

# Système d'Échantillonnage Non Uniforme en Radio Intelligente

Samba TRAORÉ, Babar AZIZ et Daniel LE GUENNEC

IETR / SUPELEC, Campus de Rennes

Avenue de la Boulaie - CS 47601, F-35576 Cesson-Sevigne cedex, France

samba.traore@supelec.fr, babar.aziz@supelec.fr, daniel.leguennec@supelec.fr

**Résumé** – Nous proposons un nouveau schéma d'échantillonnage non uniforme périodique appelé Système d'Échantillonnage Non Uniforme en Radio Intelligente (SENURI). Notre schéma détecte la localisation spectrale des bandes actives dans la bande totale échantillonnée afin de réduire la fréquence moyenne d'échantillonnage, le nombre d'échantillons prélevé et par conséquent la consommation d'énergie au niveau du traitement numérique. La fréquence moyenne d'échantillonnage du SENURI dépend uniquement du nombre de bandes contenues dans le signal d'entrée  $x(t)$ . Il est nettement plus performant, en termes d'erreur quadratique, qu'une architecture classique d'échantillonnage non uniforme périodique constituée de  $p$  branches, lorsque le spectre de  $x(t)$  change dynamiquement.

**Abstract** – We propose a new non-uniform periodic sampling scheme named Système d'Échantillonnage Non Uniforme en Radio Intelligente (SENURI). Our scheme detects the spectral location of the active bands in the total bandwidth sampled to reduce the average sampling frequency, the number of samples collected, and consequently the power consumption of the signal processing. SENURI's average sampling frequency depends only on the number of bands contained in the input signal  $x(t)$ . It is much more efficient in terms of squared error than a conventional periodic non-uniform sampling architecture, when the spectrum of  $x(t)$  changes dynamically.

## 1 Introduction

D'après le théorème de Shannon, un signal dont le support spectral est compris entre  $-\frac{f_{nyq}}{2}$  et  $\frac{f_{nyq}}{2}$  peut être parfaitement reconstruit à partir d'échantillons pris uniformément à la fréquence  $f_{nyq}$ . Échantillonner un signal très large bande à la fréquence de Nyquist demanderait une très forte consommation d'énergie au niveau des Convertisseurs Analogiques Numériques.

Afin de réduire la fréquence d'échantillonnage, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question d'une fréquence d'échantillonnage Sous-Nyquist. Ainsi dans [1], les auteurs ont proposé un échantillonnage Sous-Nyquist pour des signaux parcimonieux multi-bandes analogiques appelé Convertisseur Large Bande Modulé (Modulated Wideband Converter). Similairement, les auteurs de [2] ont discuté de l'échantillonnage Non Uniforme Périodique (Periodic non-uniform sampling) plus communément appelé Multi-Coset (MC). Avec le MC, la reconstruction parfaite est possible lorsque la bande est bien localisée. Le cas aveugle, où la localisation de la bande est inconnue, a été largement étudié dans [3].

Il existe plusieurs méthodes d'implémentation de l'échantillonnage MC dans la littérature. Le plus connu est constitué de  $p$  branches, chacune contenant un retard  $\Delta_i = c_i T$  suivi d'un échantillonneur uniforme fonctionnant au rythme  $T_s = LT$  (voir Fig. 1). Récemment il a été proposé dans [4] un schéma Mutli-Coset dans lequel les échantillonneurs uniformes

fonctionnent à des fréquences différentes (SMRS, Synchronous Multirate Sampling). Dans [5] l'auteur part de la SMRS pour définir un schéma utilisant un très faible nombre d'échantillonneurs, le *Dual-Sampling*. Ce dernier utilise deux échantillonneurs uniforme fonctionnant à des périodes premières entre elles.

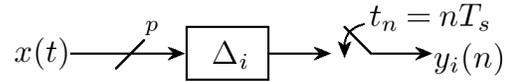


FIGURE 1: Mutli-Coset classique implémenté avec  $p$  branches

Pour une reconstruction optimale (minimum d'erreur quadratique) avec un minimum d'échantillons, nous choisissons une période adaptée  $T = \frac{1}{f_{nyq}}$ , les entiers  $L$  et  $p$  sont tels que  $L \geq p \geq q > 0$  avec  $q$  cardinal de l'ensemble des indices spectraux (les cellules contenant de l'énergie)  $\mathcal{K} = \{k_r\}_{r=1}^q, k_r \in \mathbb{L} = \{0, 1, \dots, L-1\}$ . Par ailleurs, un mauvais choix de  $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i=1}^p$ , schéma d'échantillonnage du couple  $(L, p)$ , engendre une sensibilité aux erreurs si grande que même si la reconstruction parfaite était possible avec des données parfaites, le signal serait corrompu et deviendrait méconnaissable dans la pratique (Fig. 3). Nous constatons clairement qu'après le choix des paramètres d'échantillonnage, le schéma d'échantillonnage (voir Fig. 1) reste ensuite inchangé quelque soit le spectre de  $x(t)$ . De ce fait la reconstruction optimale n'est possible que pour un certain type de signaux. En outre dans la plupart des méthodes du MC, la reconstruction optimale implique la connaissance du nombre de bandes  $N$  et de la largeur de bande maximale  $B_{max}$ .

Dans [6], M. Mishali propose la définition d'un système ef-

Ces travaux sont supportés par la Région Bretagne par l'intermédiaire des projets FUI AMBRUN et PME SoftRF.

fficace d'échantillonnage. Il est doté des propriétés suivantes :

1. La fréquence d'échantillonnage (moyenne) doit être la plus faible possible.
2. Le système n'a aucune connaissance préalable des emplacements de la bande.
3. Le système peut être mis en œuvre avec les dispositifs existants.

Nous désirons concevoir un système d'échantillonnage respectant cette définition du système efficace pour des signaux multi-bandes parcimonieux  $x(t) \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ . Pour ce faire, nous proposons dans ce papier un nouveau schéma du MC à échantillonnage flexible, totalement aveugle (aucune connaissance de  $N$  et de  $B_{max}$  n'est nécessaire a priori), permettant d'adapter sa fréquence moyenne d'échantillonnage  $\bar{f}$  en fonction du *Support Spectral* de la bande totale échantillonnée. Il est constitué d'un seul échantillonneur non-uniforme, d'un algorithme de détection de bandes et d'un algorithme d'optimisation de la fréquence moyenne de l'échantillonneur non-uniforme [7].

## 2 Description du modèle

Le terme radio intelligente est fréquemment utilisé pour définir un système capable de prendre conscience de son environnement et de tirer profit de cette information. Parfois, il est considéré de façon plus restrictive comme un système disposant d'une grande agilité en fréquence pour explorer les opportunités qui peuvent exister dans le spectre [8]. Notre proposition appelée ici SENURI (voir Fig. 2) cadre parfaitement avec cette définition et fonctionne de la façon suivante :

1. Une phase d'adaptation, interrupteur dans la position 1 : le système n'a aucune information sur  $x(t)$  (nombre de bandes  $N$ , emplacement des bandes, ensemble  $\mathcal{K}$  des indices spectraux, bande maximale  $B_{max}$ ). Il procède à une analyse spectrale grâce au bloc NUSS (Non Uniform Spectrum Sensing) (estimation de  $\mathcal{F}$ , *Support Spectral* du signal, et de  $\mathcal{K}$ , défini ci-dessus), puis cherche à optimiser la fréquence d'échantillonnage moyenne de l'échantillonneur non uniforme grâce au bloc OASRS (Optimal Average Sampling Rate Search) en fonction de  $(L, T, \mathcal{K})$ .
2. Une phase d'échantillonnage avec les paramètres définis dans la phase 1 et de reconstruction à partir des échantillons, interrupteur dans la position 2 : le système effectue une reconstruction *Multi-Coset* classique [9].

Notre nouveau système d'échantillonnage permet de réduire le plus faiblement possible le nombre d'échantillons tout en garantissant une reconstruction optimale avec le minimum d'erreur quadratique. Pour ce faire, nous proposons de remplacer les  $p$  branches du MC (voir Fig. 1) par un seul échantillonneur

$\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \{x(t) \in L^2(\mathbb{R}) : \mathbf{X}(f) = 0 \forall f \notin \mathcal{B}\}$ . Où  $\mathcal{B} = [-\frac{f_{nyq}}{2}, \frac{f_{nyq}}{2}]$  et  $\mathbf{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$  transformée de Fourier de  $x(t)$ .

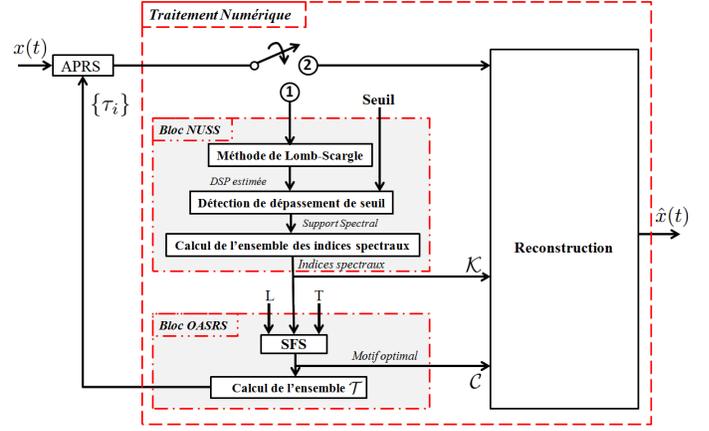


FIGURE 2: Schéma proposé du SENURI

pseudo-aléatoire. Notre nouveau schéma *Multi-Coset* se formalise comme un *Additive Pseudo-Random Sampler* (APRS) dont les  $\mathcal{N}$  instants d'échantillonnage sont [10] :

$$t_m = t_{m-1} + \alpha_m = t_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i, 1 \leq m \leq \mathcal{N}, \quad (1)$$

avec  $E[t_m] = mT$  et  $var[t_m] = m\sigma^2$ . Pour  $\mathcal{N} \geq 1$ ,  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\mathcal{N}}$  est un ensemble de variables aléatoires i.i.d de densité de probabilité  $p_1(\tau)$ , de moyenne  $T$  et de variance  $\sigma^2$ .

Dans le cadre du *Multi-Coset*, pour  $\mathcal{C}$  et  $T$  donnés, nous définissons l'ensemble des distances entre deux instants d'échantillonnage par  $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^{p-1}$  avec  $\tau_0 = c_1$  et  $\tau_i = c_{i+1} - c_i$ . Pour  $t_0 = T\tau_0$ , l'équation (1) devient :

$$t_m = T \sum_{i=0}^m \tau_i, 0 \leq m \leq p-1, \text{ avec } \tau_i \in \mathbb{N}, \text{ entier aléatoire} \quad (2)$$

L'ensemble des instants d'échantillonnage  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  obtenu est non-uniforme et  $p$ -périodique comme le *Multi-Coset* et peut être vu comme un échantillonnage uniforme de  $x(t)$  au rythme  $T$ , en ne prenant que  $p$  échantillons aléatoirement parmi  $L$ , périodiquement. Ainsi la fréquence moyenne d'échantillonnage est donnée par :  $\bar{f} = \frac{p}{LT}$

La transformée de Fourier  $X_i(e^{j2\pi fT})$  de  $y_i[n]$  (Fig.1) est reliée à la transformée de Fourier inconnue  $X(f)$  de  $x(t)$  par l'expression matricielle suivante [9] :

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_C \mathbf{s}(f), f \in \mathcal{B}_0 = [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}], \quad (3)$$

Avec  $\mathbf{y}(f)$ , un vecteur de taille  $p \times 1$  dont le  $i^e$  élément est donné par :

$$y_i(f) = X_i(e^{j2\pi fT}), f \in \mathcal{B}_0, 1 \leq i \leq p \quad (4)$$

La matrice  $\mathbf{A}_C$  de taille  $p \times L$  dont le  $il^e$  élément est donné par :

$$[\mathbf{A}_C]_{il} = \frac{1}{LT} (e^{j2\pi l c_i}), 1 \leq i \leq p, 0 \leq l \leq L-1 \quad (5)$$

Et le vecteur  $\mathbf{s}(f)$ , inconnu, de taille  $L \times 1$  dont le  $l^e$  élément est donné par :

$$s_l(f) = X(f + \frac{l}{LT}), f \in \mathcal{B}_0, 0 \leq l \leq L-1 \quad (6)$$

L'expression de  $s_l(f)$  indique que les éléments inconnus du vecteur  $s(f)$  sont obtenus par un filtrage passe-bande de  $x(t)$  sur la bande  $\frac{r}{LT} \leq f < \frac{r+1}{LT}$ , suivi d'un décalage fréquentiel de  $\frac{r}{LT}$  unités. En d'autres mots, si  $X(f)$ , spectre de  $x(t)$ , est découpé en  $L$  cellules indexées de 0 à  $L - 1$ , chaque cellule correspond à la ligne associée du vecteur  $s(f)$ , pour  $f \in \mathcal{B}_0$ .

La reconstruction de  $x(t)$  passe par la résolution de l'équation linéaire (3) par *Compressive Sensing* pour trouver  $X(f)$  contenu dans le vecteur  $s(f)$  [9]. Par conséquent, en utilisant le fait que  $x(t)$  soit parcimonieux dans le domaine spectral, l'ensemble des indices spectraux  $\mathcal{K}$  (les cellules contenant de l'énergie) est calculable lorsqu'on connaît le support spectral  $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i]$ , où  $N$  est le nombre de bandes contenues dans la plage fréquentielle  $\mathcal{B}$  considérée,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ , et  $(b_i - a_i)$  la largeur de la bande  $i$ .

Plusieurs méthodes d'estimation de l'ensemble  $\mathcal{F}$  sont proposées dans la littérature. Les plus utilisées dans le cadre d'un échantillonnage *Multi-Coset* sont données dans [9]. Mais dans la plupart de ces méthodes la connaissance de la matrice  $\mathbf{A}_C$  ( $L$ ,  $p$  et  $\mathcal{C}$  fixés à l'avance) est obligatoire. Dans le cadre de la conception de notre système d'échantillonnage (système flexible, dynamique et totalement aveugle) le support spectral  $\mathcal{F}$  est calculé à travers une estimation de la densité spectrale de puissance du signal via la méthode de Lomb-Scargle [11], suivi d'une délimitation des  $a_i$  et  $b_i$  grâce à un seuil (Fig.2) [12]. D'autres méthodes d'estimation spectrale sont données dans [13].

Lorsque  $\mathcal{F}$  est connu,  $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^N \{\mathbf{k}_i\} = \{k_r\}_{r=1}^q$  se calcule de la manière suivante :  $[a_i * LT] \leq \{\mathbf{k}_i\} \leq [b_i * LT]$ ,  $1 \leq i \leq N$ , où  $[*]$  est la fonction *partie entière* et  $\{\mathbf{k}_i\}$  est l'ensemble des indices pour chaque bande.

Connaissant  $\mathcal{K}$ , le nombre d'inconnues dans l'équation (3) peut être réduit :

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_C(\mathcal{K})\mathbf{z}(f), f \in \mathcal{B}_0, \quad (7)$$

Avec  $\mathbf{z}(f)$  un vecteur de taille  $q \times 1$ , définie par :

$$[\mathbf{z}(f)]_r = X(f + \frac{k_r}{L}), 1 \leq r \leq q \quad (8)$$

La matrice réduite de taille  $p \times q$ , définie par :

$$[\mathbf{A}_C(\mathcal{K})]_{ir} = \frac{1}{LT} (\exp(\frac{j2\pi k_r c_i}{L})), 1 \leq i \leq p, 1 \leq r \leq q \quad (9)$$

Si  $\mathbf{A}_C(\mathcal{K})$  est de "colonne rang plein", l'unique solution de l'équation (7) est obtenue en calculant la pseudo-inverse  $\mathbf{A}_C^+$  de  $\mathbf{A}_C(\mathcal{K})$ , [9] :

$$\mathbf{z}(f) = \mathbf{A}_C^+ \mathbf{y}(f), f \in \mathcal{B}_0 \quad (10)$$

Le motif d'échantillonnage idéal  $\mathcal{C}$  est obtenu pour un nombre de conditionnement de la matrice  $\mathcal{A}_C(\mathcal{K})$  le plus faible possible (Fig.3). Le nombre de conditionnement d'une matrice  $U$  est défini par :  $cond(U) = \|U\| \|U^{-1}\|$ , où  $\|*\|$  définit la norme. Le choix de  $\mathcal{C}$  peut être vu comme la solution du problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{C}_{opt} = arg \min_{\mathcal{C}:|\mathcal{C}|=p} cond(\mathcal{A}_C(\mathcal{K})). \quad (11)$$

Dans [9], l'auteur propose l'utilisation de la *Sequential Forward Selection* (SFS) dans le contexte du *Multi-Coset*. La SFS est un algorithme de recherche glouton simpliste. Pour un ensemble  $\mathbb{L}$  donné, il cherche à trouver un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  minimisant la fonction  $cond(\mathcal{A}_C(\mathcal{K}))$ . Dans notre cas nous avons utilisé une version modifiée de cet algorithme. Pour un  $L = |\mathbb{L}|$  donné, le choix de  $\mathcal{C}$  se fait en prenant  $p = |\mathcal{K}| + 1$ , ainsi la fréquence moyenne de l'échantillonneur non uniforme dépend uniquement du nombre de bandes contenues dans  $x(t)$  ainsi que de la largeur des bandes. La fréquence moyenne devient alors :

$$\bar{f} = \frac{p}{LT} = \frac{|\mathcal{K}| + 1}{LT}, \quad (12)$$

où  $|\mathcal{K}|$  représente le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{K}$ .

### 3 Résultats Numériques

Dans nos simulations, nous avons considéré un signal multi-bandes de  $N$  signaux modulés 16-QAM,  $N$  étant variable, chacun avec une largeur de bande de 10 MHz. La fréquence de Nyquist associée à  $x(t)$  est  $f_{nyq} = 600$  MHz, avec  $\mathcal{B} = [-300, 300]$  MHz. Nous nous sommes comparés à une architecture *MC* assurant une reconstruction optimale pour  $N = 6$  et connaissant l'emplacement exact de chaque bande.

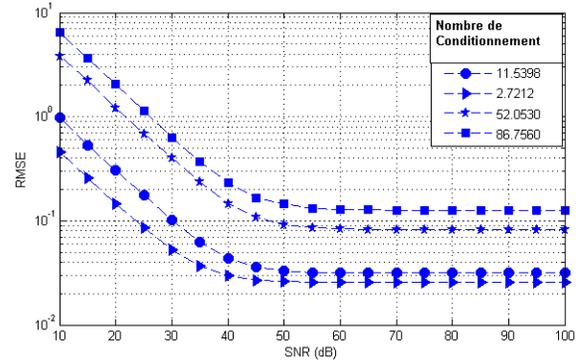


FIGURE 3: L'influence du nombre de conditionnement lié au choix de  $\mathcal{C}$

Dans la Figure 3 nous constatons en premier lieu, une stabilisation de la RMSE pour un rapport signal à bruit supérieur à 50dB. Le second constat se fait sur la translation de la courbe  $RMSE = f(SNR)$  vers le haut au fur et à mesure que le nombre de conditionnement de la matrice  $\mathcal{A}_C(\mathcal{K})$  augmente.

Notre nouveau schéma SENURI travaille en aveugle (aucune connaissance sur le spectre), les figures 4 et 5 sont obtenues après la phase d'adaptation. Le changement de mode entre la phase d'adaptation et la phase de reconstruction se fait périodiquement. La période de changement de mode dépend de l'environnement radio, mais doit être prise supérieure à la durée maximale de traitement dans les blocs *NUSS* et *OASRS*.

La figure 4 montre que le SENURI, pour chaque point après stabilisation de la phase d'adaptation, s'adapte bien en termes de fréquence moyenne d'échantillonnage au nombre de bandes  $N$  présentes dans le signal d'entrée contrairement au schéma

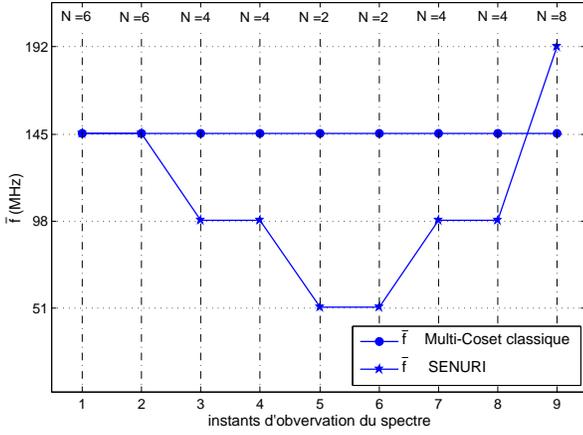


FIGURE 4: La fréquence moyenne  $\bar{f}$  pour différents nombres de bandes  $N$ , SNR=50dB

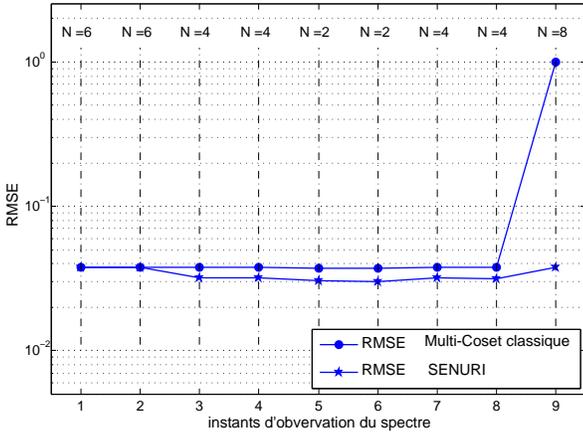


FIGURE 5: La RMSE pour différents nombres de bandes  $N$ , SNR=50dB

*Multi-Coset* classique.

La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne normalisée (ou RMSE pour *Root Mean Square Error*) est définie par :

$$RMSE = \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \quad (13)$$

où  $\|x\|_2$  représente la norme deux de  $x$ .

La figure 5 montre que la RMSE du signal reconstruit grâce au SENURI est plus faible que celle du *Multi-Coset* en particulier lorsque le nombre de bandes devient supérieur à 6 (point  $N = 8$ , (Fig.5)), nombre pour lequel le schéma rigide du *Multi-Coset* a été construit.

## 4 Conclusion

Dans ce papier nous avons proposé un nouveau schéma d'échantillonnage pour la radio intelligente. Afin d'assurer une reconstruction optimale (à erreur quadratique minimale) avec un faible nombre d'échantillons, le SENURI adapte ses paramètres en fonction du signal d'entrée. Nous avons montré que sa fréquence moyenne d'échantillonnage dépend uniquement du nombre de bandes contenues dans le signal d'entrée

et qu'elle descend jusqu'à  $\bar{f} = 51$  Mhz pour  $N = 2$  bandes (valeur nettement inférieure à  $f_{nyq} = 600$  Mhz). Ses performances ont été comparées à celles d'une architecture *Multi-Coset* classique constituée de  $p$  branches, elles montrent que notre système est nettement plus performant lorsque le spectre du signal d'entrée change dynamiquement.

## Références

- [1] R. Venkataramani and Y. Bresler, "Optimal sub-nyquist non-uniform sampling and reconstruction for multiband signals," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 10, p. 2301–2313, 2001.
- [2] M. Mishali and Y. C. Eldar, "From theory to practice : Sub-nyquist sampling of sparse wideband analog signals," *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, vol. 4, no. 2, pp. 375–391, 2010.
- [3] M. Mishali and Y. C. Eldar, "Blind multiband signal reconstruction : Compressed sensing for analog signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, pp. 993–1009, Mar. 2009.
- [4] M. E. Dominguez-Jiménez and N. González-Prelcic, "Analysis and design of multirate synchronous sampling schemes for sparse multiband signals," 2012.
- [5] T. Moon, N. Tzou, X. Wang, H. Choi, and A. Chatterjee, "Low-cost high-speed pseudo-random bit sequence characterization using nonuniform periodic sampling in the presence of noise," pp. 146–151, Apr. 2012.
- [6] M. Mishali, Y. Eldar, and J. Tropp, "Efficient sampling of sparse wideband analog signals," p. 290–294, 2008.
- [7] S. Traoré, B. Aziz, and D. Le Guennec, "Dynamic single branch non-uniform sampler," in *DSP, Santorini-Greece, Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing*, 2013.
- [8] J. Palicot and al, *Radio Engineering : From Software Radio to Cognitive Radio*. John Wiley and Sons, June 2010.
- [9] M. Rashidi Avendi, "Non-uniform sampling and reconstruction of multi-band signals and its application in wideband spectrum sensing of cognitive radio," 2010.
- [10] M. Ben Romdhane, *Échantillonnage non uniforme appliqué à la numérisation des signaux radio multistandard*. PhD thesis, 2009.
- [11] J. D. Scargle, "Studies in astronomical time series analysis II. statistical aspects of spectral analysis of unevenly sampled data," *Astrophysical Journal*, vol. 263, pp. 835–853, 1982.
- [12] B. Aziz, S. Traoré, and D. Le Guennec, "Non-uniform spectrum sensing for cognitive radio using sub-nyquist sampling," in *EUSIPCO, Marrakech- Morocco, 21st European Signal Processing Conference 2013 - Signal Processing for Communications*, 2013.
- [13] S. Traoré, B. Aziz, D. Le Guennec, and J. Palicot, "Non-uniform sampling for spectral analysis of multi-band signals," in *ICTRS, Noordwijkerhout-Netherlands, 2nd International Conference on Telecommunications and Remote Sensing Processing*, 2013.