

# Sur la capacité de résolution de méthodes sous-espace

Pascal VALLET<sup>1</sup>, Philippe LOUBATON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire IMS (UMR-CNRS 5218) / Institut Polytechnique de Bordeaux  
351 Cours de la Libération, 33400 Talence, France

<sup>2</sup>Laboratoire d'informatique Gaspard Monge (UMR-CNRS 8049) / Université Paris-Est/Marne-la-Vallée  
5 boulevard Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France  
pascal.vallet@ipb.fr, loubaton@univ-mlv.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous considérons le problème de la localisation de sources à l'aide d'un réseau de capteurs, lorsque le nombre d'échantillons  $N$  du signal disponible est du même ordre de grandeur que le nombre de capteurs  $M$ . Nous nous intéressons plus particulièrement à la capacité de séparation, pour deux sources dont les angles d'arrivée des signaux sont très proches, de l'algorithme MUSIC, et d'une version améliorée développée récemment (G-MUSIC). L'approche proposée repose sur des résultats de théorie des matrices aléatoires, décrivant le comportement des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de corrélation empirique des observations, lorsque  $M$  et  $N$  tendent vers l'infini au même rythme. En considérant le scénario où les directions d'arrivée de deux sources convergent l'une vers l'autre, dans le régime asymptotique précédent, nous montrons que la méthode MUSIC traditionnelle n'est plus consistante, tandis que la méthode améliorée G-MUSIC le reste. Ces résultats valident ainsi des différences de performances observées en pratique entre ces deux méthodes, pour un nombre d'antennes et d'échantillons du même ordre de grandeur.

**Abstract** – This paper deals with the problem of source localization using an array of sensors, in a context where the number of available samples  $N$  of the observed signal is of the same order of magnitude than the number of sensors  $M$ . We focus here on the resolution capacity of the MUSIC method, as well as an improved version recently developed (G-MUSIC), in a situation where two sources with very close directions of arrival (DoA) are present. Our approach relies on results from random matrix theory, describing the behaviour of the eigenvalues and eigenvectors of the sample correlation matrix of the observations, when  $M$  and  $N$  both converge to infinity at the same rate. By considering the scenario where the two DoA converge to each other in the previous asymptotic regime, we show that the MUSIC algorithm is no more consistent, while the G-MUSIC method remains consistent. This theoretical result validates the performance gap observed in practice between the two methods, for a number of sensors and samples of the same order of magnitude.

## 1 Introduction

La détermination des directions d'arrivée de signaux sources à l'aide de réseaux de capteurs est une problématique importante en traitement du signal et fait l'objet d'une littérature conséquente depuis les années 1970. Considérons un réseau linéaire uniforme de  $M$  capteurs, recevant les signaux issus de  $K < M$  sources à bande étroite et en champs lointain. Le signal en sortie du réseau peut alors être modélisé par la série temporelle multivariée  $(\mathbf{y}_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{s}_n + \mathbf{v}_n,$$

où

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$  est la matrice  $M \times K$  des vecteurs directionnels  $\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)$ , où  $\theta_1, \dots, \theta_K$  représentent les angles d'arrivée des signaux sources et où  $\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{M}}[1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(M-1)\theta}]^T$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$  ;
- $\mathbf{s}_n \in \mathbb{C}^K$  est le vecteur des signaux sources à l'instant  $n$ , supposés *déterministes inconnus* ;
- $\mathbf{v}_n$  modélise un bruit additif dont les éléments sont i.i.d.  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ .

En supposant que  $N > M$  échantillons  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  sont collectés dans la matrice  $\mathbf{Y}_N = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N]$ , le modèle devient

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{A}\mathbf{S}_N + \mathbf{V}_N,$$

où  $\mathbf{S}_N = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N]$  et  $\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ . Le problème de la localisation de sources consiste alors à estimer les angles d'arrivée  $\theta_1, \dots, \theta_K$  à partir des observations  $\mathbf{Y}_N$ .

Parmi les techniques d'estimation "haute résolution" les plus populaires figurent les méthodes sous-espace, dont la méthode MUSIC [4], qui sont généralement préférées aux méthodes du maximum de vraisemblance, dont le coût calculatoire est souvent prohibitif. Moyennant l'hypothèse que  $\text{rang}(\mathbf{S}_N) = K$ , la méthode MUSIC repose l'observation que les angles d'arrivée  $\theta_1, \dots, \theta_K$  sont les zéros de la fonction de localisation

$$\eta_N(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{a}(\theta),$$

où  $\mathbf{\Pi}_N$  est le projecteur orthogonal sur le noyau de  $\mathbf{A}\mathbf{S}_N\mathbf{S}_N^*\mathbf{A}^*$  (appelé "sous-espace bruit", de dimension  $M - K$ ).

En pratique,  $\mathbf{\Pi}_N$  n'est pas accessible et il est alors nécessaire de l'estimer à partir de la matrice de corrélation empirique

$$\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^*,$$

dont on notera  $\hat{\lambda}_{1,N} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{M,N}$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{1,N}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{M,N}$  les valeurs propres et vecteurs propres associés. La méthode MUSIC [4] consiste alors à estimer  $\theta_1, \dots, \theta_K$  par les  $K$  minima les plus significatifs de la fonction<sup>1</sup>

$$\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{\Pi}}_N \mathbf{a}(\theta),$$

où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_N = \sum_{k=1}^{M-K} \hat{\mathbf{u}}_{k,N} \hat{\mathbf{u}}_{k,N}^*$  est l'estimée empirique de  $\mathbf{\Pi}_N$ .

L'utilisation de  $\hat{\mathbf{\Pi}}_N$  est relativement pertinente lorsque le nombre d'échantillons disponibles  $N$  est grand comparé au nombre d'antennes  $M$ . En effet, sous certaines conditions, la loi des grands nombres garantit que  $\|\hat{\mathbf{\Pi}}_N - \mathbf{\Pi}_N\|$  converge vers 0 presque sûrement (p.s.), dans le régime asymptotique où  $N$  tend vers l'infini et  $M$  est constant, ce qui implique naturellement la convergence uniforme

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) - \eta_N(\theta) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

et la consistance des estimées angulaires. Néanmoins, dans certains contextes applicatifs, il n'est pas toujours possible de disposer d'une telle quantité d'échantillons, notamment si les signaux en jeu ne sont stationnaires que sur de courtes périodes de temps, et en conséquence, les nombres d'échantillons et de capteurs peuvent être du même ordre de grandeur. Dans cette situation, la matrice de corrélation empirique  $\frac{\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*}{N}$  est alors un estimateur peu fiable de la vraie matrice de corrélation, et les performances des méthodes sous-espace se dégradent substantiellement, en particulier la méthode MUSIC.

Récemment, nous avons proposé dans [5] [2] une méthode MUSIC améliorée (nommée G-MUSIC) basée sur un nouvel estimateur de la fonction de localisation  $\eta_N(\theta)$ , consistant dans le régime asymptotique où  $M, N$  tendent vers l'infini de telle manière que le ratio  $\frac{M}{N}$  converge vers une constante  $c \in ]0, 1[$ . En pratique, on constate [5] que les estimées angulaires G-MUSIC présentent de meilleures performances que les estimées MUSIC, pour des valeurs réalistes de  $M, N$  et un petit nombre de sources dont les angles d'arrivée sont très proches.

L'objectif du présent article est de proposer une comparaison théorique au premier ordre (c'est-à-dire en terme de consistance) des méthodes G-MUSIC et MUSIC. Nous montrons que dans le régime asymptotique où les angles d'arrivée sont fixes et  $M, N$  tendent vers l'infini au même rythme, la méthode MUSIC reste consistante. Pour modéliser le scénario où les angles d'arrivée sont très proches, nous considérons la situation de deux sources dont l'espacement angulaire décroît lorsque  $M$  et  $N$  tendent vers l'infini au même rythme, et nous montrons dans ce scénario que la méthode G-MUSIC reste consistante tandis que la méthode MUSIC ne l'est plus.

La suite de cet article est organisée comme suit. En section 2, nous rappelons les principes fondamentaux de la méthode G-MUSIC. En section 3, nous analysons la consistance de ces deux méthodes, dans les scénarios "angles éloignés" et "angles proches" décrits précédemment. Quelques résultats numériques illustrant de le gain de performances de la méthode G-MUSIC en situation d'angles très proches sont présentés.

## 2 La méthode G-MUSIC

Nous considérons pour la suite le régime doublement asymptotique où  $M = M(N)$  est fonction de  $N$  de telle manière que le ratio  $\frac{M}{N}$  converge vers  $c \in ]0, 1[$ , quand  $N \rightarrow \infty$ , et supposons  $K$  indépendant de  $N$ . On considère également la situation où les angles d'arrivée des  $K$  sources  $\theta_{1,N}, \dots, \theta_{K,N}$  peuvent dépendre de  $N$ , et où  $\sup_N \|\mathbf{S}_N\| < \infty$ .

La méthode G-MUSIC, développée dans [5], est fondée sur la théorie asymptotique des matrices aléatoires, dont nous rappelons ici quelques résultats essentiels. Notons

$$\hat{m}_N(z) = \frac{1}{M} \text{Tr} \left( \frac{\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*}{N} - z \mathbf{I} \right)^{-1}.$$

La fonction  $\hat{m}_N(z)$  est une quantité centrale en théorie des matrices aléatoires, et représente la transformée de Stieltjes de la distribution empirique  $\hat{\mu}_N = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\hat{\lambda}_{k,N}}$  des valeurs propres de  $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$ , c'est-à-dire la quantité

$$\hat{m}_N(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\hat{\mu}_N(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Il est montré dans [3] que pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ ,  $\hat{m}_N(z) \rightarrow m(z)$  p.s. quand  $N \rightarrow \infty$ , où  $m(z)$  est la transformée de Stieltjes  $m(z) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d\mu(\lambda)$  d'une mesure de probabilité déterministe  $\mu$ , appelée loi de Marcenko-Pastur, et admettant comme support l'intervalle  $[\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2, \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2]$ . De plus,  $m(z)$  vérifie l'équation

$$m(z) = \frac{1}{-z(1 + \sigma^2 c m(z)) + \sigma^2(1 - c)}.$$

De manière équivalente, la convergence étroite  $\hat{\mu}_N - \mu \xrightarrow{e} 0$  est vérifiée p.s., c'est-à-dire que la distribution empirique des valeurs propres de  $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$  a le même comportement asymptotique que la loi de Marcenko-Pastur.

Moyennant certaines hypothèses sur les valeurs propres de  $\frac{1}{N} \mathbf{A} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^* \mathbf{A}^*$ , il est possible de caractériser le comportement des plus grandes valeurs propres de  $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$ . Pour la suite, nous ferons l'hypothèse de séparation suivante, qui assure que les valeurs propres non nulles de  $\frac{1}{N} \mathbf{A} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^* \mathbf{A}^*$ , notées  $\lambda_{1,N} \geq \dots \geq \lambda_{K,N}$ , sont suffisamment espacées des  $M - K$  valeurs propres nulles.

**Hypothèse.** Pour  $k = 1, \dots, K$ , on a  $\lambda_{k,N} \rightarrow \lambda_k$  quand  $N \rightarrow \infty$ , où  $\lambda_1 > \dots > \lambda_K > \sigma^2 \sqrt{c}$ .

Sous l'hypothèse précédente, on a [1], pour  $k = 1, \dots, K$ ,

$$\hat{\lambda}_{k,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \phi(\lambda_k) = \frac{(\lambda_k + \sigma^2 c)(\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k},$$

où  $\phi(\lambda_k) > \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2$ . De plus, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\hat{\lambda}_{K+1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{M,N} \in ]\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2 - \epsilon, \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 \epsilon[,$$

p.s. pour  $N$  suffisamment grand. Autrement dit, sous l'hypothèse précédente, on a donc "séparation" des valeurs propres de  $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$  en deux groupes, au sens où les  $K$  plus grandes

1. L'exposant  $(t)$  est employé pour désigner l'estimateur traditionnel".

valeurs propres convergent vers des limites extérieures au support de la loi de Marcenko-Pastur, tandis que les  $M - K$  plus petites sont "absorbées" dans ce même support.

Sous l'hypothèse de séparation précédente, il est également possible d'obtenir des résultats sur le comportement des vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres. Ainsi, on montre que pour toute suite de vecteurs unitaires déterministes  $(\mathbf{d}_N)$ , on a pour  $k = 1, \dots, K$ ,

$$|\mathbf{d}_N^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N}|^2 = h(\phi(\lambda_k)) |\mathbf{d}_N^* \mathbf{u}_{k,N}|^2 + o(1) \quad \text{p.s.}, \quad (1)$$

où

$$h(z) = \frac{m(z)^2 (czm(z) - (1-c))}{cm(z)^2 + 2czm'(z)m(z) - (1-c)m'(z)}.$$

Notons qu'en utilisant des relations de passage entre  $m(\phi(\lambda_k))$  et  $\lambda_k$ , il est possible d'obtenir la relation explicite

$$h(\phi(\lambda_k)) = \frac{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}{\lambda_k (\lambda_k + \sigma^2 c)}.$$

La convergence (1) est la clé de voute de la méthode G-MUSIC. En effet, en prenant  $\mathbf{d}_N = \mathbf{a}(\theta)$ , et en utilisant le fait que  $\phi(\lambda_k) = \hat{\lambda}_{k,N} + o(1)$  p.s., on obtient alors que

$$\eta_N(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^K |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{u}_{k,N}|^2 = \hat{\eta}_N(\theta) + o(1), \quad (2)$$

p.s., où

$$\hat{\eta}_N(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^K \frac{1}{h(\hat{\lambda}_{k,N})} |\mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N}|^2. \quad (3)$$

La quantité  $\hat{\eta}_N(\theta)$  est donc, pour  $\theta$  quelconque fixé, un estimateur consistant de  $\eta_N(\theta)$ , dans le nouveau régime asymptotique considéré précédemment. La méthode G-MUSIC consiste alors à estimer les angles d'arrivée  $\theta_{1,N}, \dots, \theta_{K,N}$  en considérant les  $K$  minima les plus significatifs de  $\theta \mapsto \hat{\eta}_N(\theta)$ .

La consistance de ces estimées angulaires, c'est-à-dire la convergence presque sûre des minima de  $\hat{\eta}_N(\theta)$  vers ceux de  $\eta_N(\theta)$ , constitue l'objet de la section suivante. Notons dès à présent que ceci nécessite une convergence uniforme (en  $\theta$ ) en lieu et place de la convergence ponctuelle (3), et il est montré dans [2] que

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| |\mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N}|^2 - h(\phi(\lambda_k)) |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{u}_{k,N}|^2 \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (4)$$

### 3 Comparaison au 1er ordre de MUSIC et G-MUSIC

Considérons dans un premier temps la situation où les angles  $\theta_{1,N}, \dots, \theta_{K,N}$  sont indépendants de  $N$ , ce qui modélise en pratique une situation où les angles sources sont éloignés. Définissons

$$\hat{\theta}_{k,N} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{I}_k} \hat{\eta}_N(\theta) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{I}_k} \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta),$$

où  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_K$  des intervalles compacts disjoints tels que  $\theta_k \in \mathcal{I}_k$ .

**Théorème 1.** *Pour  $N$  suffisamment grand, p.s., les  $K$  plus petits minima de  $\hat{\eta}_N(\theta)$  et  $\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta)$  coïncident respectivement avec  $(\hat{\theta}_{k,N})_{k=1, \dots, K}$  et  $(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)})_{k=1, \dots, K}$ . De plus,*

$$\hat{\theta}_{k,N} = \theta_k + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \theta_k + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5)$$

*Démonstration.* Le résultat pour G-MUSIC est montré dans [2]. Pour MUSIC, nous déduisons de (4) que

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) - \eta_N^{(t)}(\theta) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

où  $\eta_N^{(t)}(\theta) = 1 - \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}_N^* \mathbf{a}(\theta)\|^2$ ,  $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{1,N}, \dots, \mathbf{u}_{K,N}]$  et  $\mathbf{D} = \text{diag}(h(\phi(\lambda_1)), \dots, h(\phi(\lambda_K)))$ .  $\mathbf{U}_N$  et  $\mathbf{A}$  ayant la même image, on a  $\mathbf{U}_N = \mathbf{A} (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1/2} \mathbf{V}_N$ , où  $\mathbf{V}_N$  est unitaire. Comme  $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \rightarrow_N \mathbf{I}$ , on montre que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{I}_k} \left| \eta_N^{(t)}(\theta) - \left(1 - |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V}_N^* \mathbf{e}_k\|^2\right) \right| = o(1),$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique. Comme la fonction  $\theta \mapsto |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{a}(\theta_k)|^2$  admet un unique maximum global en  $\theta = \theta_k$ , on déduit que pour  $N$  grand, les  $K$  minima les plus significatifs de  $\hat{\eta}_N(\theta)$  coïncident avec  $\hat{\theta}_{1,N}^{(t)}, \dots, \hat{\theta}_{K,N}^{(t)}$ , et  $\hat{\theta}_{k,N}^{(t)} \rightarrow_N \theta_k$  p.s. Montrons à présent que  $\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}$  vérifie la convergence (5). Par définition de  $\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}$ , l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \eta_N^{(t)}(\theta) - \hat{\eta}_N(\theta) \right| + \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta_k), \quad (6)$$

et en conséquence, on déduit

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) \leq 1 - \liminf_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V}_N^* \mathbf{e}_k\|^2 < 1. \quad (7)$$

Si la suite  $N \left( \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_k \right)$  n'est pas bornée, on extrait une sous-suite telle que  $\varphi(N) \left| \hat{\theta}_{k,\varphi(N)}^{(t)} - \theta_k \right| \rightarrow +\infty$ . On a alors que  $\eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) \rightarrow_N 1$ , ce qui contredit (7). La suite  $N \left( \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_k \right)$  étant donc bornée, on peut en extraire une sous-suite telle que  $\varphi(N) \left| \hat{\theta}_{k,\varphi(N)}^{(t)} - \theta_k \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \beta$  ce qui implique que,

$$\eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) = 1 - \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V}_N^* \mathbf{e}_k\| \text{sinc}(c\beta/2) + o(1) \quad \text{p.s.},$$

où  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $\text{sinc}(0) = 1$ . Si  $\beta \neq 0$ , alors

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) > 1 - \liminf_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V}_N^* \mathbf{e}_k\|,$$

ce qui contredit encore (7). En conséquence, toutes les sous-suites convergentes de la suite bornée  $N \left( \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_k \right)$  tendent vers 0, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Pour modéliser une situation d'angles proches, nous considérons à présent une situation simple où  $K = 2$ ,  $\theta_{1,N} = \theta_{2,N} + \frac{\alpha}{N}$ , avec  $\alpha > 0$ ,  $\theta_{2,N} = \theta_2$  fixe, et  $\frac{1}{N} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^* \rightarrow \mathbf{I}$ . Dans

ce cas, un calcul direct montre que  $\lambda_{1,N}$  et  $\lambda_{2,N}$  convergent vers

$$\lambda_1 = 1 + |\text{sinc}(\alpha c/2)| \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - |\text{sinc}(\alpha c/2)|.$$

L'hypothèse de séparation se réécrit alors  $1 - |\text{sinc}(\alpha c/2)| > \sigma^2 \sqrt{c}$ . Soient les intervalles  $\mathcal{I}_{k,N} = [\theta_{k,N} - \frac{\alpha}{2N}, \theta_{k,N} + \frac{\alpha}{2N}]$  et définissons

$$\hat{\theta}_{k,N} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{I}_{k,N}} \hat{\eta}_N(\theta) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{I}_{k,N}} \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta).$$

**Théorème 2.** *Pour  $N$  grand p.s., les 2 plus petits minima de  $\hat{\eta}_N(\theta)$  coïncident avec  $\hat{\theta}_{1,N}$ ,  $\hat{\theta}_{2,N}$ , et*

$$\hat{\theta}_{k,N} = \theta_{k,N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (8)$$

De plus, il existe des valeurs de  $\alpha$  telles que  $N \left( \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_{k,N} \right)$  ne converge pas vers 0.

*Démonstration.* Pour les estimées G-MUSIC, on a, d'après la section précédente, que  $\sup_{\theta} |\hat{\eta}_N(\theta) - \eta_N(\theta)| \rightarrow_N 0$  p.s., où

$$\eta_N(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{a}(\theta) = 1 - \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{A} (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{a}(\theta).$$

De la même manière que pour (6), p.s.,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \eta_N(\hat{\theta}_{k,N}) \right| \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} |\eta_N(\theta_{k,N})| = 0. \quad (9)$$

La clé de la preuve de (8) repose sur la propriété que si  $(\psi_N)$  est une suite d'angles,

$$\eta_N(\psi_N) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } N |\psi_N - \theta_{k,N}| \rightarrow \infty \\ 1 - \kappa(\beta) & \text{si } N (\psi_N - \theta_{k,N}) \rightarrow \beta \end{cases}, \quad (10)$$

où  $\kappa(\beta) \leq 1$  avec égalité ssi  $\beta = 0$  ou  $\alpha$  (la définition est omise faute de place). Soit une suite  $\psi_N \notin \mathcal{I}_{1,N} \cup \mathcal{I}_{2,N}$  telle que  $\hat{\eta}_N(\psi_N) \rightarrow 0$ . Alors  $\eta_N(\psi_N) \rightarrow 0$ , et on déduit de (10) une contradiction. On déduit alors de (9) que pour  $N$  grand,  $\hat{\theta}_{1,N}$  et  $\hat{\theta}_{2,N}$  sont les 2 plus petits minima de  $\hat{\eta}_N(\theta)$ . Dès lors, si une sous-suite de  $N \left( \hat{\theta}_{k,N} - \theta_{k,N} \right)$  converge vers  $\beta$ , on a, à l'aide de (9) et (10), que  $\beta = 0$  nécessairement, ce qui prouve (8). En procédant de même pour la méthode MUSIC, on obtient, pour une suite d'angles  $(\psi_N)$ ,

$$\eta_N^{(t)}(\psi_N) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } N |\psi_N - \theta_{k,N}| \rightarrow \infty \\ 1 - \kappa^{(t)}(\beta) & \text{si } N (\psi_N - \theta_{k,N}) \rightarrow \beta \end{cases},$$

où  $\kappa^{(t)}(\beta)$  n'admet pas en général de maximum en  $\beta = 0, \alpha$ . Comme (9), on peut montrer que pour tout  $|\beta| < \alpha/2$ , et toute suite  $(\psi_N)$  telle que  $N (\psi_N - \theta_{k,N}) \rightarrow \beta$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) \right| \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \eta_N^{(t)}(\psi_N) \right| \leq 1 - \kappa^{(t)}(\beta). \quad (11)$$

Si  $N \left( \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_{k,N} \right) \rightarrow 0$ , alors  $\eta_N^{(t)}(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)}) \rightarrow 1 - \kappa^{(t)}(0)$ , ce qui contredit (11) puisque dans le cas général, il existe des valeurs de  $\alpha$  pour lesquels 0 n'est pas maximum de  $\kappa^{(t)}$  sur l'intervalle  $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ .  $\square$

Pour illustrer numériquement les résultats des théorèmes 1 et 2, nous considérons le scénario où  $K = 2$  sources, et où la matrice signal  $\mathbf{S}_N$  est à entrées gaussiennes i.i.d. standard. Nous calculons l'erreur quadratique moyenne sur les estimées MUSIC et G-MUSIC de  $\theta_1$ , en fonction du rapport signal à bruit donné par  $-10 \log(\sigma^2)$ . En figure 1, nous considérons un scénario "angles éloignés", où  $M = 20$ ,  $N = 40$  et  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ . Les performances de MUSIC et G-MUSIC sont alors similaires. En figure 2, nous considérons un scénario "angles

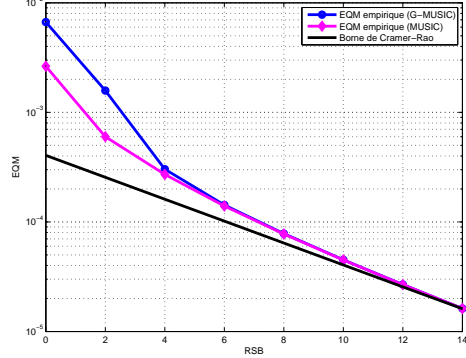


FIGURE 1 – Scénario "angles éloignés"

proches", où  $M = 40$ ,  $N = 80$  et  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2M}$ . On constate alors une différence de performances entre les méthodes MUSIC et G-MUSIC dans le cas d'angles sources dont l'espacement est de l'ordre de  $\frac{1}{M}$ , ce qui concorde avec les résultats du théorème 2.

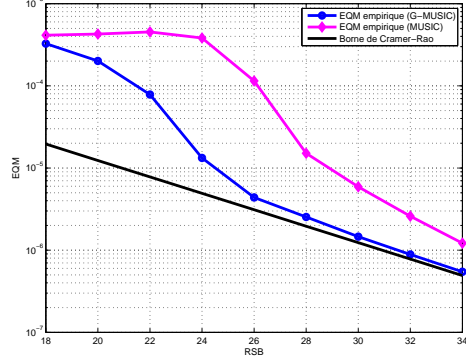


FIGURE 2 – Scénario "angles proches"

## Références

- [1] F. Benaych-Georges and R.R. Nadakuditi. The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices. *J. Multivariate Anal.*, 111 :120–135, 2012.
- [2] W. Hachem, P. Loubaton, X. Mestre, J. Najim, and P. Vallet. Large inf. plus noise random matrix models and consistent subspace estimation in large sensor networks. *Random Matrices Theory Appl*, 1(2), 2012.
- [3] V. A. Marcenko and L. A. Pastur. Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) :507–536, 1967.
- [4] R. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 34(3) :276–280, 1986.
- [5] P. Vallet, P. Loubaton, and X. Mestre. Improved subspace estimation for multivariate observations of high dimension : the deterministic signal case. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 58(2), Feb. 2012.