

# Propriétés statistiques du bruit $\alpha$ -stable après transformation de Fourier à court terme

Francois-Xavier SOCHELEAU<sup>1</sup>, Dominique PASTOR<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lab-STICC UMR 6285 CNRS, ENSTA Bretagne, Ueb  
2 rue Francois Verny, 29806 Brest Cedex 9, France

<sup>2</sup>Lab-STICC UMR 6285 CNRS, Institut Mines-Telecom, Telecom Bretagne, Ueb  
Technopôle Brest Iroise-CS 83818, 29238 Brest Cedex, France  
francois-xavier.socheleau@ensta-bretagne.fr,  
dominique.pastor@telecom-bretagne.eu

**Résumé** – Les propriétés statistiques du bruit blanc  $\alpha$ -stable symétrique à valeurs réelles sont déterminées après transformée de Fourier à court terme (TFCT) discrète. La symétrie, stationnarité et la dépendance entre les composantes réelles et imaginaires sont étudiées en fonction des paramètres de TFCT et de l'indice de stabilité  $\alpha$ .

**Abstract** – Statistical properties of white and real-valued symmetric  $\alpha$ -stable noise after short-time Fourier transformation (STFT) are derived. Symmetry, stationarity and dependence between the real and imaginary components are studied as a function of the STFT parameters and the stability index  $\alpha$ .

## 1 Introduction

Les lois  $\alpha$ -stables symétriques (S $\alpha$ S) sont communément employées pour modéliser des perturbations impulsives d'origines diverses (bruit acoustique sous-marin des crevettes claqueuses, phénomènes électromagnétiques, bruit audio, variations boursières etc.). La justification théorique du modèle S $\alpha$ S résulte généralement de sa nature leptokurtique et repose aussi sur le théorème central limite généralisé qui étend le théorème central limite aux variables aléatoires de variance infinie.

Pour de nombreuses applications de traitement du signal, la TFCT discrète est utilisée comme outils d'analyse temps-fréquence ou comme transformée parcimonieuse et la connaissance des lois de probabilité de ses coefficients est parfois requise pour développer des méthodes d'estimation ou de détection performantes.

Après quelques rappels sur les propriétés des variables aléatoires S $\alpha$ S, nous déterminons dans un premier temps la fonction caractéristique du bruit blanc  $\alpha$ -stable symétrique à valeurs réelles après TFCT et étudions ensuite les propriétés de symétrie et de stationnarité ainsi que la structure de dépendance entre les composantes réelles et imaginaires après TFCT.

## 2 Bruit S $\alpha$ S

**Propriété 1** La fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $X$   $\alpha$ -stable symétrique peut s'exprimer comme

$$\Phi_X(u) = \exp(-\sigma|u|^\alpha), \quad -\infty < u < +\infty \quad (1)$$

avec<sup>1</sup>  $0 < \alpha < 2$ , et  $\sigma > 0$ .

1. Nous excluons volontairement le cas  $\alpha = 2$ , qui représente le cas gaussien déjà traité dans la littérature.

La loi de  $X$  est notée  $\mathcal{S}(\alpha, \sigma)$  où  $\alpha$  est l'indice de stabilité et  $\sigma$  le paramètre d'échelle.

**Propriété 2 ([1])** Toute variable aléatoire  $X$   $\alpha$ -stable symétrique peut se décomposer comme  $X = A^{1/2}G$ , où  $G$  et  $A$  sont mutuellement indépendantes, avec  $G \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$  et  $A$  une variable aléatoire  $\alpha$ -stable dissymétrique, dont la fonction caractéristique est donnée dans [1].  $X$  est aussi dite sous-gaussienne et subordonnée à  $G$ .

## 3 Propriétés statistiques

NB : Les démonstrations des propriétés énoncées dans cette section se trouvent en annexe.

### 3.1 TFCT

Soit  $\{X(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  un processus aléatoire discret S $\alpha$ S constitué de variables i.i.d vérifiant  $X(m) \sim \mathcal{S}(\alpha, \sigma)$ . Pour une fenêtre d'analyse  $w(m)$  de longueur  $M$ , la TFCT de  $X(m)$  est définie comme

$$\mathbf{X}_{n,k} \triangleq \begin{bmatrix} X_{n,k}^r \\ X_{n,k}^i \end{bmatrix}^T,$$

$$X_{n,k}^r \triangleq \sum_{m=nD}^{nD+M-1} X(m)w(m-nD) \cos(\omega_k m),$$

$$X_{n,k}^i \triangleq - \sum_{m=nD}^{nD+M-1} X(m)w(m-nD) \sin(\omega_k m),$$

où  $K > 0$  est le nombre de points de la transformée de Fourier discrète (TFD),  $D > 0$  est le pas de glissement entre deux fenêtres successives, et  $\omega_k \triangleq 2\pi k/K$ ,  $0 \leq k \leq K-1$ . Les indices

$n$  et  $k$  font respectivement référence au temps et à la fréquence. Par soucis de lisibilité, les bornes de la sommation sont parfois omises. Par défaut, elles sont égales à  $nD$  et  $nD + M - 1$ .

### 3.2 Fonction caractéristique conjointe

**Proposition 1** *La fonction caractéristique conjointe de  $\mathbf{X}_{n,k}$  peut s'exprimer comme*

$$\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\left(\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u} \sigma}\right)^\alpha \times s_{n,k}(\mathbf{u})\right), \quad (2)$$

où  $s_{n,k}(\mathbf{u}) = \sum_m |w(m - nD) \sin(\omega_k m - \theta(\mathbf{u}))|^\alpha$ ,  $\mathbf{u} \triangleq [u_0, u_1]^T$  et

$$\theta(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(u_0^2 - u_1^2) \arccos\left(\frac{-2u_0 u_1}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}\right) - \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

### 3.3 Stationnarité, symétrie et circularité

Du fait de la nature i.i.d. des  $X(m)$  et des périodicités associées aux fonctions trigonométriques de la TFCT, on peut s'attendre à ce que  $\mathbf{X}_{n,k}$  vérifie certaines relations particulières concernant les propriétés de stationnarité, symétrie et circularité.

**Corollaire 1**  *$\mathbf{X}_{n,k}$  est un vecteur aléatoire stable symétrique.*

Ce résultat se vérifie simplement en notant que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $Y \triangleq aX_{n,k}^r + bX_{n,k}^i$  est une variable aléatoire  $S_\alpha S$  de paramètre d'échelle

$$\sigma_Y = \sigma \left( \sum_m |w(m - nD) (a \cos(\omega_k m) - b \sin(\omega_k m))|^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

D'après [1], ce résultat implique qu'il existe une unique mesure symétrique  $\Gamma$  définie sur le cercle unité  $C$ , telle que

$$\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\int_C |\mathbf{u}^T \mathbf{c}|^\alpha \Gamma(d\mathbf{c})\right). \quad (4)$$

$\mathbf{X}_{n,k}$  étant issu d'une transformation linéaire de variables aléatoires  $S_\alpha S$  indépendantes, cette mesure spectrale  $\Gamma$  est concentrée sur un nombre fini de points sur le cercle  $C$ .

**Corollaire 2**  *$\mathbf{X}_{n,k}$  est cyclo-stationnaire selon  $n$  tel que*

$$\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{X}_{n+P,k}}(\mathbf{u}), \quad (5)$$

où

$$P = \begin{cases} \frac{\operatorname{ppcm}(2kD, K)}{2kD}, & \text{si } k > 0 \\ 1, & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (6)$$

**Corollaire 3** *Une condition suffisante pour la stationnarité stricte est la circularité. En d'autres termes, soit  $\mathbf{X}_{n,k}^z$  défini comme*

$$\mathbf{X}_{n,k}^z \triangleq \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{bmatrix} \mathbf{X}_{n,k}. \quad (7)$$

Par définition,  $\mathbf{X}_{n,k}$  est circulaire ssi  $\mathbf{X}_{n,k} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{n,k}^z$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ . Nous montrons que si  $\mathbf{X}_{n,k}$  est circulaire alors  $\mathbf{X}_{n,k} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{n+\ell, k}$ ,  $\forall \ell \in \mathbb{N}$ .

Dans de nombreuses applications, les algorithmes de détection/estimation reposent sur les hypothèses de stationnarité et de circularité des données d'entrée. La circularité est obtenue ssi  $s_{n,k}^z(\mathbf{u}) = s_{n,k}(\mathbf{u})$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ . Dans le cas général, ceci n'est pas vérifié et  $\mathbf{X}_{n,k}$  n'est donc pas circulaire. Cependant en choisissant bien les paramètres de TFCT, on peut obtenir une symétrie de rotation de la loi de  $\mathbf{X}_{n,k}$ , menant dans certains cas, à une circularité approchée et par conséquent à une stationnarité elle aussi approchée. Cette circularité approchée peut être pertinente pour faciliter le traitement du vecteur  $\mathbf{X}_{n,k}$  car, dans ce cas, celui-ci peut être considéré comme un vecteur aléatoire sous-gaussien dont le vecteur gaussien sous-jacent a des composantes i.i.d [1].

#### Cas de la fenêtre rectangulaire

**Corollaire 4** *Pour une fenêtre d'analyse rectangulaire de longueur  $M = \ell \times P_z$ , avec  $\ell \in \mathbb{N}^+$  et  $P_z = \operatorname{ppcm}(2k, K)/(2k)$ ,  $\mathbf{X}_{n,k}$  présente une symétrie de rotation d'ordre  $P_z$ , telle que*

$$\mathbf{X}_{n,k} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{n,k}^z, \quad \forall z \equiv 0 \pmod{\pi/P_z}. \quad (8)$$

Cette symétrie de rotation est visible sur la figure 1-(a) où la fonction caractéristique ainsi que la mesure spectrale sont représentées pour  $\alpha = 0.5$ ,  $M = K = 8$ , et pour l'indice fréquentiel  $k = 1$ , tel que  $P_z = 4$ .

La circularité est strictement obtenue pour  $P_z = +\infty$ . Cependant, en pratique, la circularité peut être une hypothèse raisonnable lorsque  $P_z$  est grand, menant à une distribution presque isotrope. Par définition,  $P_z$  est borné par  $1 \leq P_z \leq K$ .  $P_z$  est maximal et égal à  $K$  lorsque  $2k$  et  $K$  sont premiers entre eux car  $P_z = \frac{\operatorname{ppcm}(2k, K)}{2k} = \frac{K}{\operatorname{pgcd}(2k, K)}$ .

Par conséquent, on peut montrer que pour une fenêtre rectangulaire sans zero-padding, on obtient  $P_z = K$ ,  $\forall 0 < k \leq K - 1$  ssi la longueur  $K$  de la TFD est un nombre premier. Choisir cet ensemble de paramètres, avec  $K$  premier, implique aussi que les  $\mathbf{X}_{n,k}$  sont i.i.d. selon l'axe des fréquences.<sup>2</sup> De plus, si  $K$  est choisi suffisamment grand, la fonction caractéristique devient presque isotrope et l'approximation de circularité (donc de stationnarité) devient raisonnable. Ceci est illustré à la figure 1-(b), où la fonction caractéristique de  $\mathbf{X}_{n,k}$  est tracée pour  $\alpha = 0.5$  et  $M = K = 127$ .

#### Cas des autres fenêtres

Jusqu'ici nous avons montré que la symétrie de rotation peut être obtenue pour les fenêtres rectangulaire grâce à la périodicité de  $s_{n,k}^z(\mathbf{u})$ . Cette périodicité n'est pas strictement vérifiée pour les fenêtres classiques telles Hanning, Gauss, Blackman, etc. Cependant, comme montré dans le tableau 1, pour la plupart des fenêtres,  $s_{n,k}^z(\mathbf{u})$  est presque-périodique et vérifie [2]

$$\|s_{n,k}^z(\mathbf{u}) - s_{n,k}^{z+\pi/P_z}(\mathbf{u})\|_\infty \leq \epsilon, \quad (9)$$

où  $\epsilon \ll \|s_{n,k}^z(\mathbf{u})\|_\infty$ . Cette "presque-périodicité" implique que  $\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u})$  présente une "presque" symétrie de rotation

<sup>2</sup>. Cette dernière implication résulte du fait que lorsque  $K = M = P_z$ ,  $s_{n,k}(\mathbf{u}) = s_{n,k'}(\mathbf{u})$ , quels que soient  $k$  et  $k'$  appartenant à  $\{1, \dots, K - 1\}$

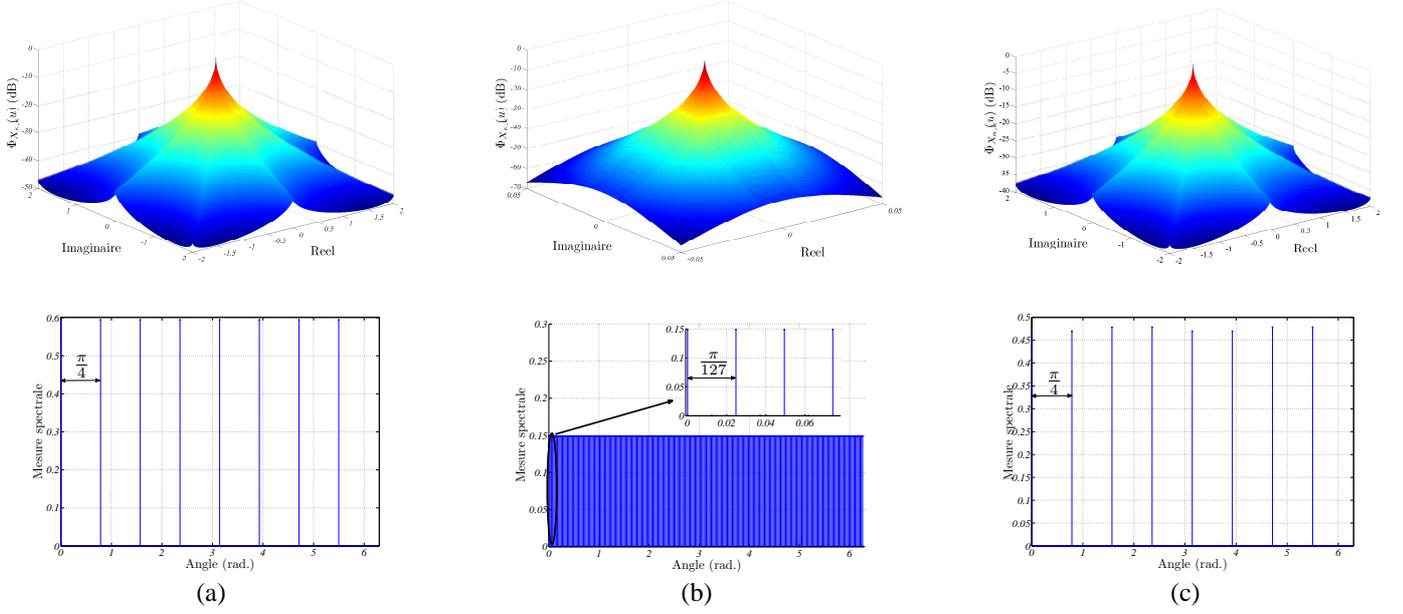


FIGURE 1 – Illustration de la symétrie de rotation et de la presque circularité de  $X_{n,k}$ , ( $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $k = 1$ ). (a) et (b), fenêtre rectangulaire, avec  $K = 8$  et  $K = 127$ , respectivement. (c) Fenêtre de Gauss, avec  $K = 8$ .

d'ordre  $P_z$ . Cette “presque” symétrie est visible sur la figure 1-(c).

### 3.4 Fonctions caractéristiques marginales et dépendance

**Corollaire 5**  $X_{n,k}^r$  et  $X_{n,k}^i$  sont des variables aléatoires  $S\alpha S$  vérifiant  $X_{n,k}^r \sim S(\alpha, \sigma_r)$  et  $X_{n,k}^i \sim S(\alpha, \sigma_i)$ , respectivement, avec

$$\sigma_r = \sigma \left( \sum_m |w(m - nD) \cos(\omega_k m)|^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (10)$$

$$\sigma_i = \sigma \left( \sum_m |w(m - nD) \sin(\omega_k m)|^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (11)$$

$X_{n,k}^r$  et  $X_{n,k}^i$  sont identiquement distribuées lorsque leurs facteurs d'échelles sont égaux. En utilisant les résultats de la section précédente, on peut montrer que l'égalité stricte est obtenue entre  $\sigma_r$  et  $\sigma_i$ , lorsque  $X_{n,k}$  présente une symétrie de rotation d'ordre  $P_z$ , avec  $P_z$  paire. Notons que la “presque” symétrie, avec  $P_z$  paire, implique une “presque” égalité entre  $\sigma_r$  et  $\sigma_i$ . C'est aussi le cas lorsque  $K$  est grand et premier. Pour de nombreux ensembles de paramètres de TFCT, la différence entre  $\sigma_r$  et  $\sigma_i$  peut être supposée négligeable pour des applications pratiques.

Bien que  $X_{n,k}^r$  et  $X_{n,k}^i$  peuvent être identiquement distribués, ils ne sont pas indépendants dans le cas général. Un cas d'indépendance est obtenu pour  $k = K/4$ ,  $\forall \alpha$ . Dans ce cas, la matrice de corrélation  $\mathbf{R}_{n,k}$  a un seul terme non nul à chaque  $n$ , de sorte que la fonction caractéristique conjointe se réduit au produit des fonctions caractéristiques marginales. La mesure spectrale  $\Gamma$  porte l'information essentielle sur la structure

de dépendance entre  $X_{n,k}^r$  et  $X_{n,k}^i$  et les métriques de dépendance s'expriment généralement en fonction de cette dernière. On peut citer la covariation, par exemple, qui est définie dans notre cas pour  $1 < \alpha < 2$  comme

$$[X_{n,k}^r, X_{n,k}^i]_\alpha \triangleq \int_C \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^{\langle \alpha-1 \rangle} \Gamma(d\mathbf{c}),$$

où  $x^{\langle p \rangle} = \text{sgn}(x)|x|^p$ , et s'obtient en utilisant la relation suivante [1]

$$[X_{n,k}^r, X_{n,k}^i]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma_Y^\alpha}{\partial a} \Big|_{a=0, b=1}. \quad (12)$$

Après calcul et pour une fenêtre  $w(\cdot)$  à valeurs positives, la covariation normalisée s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{[X_{n,k}^r, X_{n,k}^i]_\alpha}{[X_{n,k}^r, X_{n,k}^r]_\alpha} \\ &= \frac{\sum_m w^\alpha(m - nD) \cos(\omega_k m) (\sin(\omega_k m))^{\langle \alpha-1 \rangle}}{\sum_m |w(m - nD) \cos(\omega_k m)|^\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

On notera que l'indépendance entre  $X_{n,k}^r$  et  $X_{n,k}^i$  implique une covariation nulle mais que la réciproque n'est pas vraie.

Il existe d'autres mesures de dépendance plus générales, comme celle proposée dans [3], qui repose sur une mesure de distance entre la fonction caractéristique conjointe et le produit des fonctions caractéristiques marginales. Ce type de métrique présente l'avantage d'être nulle uniquement lorsqu'il y a indépendance.

La figure 2 montre la métrique décrite dans [3] en fonction de l'indice de stabilité  $\alpha$  et pour différents paramètres de TFCT (cette métrique prend des valeurs comprises entre 0, indépendance, et 1, dépendance totale). On notera qu'à l'exception du cas gaussien, il n'est pas possible d'avoir un vecteur  $X_{n,k}$  qui soit (presque) circulaire et à composantes indépendantes (théorème de Maxwell-Hershell [4, pp. 201]).

TABLE 1 – Indice de “presque-périodicité” :  $\|s_{n,k}^z(\mathbf{u}) - s_{n,k}^{z+\pi/P_z}(\mathbf{u})\|_\infty / \|s_{n,k}^z(\mathbf{u})\|_\infty$ , pour  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$ ,  $n = 0$ .

	Rec.	Hann.	Gauss.	Black.
<b>K=M=17</b>	0	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
<b>K=M=31</b>	0	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
<b>K=M=61</b>	0	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
<b>K=M=127</b>	0	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$

## 4 Conclusion

Dans le cas général, les coefficients de TFCT de bruit i.i.d  $\alpha$ -stable symétrique à valeurs réelles sont cyclo-stationnaires, non circulaires et ont des composantes réels et imaginaires non i.i.d. Cependant, pour des paramètres de TFCT spécifiques, basés sur la fenêtre rectangulaire et/ou sur des tailles de fenêtre avec un nombre de points premier, il est possible d’obtenir des coefficients “presque” (au sens de Bohr) circulaires et stationnaires.

## A Démonstrations des propositions

### Preuve Prop. 1

Soit  $\tilde{\mathbf{X}}_{m,k} \triangleq X(m) \cdot [\cos(\omega_k m), -\sin(\omega_k m)]^T$ . L’indépendance des  $X(m)$  implique

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \exp \left( i \mathbf{u}^T \mathbf{X}_{n,k} \right) \right\} \\ &= \prod_m \Phi_{\tilde{\mathbf{X}}_{m,k}}(w(m-nD)\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (14)$$

D’après la propriété 2,  $X(m)$  est sous-gaussien et peut s’exprimer comme  $X(m) = A^{1/2}(m)G(m)$ . Par conséquent,  $\tilde{\mathbf{X}}_{m,k}$  vérifie  $\tilde{\mathbf{X}}_{m,k} = A^{1/2}(m)\tilde{\mathbf{G}}_{m,k}$ , où  $\tilde{\mathbf{G}}_{m,k}$  est vecteur gaussien dégénéré à moyenne nulle de matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{m,k} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} \cos^2(\omega_k m) & -\frac{1}{2} \sin(2\omega_k m) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\omega_k m) & \sin^2(\omega_k m) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

En utilisant la propriété de sous-gaussianité [1], la fonction caractéristique de  $\tilde{\mathbf{X}}_{m,k}$  s’exprime alors comme

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{X}}_{m,k}}(\mathbf{u}) = \exp \left( - \left| \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{m,k} \mathbf{u} \right|^{\alpha/2} \right). \quad (16)$$

A partir (14) et (16), nous obtenons

$$\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \exp \left( - \sum_m \left| \frac{1}{2} w^2(m-nD) \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{m,k} \mathbf{u} \right|^{\alpha/2} \right). \quad (17)$$

L’expression  $\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u})$  se déduit de

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{m,k} \mathbf{u} &\stackrel{(a)}{=} \sigma^2 (u_0^2 + u_1^2 + (u_0^2 - u_1^2) \cos(2\omega_k m) \\ &\quad - 2u_0 u_1 \sin(2\omega_k m)) \\ &\stackrel{(b)}{=} 2\sigma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \sin^2(\omega_k m - \theta(\mathbf{u})), \end{aligned}$$

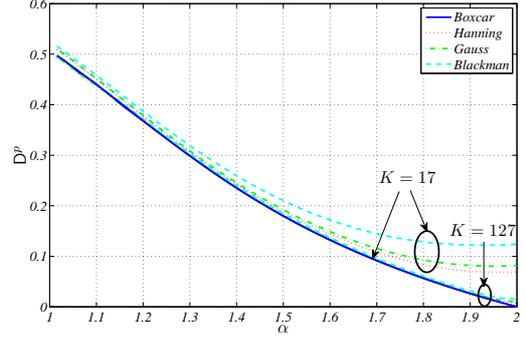


FIGURE 2 – Métrique d’indépendance [3] en fonction de  $\alpha$ , ( $p = 1$ ,  $M = K$ ).

où (a) est le simple développement de  $\mathbf{u}^T \mathbf{R}_{m,k} \mathbf{u}$  et (b) repose sur les identités trigonométriques suivantes :  $\forall a, b, x \in \mathbb{R}$ ,  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi)$ , où  $\phi = \text{sgn}(b) \arccos \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  et  $1 + \sin(2x) = 2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4})$ .

### Preuve Cor. 2

Par un changement de variable,  $s_{n,k}(\mathbf{u})$  peut s’écrire  $s_{n,k}(\mathbf{u}) = \sum_{m=0}^{M-1} |w(m)|^\alpha |\sin(\omega_k(m+nD) - \theta(\mathbf{u}))|^\alpha$ . De plus, comme  $|\sin(\cdot)|$  est  $\pi$ -périodique et en notant que  $P$  est le plus petit entier tel que  $\omega_k D P \equiv 0 \pmod{\pi}$ , nous pouvons conclure que  $\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{X}_{n+P,k}}(\mathbf{u})$ .

### Preuve Cor. 3

La fonction caractéristique de  $\mathbf{X}_{n,k}^z$  s’exprime comme  $\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}^z}(\mathbf{u}) = \exp \left( - \left( \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u} \sigma} \right)^\alpha \times s_{n,k}^z(\mathbf{u}) \right)$ , où  $s_{n,k}^z(\mathbf{u}) = \sum_{m=0}^{M-1} |w(m) \sin(\omega_k(m+nD) + z - \theta(\mathbf{u}))|^\alpha$ . Par conséquent,  $\Phi_{\mathbf{X}_{n+l,k}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{X}_{n,k}^z}(\mathbf{u})$ , pour  $z = \omega_k D l$ . Si  $\mathbf{X}_{n,k}$  est circulaire, alors  $\Phi_{\mathbf{X}_{n,k}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{X}_{n,k}^z}(\mathbf{u})$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ , ce qui conclut la preuve.

### Preuve Cor. 4

Pour une fenêtre rectangulaire,  $s_{n,k}(\mathbf{u}) = \frac{1}{M^{\alpha/2}} \sum_{m=0}^{M-1} |\sin(\omega_k(m+nD) - \theta(\mathbf{u}))|^\alpha$ . En notant que  $|\sin(\omega_k(m+nD) - \theta(\mathbf{u}))|^\alpha$  est une fonction périodique de  $m$ , de période  $P_z = \text{ppcm}(2k, K)/(2k)$ , si  $M$  est choisi comme un multiple de  $P_z$ , on obtient  $s_{n,k}(\mathbf{u}) = s_{n,k}^z(\mathbf{u})$ ,  $\forall z \equiv 0 \pmod{\pi/P_z}$ .

## Références

- [1] G. SAMORODNITSKY et M. S. TAQQU, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models With Infinite Variance*. New-York : Chapman & Hall, 1994.
- [2] H. BOHR, *Almost-periodic functions*. Chelsea, 1947.
- [3] G. J. SZÉKELY, M. L. RIZZO et N. K. BAKIROV, « Measuring and Testing Dependence by Correlation of Distances », *The Annals of Statistics*, vol. 35, no. 6, p. 2769–2794, 2007.
- [4] E. T. JAYNES, *Probability Theory : The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.