse  $a = 2^j$ ) des puissances  $q$ -ème des  $L_X(j, k)$ ,  $S(q, j) \equiv \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X^q(j, k)$ , se comportent comme des lois de puissance pour une large gamme d’échelles  $S(q, j) \simeq a^{\zeta(q)}$ ,  $a_m \leq a \leq a_M$ . Les *exposants des lois d’échelle*  $\zeta(q)$  caractérisent les propriétés d’invariance d’échelle et les fluctuations de la régularité

locale, et sont communément utilisés dans l’analyse de signaux et les tâches usuelles de traitement du signal. La théorie de l’analyse multifractale indique de plus qu’une caractérisation complète de la régularité des données implique l’usage d’ordres statistiques  $q$  positifs et négatifs.

Pour la modélisation de l’invariance d’échelle, deux classes de processus sont souvent en compétition : les processus auto-similaires, caractérisés par  $\zeta(q) = qH$  dans un voisinage de  $q = 0$  (l’exemple emblématique étant le mouvement Brownien fractionnaire (fBm) [15]) ; les processus construits à partir de cascades multiplicatives, pour lesquels  $\zeta(q)$  est une fonction strictement concave (le fBm en temps multifractal (MF-fBm) [4] constituant un exemple classique). Dans les applications, il s’avère essentiel de pouvoir décider quelle classe décrit mieux les propriétés d’invariance d’échelle observées sur les données car les mécanismes sous-jacents sont de nature différente : additive (processus auto-similaire) contre multiplicative (cascades multiplicatives). Un approche simple consisterait à estimer  $\zeta(q)$  pour une gamme de valeurs de  $q$  autour de  $q = 0$  et ensuite de tester le comportement linéaire de  $\zeta(q)$  [16, 18]. Cependant, il est difficile de formaliser un test à cause

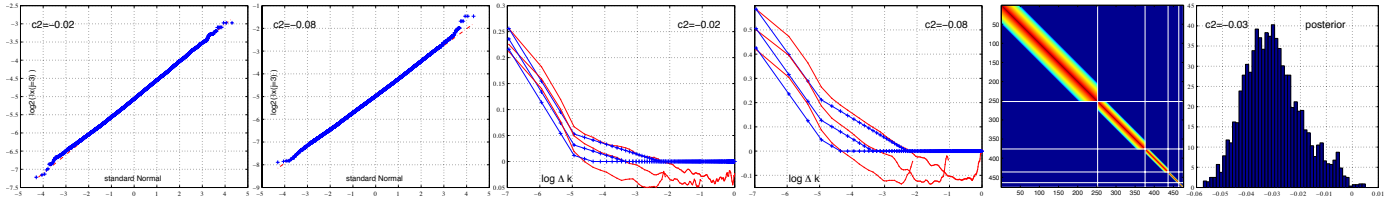


FIGURE 1 – Tracés des quantiles de  $\log_2(l_X(j = 3, \cdot))$  contre une Gaussienne normalisée (gauche). Covariances de  $l_X(j, k)$  estimées (rouge, moyenne de 1000 réalisations de MRW de taille  $N = 2^9$ ) et modèle (bleu) en fonction de  $\log_2(\Delta k / N^{2j})$  pour  $j = 2 - 4$ ; modèle de matrice de covariance en échelle logarithmique et loi posteriori empirique (droite).

des dépendances fortes entre les  $S(q, j)$  pour différentes valeurs de  $q$ .

Dans une contribution séminale [5], il a été proposé d'utiliser le développement  $\zeta(q) = \sum_{p \geq 1} c_p q^p / p!$  et il a été montré que les coefficients  $c_p$  sont liés aux cumulants  $C_p(j)$  du logarithme des quantités de multirésolution d'analyse (ici, les  $L_X(j, k)$ ),  $C_1(j) \equiv \mathbb{E}[\ln L_X(j, k)] = c_1^0 + c_1 \ln 2^j$ , et notamment

$$C_2(j) \equiv \text{Var}[\ln L_X(j, k)] = c_2^0 + c_2 \ln 2^j. \quad (1)$$

Le paramètre  $c_2$ , dit d'*intermittence* ou de *multifractalité*, mesure l'écart à la linéarité de  $\zeta(q)$  autour de  $q = 0$  ( $c_2 \equiv 0$  implique  $\forall p \geq 3, c_p \equiv 0$  [10]). Estimer  $c_2$  et tester  $c_2 \equiv 0$  ou  $c_2 < 0$  fournit donc une alternative pour décider si  $\zeta(q)$  est linéaire ou non [18].

**Estimation de  $c_2$ .** L'estimation de  $c_2$  est souvent formulée à partir de régressions linéaires de  $C_p(j)$  contre  $\ln 2^j$  [5, 8, 16, 18]). Quand la taille d'échantillon est petite, ce qui est le cas dans nombre d'applications, biomédicale notamment, il a été observé que l'estimation de  $c_2$  souffre d'un biais trop élevé pour être utilisable en pratique [18]. En dépit de cette sévère limitation, on ne peut rapporter dans la littérature que peu de tentative d'y circonvier (cf., a contrario, [11]). Les approches bayésiennes n'ont jusqu'ici été tentées que sur le seul mouvement brownien fractionnaire, du fait de sa nature gaussienne. Cela résulte essentiellement de l'absence de modèles statistiques, qui puissent être génériquement associés aux processus multifractals. Ces derniers sont, en effet, par nature, fortement non gaussiens et présentent des structures de dépendance forte et intriquée [2, 4].

**Contributions et organisation.** Dans ce contexte, la contribution de cet article est double. Nous montrons d'abord que les distributions statistiques des  $\ln L_X(j, k)$  de processus multifractals, construits à partir de cascades multiplicatives, peuvent être approximées par des lois gaussiennes multivariées dont les covariances sont contrôlées par peu de paramètres (dont le  $c_2$  que l'on cherche à estimer) (cf. section 2.1). À partir de ce modèle générique, nous formulons ensuite une procédure bayésienne pour l'estimation du paramètre  $c_2$  en assignant une distribution a priori à  $c_2$  qui incorpore les contraintes inhérentes au modèle. Les estimateurs bayésiens associés à la distribution a posteriori sont enfin approximés par un algorithme Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC), que nous adaptons à ce problème (cf. section 3). La pertinence de la procédure et les performances d'estimation sont évaluées au moyen de simulations numériques dans la section 4. Quelques perspectives à ce travail sont formulées dans la section 5.

## 2 Modèle statistique

### 2.1 Coefficients d'ondelette et coefficients dominants

Soient  $d_X(j, k) = \langle X, \psi_{j,k} \rangle$  les coefficients de la transformée en ondelettes discrètes, normalisés  $L^1$  [12]. Le *coefficient dominant*  $L_X(j, k)$  est défini comme le plus grand des  $d_X(j', k')$  existant à toutes les échelles  $j' \leq j$  et dans un voisinage temporel de  $x_0 = 2^j k$  ( $\lambda_{j,k} = ((k-1)2^j, k2^j]$ ,  $3\lambda_{j,k} = \bigcup_{p \in \{-1, 0, 1\}} \lambda_{j, k+p}$  [10, 18]) :

$$L_X(j, k) = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda_{j,k}} |d_X(\lambda')|.$$

Les distributions marginales des processus construits à partir de cascades multiplicatives (ainsi que celles de leurs coefficients d'ondelette et dominants) s'écartent fortement de la loi gaussienne, et leurs structures de dépendance sont à *mémoire longue*. Nous montrons ici que la statistique du *logarithme*,  $l_X(j, k) = \ln L_X(j, k)$ , des coefficients dominants (sur lesquels repose l'estimation des log-cumulants  $c_p$ ), admet, a contrario, un simple modèle semi-paramétrique. La pertinence du modèle proposé est ici illustrée pour le "multifractal random walk" (MRW) [3] (des résultats équivalents sont obtenus pour d'autres processus, notamment pour le fBm à temps multifractal (MF-fBm)).

**Lois marginales.** Des simulations numériques indiquent que les lois marginales des logarithmes  $l_X(j, k)$  des coefficients dominants de processus construits à partir de cascades multiplicatives sont bien modélisées par des lois gaussiennes multivariées pour un large gamme de valeurs du paramètre de multifractalité. La pertinence d'un modèle gaussien est illustré à l'aide de tracs "quantile-quantile" sur la figure 1 (à gauche).

### 2.2 Covariance

Le modèle s'inspire de [2], qui montre de façon analytique que la covariance asymptotique de  $\ln |d_X(j, k)|$  de cascades d'ondelettes aléatoires (un processus multiplicatif particulier, défini directement sur les coefficients d'ondelette) est linéaire par rapport à  $\log_2(\Delta k)$ . Des simulations numériques indiquent que la covariance de  $l_X(j, k)$  de processus construits à partir de cascades multiplicatives peut, à une échelle  $a = 2^j$  donnée,

génériquement être bien modélisée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}[l_X(j, k), l_X(j, k + \Delta k)] &\approx \Lambda(j, \Delta k; c_2) = \\ \gamma(c_2) + c_2(\log_2(\Delta k) + j) \ln 2 &\text{ for } 3 < \Delta k \ll 2^{-j} N. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous combinons (2) avec la relation pour la variance (1) et obtenons un modèle de covariance linéaire (en  $\log_2(\Delta k)$ ) par morceaux  $\Sigma(j, \Delta k; c_2; c_2^0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[l_X(j, k), l_X(j, k + \Delta k)] &\approx \Sigma(j, \Delta k; c_2; c_2^0) = \\ &= \begin{cases} c_2^0 + j c_2 \ln 2, & \Delta k \equiv 0 \\ \frac{\log_2(\Delta k)}{\log_2(3)} (\Lambda(j, 3; c_2) - c_2^0 - j c_2 \ln 2) \\ \quad + c_2^0 + j c_2 \ln 2, & 1 \leq \Delta k \leq 2 \\ \max(0, \Lambda(j, \Delta k; c_2)), & 3 \leq \Delta k \leq 2^{-j} N. \end{cases} \end{aligned}$$

Le paramètre  $\gamma(c_2)$  est fixé ici suivant la condition heuristique  $\Sigma(j, \Delta k = \lfloor N 2^{-j} / 5 \rfloor; c_2; c_2^0) = 0$ .

Notons que dans ce modèle, toutes les covariances inter-échelles sont négligées, ainsi que toute valeur négative de  $\Lambda$  (pour des raisons numériques). Le modèle est comparé, sur la figure 1 (à droite), avec les covariances estimées de  $l_X(j, k)$ .

## 3 Estimation bayésienne

### 3.1 Modèle bayésien

Soient  $j_1$  (resp.,  $j_2$ ) les échelles les plus fines (resp., grandes) considérées dans l'estimation et  $n_j$  le nombre de coefficients à l'échelle  $j$ . Nous centrons les  $l_X(j, k)$  échelle par échelle et les réorganisons dans un vecteur  $\ell_X = [\ell_X(1), \dots, \ell_X(n)]^T$  de taille  $n \times 1$ ,  $n = \sum_{j=j_1}^{j_2} n_j$ . Ce vecteur est supposé gaussien, avec une matrice de covariance  $\Sigma(\gamma_2) = \mathbb{E}[\ell_X \ell_X^T]$  paramétrée par  $\gamma_2 \triangleq [c_2, c_2^0]^T$ .

**Vraisemblance.** Du modèle statistique proposé dans la Section 2.1, nous arrivons à une vraisemblance gaussienne pour  $\ell_X$  :

$$\begin{aligned} f(\ell_X | \gamma_2) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\det \Sigma(\gamma_2)]^{-1/2} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \ell_X^T \Sigma(\gamma_2)^{-1} \ell_X \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

**Loi a priori pour  $\gamma_2$ .** La positivité des variances  $C_2(j) = [\Sigma(\gamma_2)]_{j,j} > 0$  ( $j = j_1, \dots, j_2$ ) dans (1) se traduit par des contraintes sur les paramètres  $c_2$  et  $c_2^0$  qui doivent appartenir à un ensemble  $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_2^+) \cap \mathcal{C}_2^m$ , où  $\mathcal{C}_2^- = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 | c_2 < 0 \text{ et } c_2 j_2 + c_2^0 > 0\}$ ,  $\mathcal{C}_2^+ = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 | c_2 > 0 \text{ et } c_2 j_1 + c_2^0 > 0\}$ ,  $\mathcal{C}_2^m = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 | |c_2| < c_2^m, |c_2^0| < c_2^{0,m}\}$ , et  $(c_2^m, c_2^{0,m})$  sont les plus grandes valeurs admissibles pour  $(c_2, c_2^0)$ . Sans information a priori supplémentaire sur le couple  $(c_2, c_2^0)$ , une distribution a priori uniforme de support  $\mathcal{C}_2$  est choisie pour  $\gamma_2$  :

$$f(\gamma_2) \propto \mathbf{1}_{\mathcal{C}_2}(\gamma_2). \quad (4)$$

**Loi a posteriori.** On appliquant la règle de Bayes, la distribution a posteriori de  $\gamma_2$  est obtenue :

$$f(\gamma_2 | \ell_X) \propto f(\ell_X | \gamma_2) f(\gamma_2). \quad (5)$$

Cette loi dépend de façon non triviale des paramètres  $c_2$  et  $c_2^0$ . La dépendance non-triviale de  $f(\gamma_2 | \ell_X)$  des paramètres  $c_2$  et  $c_2^0$  rend difficile le calcul direct des estimateurs bayésiens (par exemple, les estimateurs du maximum a posteriori (MAP) et d'erreur quadratique minimale (EQM)). Nous employons un algorithme MCMC pour générer des échantillons suivant la loi  $f(c_2, c_2^0 | \ell_X)$ . Ces échantillons, notés  $\{c_2^{(t)}, c_2^{0(t)}\}_{t=1}^{N_{\text{mc}}}$ , sont ensuite utilisés pour approcher l'estimateur de la moyenne a posteriori (estimateur MMSE) et l'estimateur du maximum a posteriori (estimateur MAP) des paramètres  $c_2$  et  $c_2^0$ .

### 3.2 Echantillonneur de Gibbs

La stratégie employée par l'algorithme de Gibbs consiste à échantillonner, dans deux étapes consécutives, suivant les lois conditionnelles associées à  $f(c_2, c_2^0 | \ell_X)$  (cf. [17] pour plus de détails sur les méthodes MCMC).

**Echantillonnage suivant  $f(c_2 | c_2^0, \ell_X)$ .** Pour générer des échantillons suivant la loi conditionnelle  $f(c_2 | c_2^0, \ell_X)$ , nous utilisons une étape de Metropolis à marche aléatoire gaussienne. Soit  $\gamma_2^{(t)} = [c_2^{(t)}, c_2^{0(t)}]^T$  le vecteur d'état à l'itération  $t$ . Un candidat  $c_2^{(*)}$  est tiré suivant la loi de proposition gaussienne  $q(c_2^{(*)} | c_2^{(t)}) = \mathcal{N}(c_2^{(*)}, \eta^2)$  (la variance  $\eta^2$  étant fixé de façon à assurer des bonnes propriétés de mélange). Ensuite, la proposition  $\gamma_2^{(*)} = [c_2^{(*)}, c_2^{0(t)}]^T$  est acceptée avec probabilité  $p_{c_2} = \min(1, \rho_{c_2})$ , où  $\rho_{c_2}$  est le rapport d'acceptation de Metropolis-Hasting

$$\begin{aligned} \rho_{c_2} &= \frac{f(\gamma_2^{(*)} | \ell_X) q(\gamma_2^{(t)} | \gamma_2^{(*)})}{f(\gamma_2^{(t)} | \ell_X) q(\gamma_2^{(*)} | \gamma_2^{(t)})} = \left[ \frac{\det \Sigma(\gamma_2^{(t)})}{\det \Sigma(\gamma_2^{(*)})} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_2}(\gamma_2^{(*)}) \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \ell_X^T \left( \Sigma^{-1}(\gamma_2^{(*)}) - \Sigma^{-1}(\gamma_2^{(t)}) \right) \ell_X \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Le vecteur  $\gamma_2^{(t)}$  est ensuite mis à jour par  $\gamma_2^{(t+\frac{1}{2})} = \gamma_2^{(*)}$  (resp.,  $\gamma_2^{(t+\frac{1}{2})} = \gamma_2^{(t)}$ ) avec la probabilité  $p_{c_2}$  (resp.,  $1 - p_{c_2}$ ).

**Echantillonnage suivant  $f(c_2^0 | c_2, \ell_X)$ .** La mise à jour du vecteur  $\gamma_2^{(t+\frac{1}{2})} = [c_2^{(t+\frac{1}{2})}, c_2^{0(t+\frac{1}{2})}]^T$  à l'itération  $t + \frac{1}{2}$  est calculé de façon similaire, avec la proportion d'acceptation de Metropolis-Hasting donnée par (6).

### 3.3 Approximation des estimateurs bayésiens

L'échantillonneur de Gibbs proposé permet de générer  $N_{\text{mc}}$  échantillons  $\{\gamma_2^{(t)}\}_{t=1}^{N_{\text{mc}}}$  asymptotiquement distribués suivant la loi (5). Après  $N_{\text{bi}}$  itérations de de chauffage, ces échantillons sont utilisés pour approximer les estimateurs bayésiens, i.e.,

$$\hat{\gamma}_2^{\text{MMSE}} \approx \frac{1}{N_r} \sum_{t=N_{\text{bi}}+1}^{N_{\text{mc}}} \gamma_2^{(t)}; \hat{\gamma}_2^{\text{MAP}} \approx \underset{t=1, \dots, N_{\text{mc}}}{\text{argmax}} f(\gamma_2^{(t)} | \ell_X).$$

		$N = 2^8$			$N = 2^9$		
$c_2$		-0.02	-0.04	-0.08	-0.02	-0.04	-0.08
REQM	RLP	0.064	0.077	0.107	0.037	0.056	0.066
	MMSE	0.021	0.021	0.025	0.015	0.017	0.016
	MAP	0.021	0.023	0.025	0.016	0.018	0.017

TABLE 1 – Racine carrée d’erreur quadratique moyenne (REQM) pour les estimateurs Bayésiennes MMSE et MAP et pour l’estimateur par régression linéaire pondérée (RLP) de  $c_2$  pour  $N = 256$  (gauche) et  $N = 512$  (droite).

## 4 Résultats

Les performances de la procédure d’estimation sont analysées en utilisant 200 réalisations indépendantes de MRW [3], pour différentes valeurs du paramètre  $c_2$ , explorant ainsi une multifractalité allant de faible à forte, et deux scénarios :  $N = 256$  ( $j_1 = 2, j_2 = 4$ ) et  $N = 512$  ( $j_1 = 2, j_2 = 5$ ). Nous utilisons une ondelette Daubechies avec  $N_\psi = 2$  moments nuls et  $N_{mc} = 700, N_{bi} = 300$  pour l’échantillonneur de Gibbs. Les performances en terme de racine carrée d’erreur quadratique moyenne (REQM) des estimateurs bayésiens MMSE et MAP et de l’estimateur par régression linéaire pondérée (RLP) sont comparées dans la Table 1. Les estimateurs bayésiens permettent de réduire la REQM d’un facteur 3 (pour  $|c_2|$  petit) à 4 (pour  $|c_2|$  grand) pour les petites tailles d’échantillons ciblées ici. Notons que ce gain en performance d’estimation provient principalement d’une réduction drastique de la variance. Le gain s’explique notamment par l’incorporation de la structure de covariance dans le modèle bayésien proposé et démontre la pertinence du modèle pour la covariance du logarithme des coefficients dominants. Finalement, nous observons que la REQM augmente de façon beaucoup plus importante pour RLP que pour les estimateurs bayésiens quand la valeur de  $c_2$  s’éloigne de zéro (et la variabilité des données augmente).

## 5 Perspectives

Cette contribution propose, à notre connaissance, la première procédure bayésienne opérationnelle pour l’estimation du paramètre de multifractalité  $c_2$ . Elle permet d’obtenir des estimations pertinentes dans les situations où la taille des échantillons est limitée par l’application, rendant les estimateurs par régression linéaire réductibles. Les performances des estimateurs proposés ici pourront être encore améliorées en incorporant de l’information a priori sur  $c_2$  disponible dans certaines applications. Les perspectives de ce travail sont l’application de cette procédure à des données d’imagerie par résonance magnétique fonctionnelle et de variabilité de rythme cardiaque. Le modèle générique de la statistique du logarithme des coefficients dominants pourrait être également généralisé aux covariances jointes temps-échelles, et la procédure d’estimation étendue aux dimensions supérieures (notamment lors de l’analyse d’images).

## Références

- [1] P. Abry, R. Baraniuk, P. Flandrin, R. Riedi, and D. Veitch. Multiscale nature of network traffic. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 19(3) :28–46, 2002.
- [2] A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.*, 39(8) :4142–4164, 1998.
- [3] E. Bacry, J. Delour, and J.F. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, 64 : 026103, 2001.
- [4] E. Bacry and J.F. Muzy. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [5] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows. *Physica D*, 68(3-4) :387–400, 1993.
- [6] P. Ciuciu, G. Varoquaux, P. Abry, S. Sadaghiani, and A. Kleinschmidt. Scale-free and multifractal dynamic properties of fMRI signals during rest and task. *Frontiers in Physiology*, 3(186), June 2012.
- [7] E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, editors. *Wavelets in Geophysics*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [8] U. Frisch. *Turbulence, the Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [9] A. L. Goldberger, L. A. Amaral, J. M. Hausdorff, P. Ch. Ivanov, C. K. Peng, and Stanley H. E. Fractal dynamics in physiology : alterations with disease and aging. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 99(Suppl 1) :2466–2472, 2002.
- [10] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In M. Lapidus and M. van Frankenhuysen, editors, *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, pages 91–152. AMS, 2004.
- [11] T. Lux. Higher dimensional multifractal processes : A GMM approach. *Journal of Business and Economic Statistics*, 26 :194–210, 2007.
- [12] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [13] B.B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62 :331–358, 1974.
- [14] B.B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance*. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, 1997. Discontinuity, concentration, risk, Selecta Volume E, With a foreword by R. E. Gomory.
- [15] B.B. Mandelbrot and J.W. van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Reviews*, 10 :422–437, 1968.
- [16] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals : The structure function approach versus the wavelet transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E*, 47(2) :875–884, 1993.
- [17] C.P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York, NY, USA, 2 edition, 2004.
- [18] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard. Bootstrap for empirical multifractal analysis. *IEEE Signal Processing Mag.*, 24(4) :38–48, 2007.