

Etude statistique des erreurs d'interpolation et de leur impact sur l'estimation du canal de Rayleigh dans un contexte OFDM

Vincent SAVAUX^{1,2}, Yves LOUËT², Moïse DJOKO-KOUAM¹, Alexandre SKRZYPCZAK³

¹Département Génie des Systèmes de Communications
ECAM RENNES - Louis de Broglie, Campus de Ker Lann - Bruz CS 29128, 35091 RENNES Cedex 9, France

²Équipe SCEE
SUPELEC/IETR, Avenue de la Boulaie, CS 47601, F-35576 Cesson-Sévigné CEDEX, France

³Zodiac Data Systems
2 rue de Caen, 14740 Bretteville l'Orgueilleuse, France
vincent.savaux@ecam-rennes.com, Yves.Louet@supelec.fr
moise.djoko-kouam@ecam-rennes.fr, Alexandre.Skrzypczak@zodiacaerospace.com

Résumé – L'article traite des erreurs d'interpolation dans le contexte d'estimation du canal de Rayleigh sélectif en fréquence pour les systèmes OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Ces erreurs se traduisent par l'apparition d'un seuil dans les courbes de taux d'erreur. Dans un premier temps, on caractérise statistiquement les erreurs d'estimation dues aux interpolations, et on introduit la notion de bruit d'interpolation. Dans un second temps, selon la technique d'interpolation choisie, l'espacement fréquentiel entre pilotes servant à l'estimation et le type de constellation, on prédit le seuil atteint par les courbes de taux d'erreur pour un RSB (Rapport Signal à Bruit) infini. Nous validons finalement par simulation les résultats obtenus analytiquement.

Abstract – This article deals with the interpolation errors in the context of the Rayleigh frequency selective channel estimation, in an OFDM context. These errors yield to an error floor in the bit error rate (BER) curves. First, we statistically characterize the estimation errors, which are caused by the interpolations, and we define the interpolation noise. Second, knowing the chosen interpolation technique, the frequency spacing between the pilot tones and the kind of the constellation, we predict the lower bound which is reached by the BER curves. Simulations finally validate the analytical developments.

1 Introduction et modèle

Dans bon nombre de systèmes de transmission utilisant l'OFDM, il est courant d'utiliser des porteuses pilotes pour effectuer l'estimation de canal. Pour certaines dispositions de ces pilotes dans la trame OFDM, il est nécessaire d'effectuer une interpolation pour obtenir la réponse fréquentielle du canal l'intégralité du réseau temps-fréquence. Les auteurs de [2, 3] proposent une comparaison des performances d'un grand nombre de techniques d'interpolations pour l'estimation de canal dans un contexte OFDM. Ces interpolations créent des erreurs d'estimation dont l'effet est l'apparition d'un seuil de taux d'erreur à fort RSB. De nombreux articles tels que [5, 7] donnent les expressions des taux d'erreur en fonction des erreurs d'estimation de canal. Cependant, les erreurs considérées sont dues au bruit additif ou à une mauvaise estimation de l'offset en fréquence.

Dans cet article, nous focalisons l'étude sur les erreurs d'estimation de canal dues à l'interpolation dans un système OFDM. Nous proposons d'évaluer analytiquement la valeur du seuil de taux d'erreur pour une modulation BPSK, atteinte pour un RSB infini. Pour cela, nous définissons un bruit d'interpolation, dont les propriétés statistiques peuvent être caractérisées connais-

sant le type d'interpolation choisi et la densité des pilotes dans la trame OFDM. Associée à une analyse géométrique dépendante de la constellation choisie, cette étude statistique permet d'aboutir à une expression analytique du seuil de taux d'erreur binaire (TEB). L'étude proposée ici diffère des méthodes classiques citées dans [5, 7], car elle est spécifique aux erreurs d'estimation dues à l'interpolation. L'analyse proposée permet d'obtenir la valeur exacte du seuil de TEB en fonction de l'interpolation et de la constellation choisies. Dans la suite, on considèrera le signal OFDM \mathbf{U} après la transformée de Fourier discrète (TFD) de taille M :

$$\mathbf{U} = \mathbf{CH} + \mathbf{W}, \quad (1)$$

où $\mathbf{H} = [H_0, H_1, \dots, H_{M-1}]^T$ (avec T l'opérateur transposition) est le vecteur contenant les échantillons fréquentiels du canal de Rayleigh, dont la densité de probabilité (ddp) est notée $p_r(|H_m| = r)$. Quel que soit $m = 0, \dots, M - 1$ on note $\sigma_r^2 = E\{H_m H_m^*\}/2$ la variance de H_m . On donne l'expression des éléments H_m , à partir de la réponse fréquentielle continue du canal :

$$H(f) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l e^{-2j\pi f \tau_l} \implies H_m = \sum_{l=0}^{L-1} h_l e^{-2j\pi \frac{\tau_l^e m}{M}}, \quad (2)$$

où L est le nombre de trajets du canal, $\tau_l^e = \tau_l f_e$ où f_e est la fréquence d'échantillonnage critique du système, et chaque h_l est un processus gaussien centré. Le vecteur $\mathbf{W} = [W_0, W_1, \dots, W_{M-1}]^T$ contient les échantillons du bruit additif gaussien. Pour étudier le seuil du taux d'erreur, on se place dans le cas limite où le RSB = $E\{|H_m C_m|^2\}/\sigma_h^2$ tend vers l'infini. $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ est la matrice diagonale composée des éléments C_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$ tirés d'une constellation donnée (une BPSK, ici) et des porteuses pilotes notées C_{m_p} . On considère que deux porteuses pilotes consécutives ont toujours le même espacement fréquentiel au sein d'un symbole OFDM. De plus, on suppose que cet espacement fréquentiel est inférieur à la bande de cohérence du canal.

2 Analyse statistique des erreurs d'interpolation

Comme on considère un RSB infini, l'estimation de canal selon le critère des moindres carrés au niveau des pilotes est parfaite, c'est-à-dire $\hat{H}_{m_p} = U_{m_p}/C_{m_p} = H_{m_p}$. On effectue alors une interpolation pour obtenir l'estimation de canal \hat{H}_m entre deux porteuses pilotes consécutives m_p et m_{p+1} . Cette interpolation est susceptible de créer une erreur $e_h(f)$ dont le module est noté ξ . On a donc :

$$\hat{H}(f) = H(f) + e_h(f) \implies \hat{H}_m = H_m + e_{h_m}, \text{ et} \quad (3)$$

$$\xi = |H(f) - \hat{H}(f)| \implies \xi_m = |H_m - \hat{H}_m|. \quad (4)$$

Il est possible de caractériser la distribution de ξ_m pour un grand nombre de méthodes d'interpolation.

Considérons par exemple une interpolation linéaire. Il est connu que pour une fonction g doublement continue (ou \mathcal{C}^2) dont la version interpolée entre deux points d'abscisse x_a et x_b est \hat{g} , on a, pour $x \in [x_a, x_b]$:

$$|g(x) - \hat{g}(x)| = \frac{1}{2} |(x_b - x)(x - x_a)| |g''(y)|, \quad (5)$$

avec $y \in [x_a, x_b]$. On obtient (5) directement, en utilisant le développement de Taylor en x avec la formule du reste de Taylor-Lagrange. D'après (2), on remarque que la version continue $H(f)$ de la réponse fréquentielle du canal est \mathcal{C}^2 . De plus, si $|H(f)|$ est un processus de Rayleigh, alors $|H''(f)|$ l'est aussi. Ce résultat est évident quand on exprime $H''(f)$:

$$H''(f) = -4\pi^2 \sum_{l=1}^{L-1} \tau_l^2 h_l e^{-2j\pi f \tau_l}, \quad (6)$$

qui est aussi un processus gaussien. On peut maintenant remplacer $g(x)$ par $H(f)$ en remplaçant (6) dans (5), et exprimer l'erreur $|\xi|$:

$$|\xi| = \frac{1}{2} |(f_b - f)(f_a - f)| \times |H''(\alpha)|, \quad (7)$$

où f_a et f_b sont les positions fréquentielles de deux pilotes consécutifs et $\alpha \in [f_a, f_b]$. Ainsi, $f_a - f$ est la distance fréquentielle entre un pilote et une porteuse. On définit aussi $\Delta_f = f_b - f_a$ l'espacement entre deux pilotes successifs. On admet dans un premier temps que la version discrète de l'expression de l'erreur d'interpolation suit la même loi que la version continue. Dans ce cas, on déduit que ξ_m suit une loi de Rayleigh et on note $p_\xi(\xi)$ sa ddp. On définit $\sigma_\xi^2 = E\{\xi^2\}/2$ sa variance, exprimée à partir de (7) :

$$\sigma_\xi^2 = |(f_b - f)(f_a - f)|^2 4\pi^4 \sum_{l=1}^{L-1} \tau_l^4 \sigma_l^2, \quad (8)$$

où $\sigma_l^2 = E\{h_l h_l^*\}/2$ est la variance de chaque trajet. De la même manière que pour le bruit de quantification [6], on peut alors définir l'erreur e_{h_m} comme un bruit d'interpolation gaussien et centré, caractérisé par le type d'interpolation choisi et par l'espacement entre pilotes Δ_f . De la même manière, on peut montrer que la plupart des techniques d'interpolation (moyenne glissante, cubique, spline etc.) engendrent une erreur d'interpolation qui peut être modélisée par une loi de Rayleigh mais avec des variances différentes.

Par exemple, pour une interpolation cubique par morceau utilisant comme base des polynôme de Lagrange, l'erreur d'interpolation est donnée par :

$$|H(f) - \hat{H}(f)| = \frac{1}{24} \left| \prod_{p=0}^3 (f - f_p) \right| \times |H^{(4)}(\alpha)|, \quad (9)$$

où f_p sont les positions fréquentielles de pilotes. Par analogie avec le développement précédent, on remarque que l'erreur $|\xi|$ calculée à partir de (9) suit une loi de Rayleigh dont on peut calculer la variance. Les développements suivant restent alors vrais quel que soit le type d'interpolation choisi, tant que l'erreur suit une loi de Rayleigh. On définit alors $p_{\xi|r}(\xi|r)$ la ddp de ξ conditionnellement à $r = |H_m|$. On sait que si ξ suit une loi de Rayleigh, on obtient alors la loi jointe $p_{r,\xi}(r, \xi)$ grâce à la formule donnée dans [1, 4] :

$$p_{r,\xi}(r, \xi) = \frac{r\xi}{\sigma_r^2 \sigma_\xi^2 (1 - \rho^2)} \exp\left(-\frac{\sigma_\xi^2 r^2 + \sigma_r^2 \xi^2}{2\sigma_r^2 \sigma_\xi^2 (1 - \rho^2)}\right) \times I_0\left(\frac{r\xi\rho}{\sigma_r \sigma_\xi (1 - \rho^2)}\right), \quad (10)$$

où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro, et ρ le coefficient de corrélation défini par $\rho = \frac{|E\{H(f)e_h^*\}|}{2\sigma_r \sigma_\xi}$. On déduit alors la ddp conditionnelle $p_{\xi|r}(\xi|r) = p_{r,\xi}(r, \xi)/p_r(r)$.

3 Analyse géométrique des erreurs d'interpolation

À l'entrée du détecteur de symboles (ici BPSK), pour une porteuse donnée m , on obtient l'estimation \hat{C}_m du symbole complexe C_m en appliquant une simple égalisation *zero forcing* (ou ZF), c'est à dire :

$$\hat{C}_m = \frac{U_m}{\hat{H}_m} = \frac{H_m}{H_m + e_{h_m}} C_m. \quad (11)$$

Contrairement aux études classiques telles que [5, 7] dans lesquelles les erreurs sont additives (i.e. $\hat{C}_m = C_m + \epsilon$, où ϵ est l'erreur), on étudie ici une erreur multiplicative. Selon la constellation choisie, les conditions de bonne ou mauvaise décision ne sont pas les mêmes. Dans la suite de l'article, on prend pour exemple une BPSK. Dans ce cas $C_m = \pm 1$, et la condition de mauvaise décision notée \mathcal{K}_1 est donnée par $\mathcal{K}_1 : C_m \Re\{\hat{C}_m\} \leq 0$. Si on note \bar{C} le symbole en sortie de détecteur, alors on a une bonne décision si $\bar{C}_m = C_m$, et une mauvaise décision si $\bar{C}_m \neq C_m$. Dans le cas simple d'une BPSK, si on écrit l'erreur e_h sous la forme $e_h = \xi e^{j\Theta_\xi}$ et l'estimée du canal \hat{H}_m sous la forme $\hat{H}_m = r e^{j\Theta_H}$, on donne à partir de (11), la probabilité de mauvaise décision $\mathbb{P}(\mathcal{K}_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{K}_1) &= \mathbb{P}(C_m \Re\{\hat{C}_m\} \leq 0) \\ &= \mathbb{P}\left(\Re\left\{\frac{r e^{j\Theta_H} (r e^{-j\Theta_H} + \xi e^{-j\Theta_\xi})}{|H(f) + e_h|^2}\right\} \leq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{r^2 + r\xi \cos(\Theta_H - \Theta_\xi)}{|H(f) + e_h|^2} \leq 0\right) \end{aligned} \quad (12)$$

On note dans (12) que le dénominateur $|H(f) + e_h|^2$ est toujours positif. On restreint donc l'étude au numérateur : $\mathbb{P}(r^2 + r\xi \cos(\Theta_H - \Theta_\xi) \leq 0)$. Quelle que soit la valeur de r, ξ et Θ_ξ , la résolution de (12) est indépendante de Θ_H . Si $\xi \leq r$, l'inéquation $r^2 + r\xi \cos(\Theta_H - \Theta_\xi) \leq 0$ n'a pas de solution. Si $\xi \geq r$, le domaine des solutions de l'inéquation $r^2 + r\xi \cos(\Theta_H - \Theta_\xi) \leq 0$ est $\{\Theta_\xi | \Theta_\xi \in [-\arccos(-\frac{r}{\xi}), \arccos(-\frac{r}{\xi})]\}$. On exprime finalement $\mathbb{P}(\mathcal{K}_1)$ en fonction de r et ξ :

$$\mathbb{P}(\mathcal{K}_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq r \\ \frac{\arccos(-\frac{r}{\xi})}{\pi}, & \text{si } \xi \geq r. \end{cases} \quad (13)$$

À partir de la densité de probabilité conditionnelle $p_{\xi|r}(\xi|r)$ et de (13), on déduit la fonction $f_{\xi|r}(\xi|r, \bar{C}_m \neq C_m)$ qui exprime une densité de probabilité d'erreur d'interpolation, conditionnellement à ce que ces erreurs créent une erreur de décision. Pour une BPSK, on exprime $f_{\xi|r}(\xi|r, \bar{C}_m \neq C_m)$:

$$f_{\xi|r}(\xi|r, \bar{C}_m \neq C_m) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathcal{K}_1) \times p_{\xi|r}(\xi|r) = 0, & \text{si } \xi \leq r \\ \mathbb{P}(\mathcal{K}_1) \times p_{\xi|r}(\xi|r) = \frac{\arccos(-\frac{r}{\xi})}{\pi} p_{\xi|r}(\xi|r), & \text{si } \xi \geq r. \end{cases} \quad (14)$$

En intégrant (14) sur \mathbb{R}^+ , on obtient la probabilité d'erreur conditionnellement à la valeur r du module du canal. Il faut

donc prendre en compte la ddp $p_r(r)$ dans le calcul de la probabilité d'erreur seuil \mathbb{P}_E^{seuil} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_E^{seuil} &= \int_0^{+\infty} p_r(r) \int_0^{+\infty} f_{\xi|r}(\xi|r, \bar{C}_m \neq C_m) d\xi dr \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{K}_1) p_{r,\xi}(r, \xi) d\xi dr. \end{aligned} \quad (15)$$

La valeur \mathbb{P}_E^{seuil} est le seuil pris par la courbe de TEB. Pour des constellations d'ordres supérieurs, on peut facilement étendre la méthode de calcul proposée du seuil de TEB, en séparant l'étude sur les domaines de décision des bits de poids faible (ou LSB) et des bits de poids fort (ou MSB), comme cela est fait dans [5, 7].

4 Résultats de simulations

Dans cette section, l'analyse faite précédemment est validée par simulation, étape par étape. Pour cela, on simule un signal OFDM composé de $M = 241$ porteuses dont les symboles sont mappés avec une BPSK. On a fixé $M = 241$ pour faciliter les simulations, mais les résultats restent valides quels que soient la taille de la TFD. Les gains h_l et retards τ_l^e du canal simulé sont respectivement $[1, 0.5, 0.4, 0.2]$ et $[0, 6, 13, 16]$. Ainsi, on obtient $\sigma_r^2 = 2.5$, $\sigma_\xi^2 = 0.0029$ et $\rho = 0.273$. L'interpolation utilisée est linéaire.

La figure 1 illustre l'allure de la fonction de ddp conditionnelle $p_{\xi|r}(\xi|r)$ pour $\Delta_f = 2$. Pour une raison de clarté, on ne montre pas directement la ddp $p_{\xi,r}(\xi, r)$, mais $p_{\xi|r}(\xi|r)$ pour deux valeurs de r différentes ($r = 0.1$ et $r = 4$). On observe que les courbes obtenues par simulation et celles issues de l'analyse théorique se superposent, ce qui permet donc de valider l'étude réalisée dans la partie 2. Plus précisément, les erreurs ξ suivent effectivement une loi de Rayleigh, dont la variance est donnée par (8).

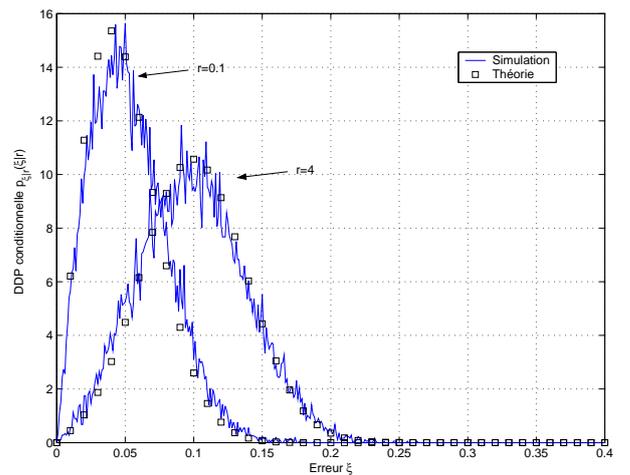


FIGURE 1 – Fonction de densité de probabilité conditionnelle $p_{\xi|r}(\xi|r)$, avec $\Delta_f = 2$.

La figure 2 a pour but de valider l'analyse géométrique des erreurs d'interpolation. Pour reproduire les conditions de l'équation (11), on a simulé indépendamment 10^6 variables aléatoires H_m tel que $r = |H_m| = 1$ et 10^6 erreurs e_{h_m} suivant un processus gaussien centré de variance 1. La ddp $p_{\xi|r}(\xi|r)$ suis donc une loi de Rayleigh. La figure 2 compare les courbes correspondant à (14) tracées analytiquement et par simulation. On remarque que les courbes se superposent, ce qui valide l'analyse géométrique des erreurs.

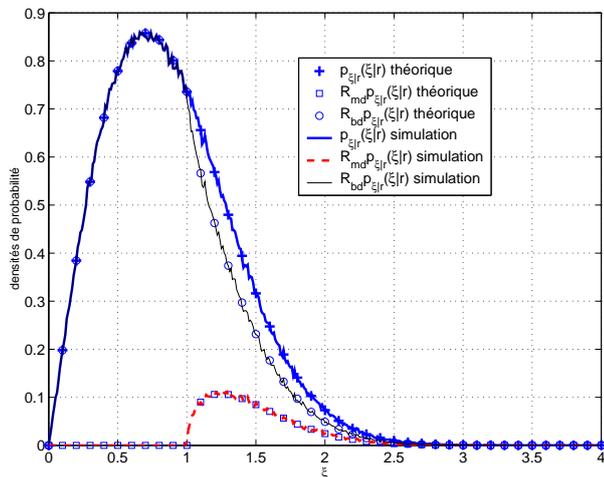


FIGURE 2 – Densité d'erreur d'interpolation conditionnelle $p_{\xi|r}(\xi|r)$ et fonctions extraites $\mathbb{P}(\mathcal{K}_1) \times p_{\xi|r}(\xi|r)$ et $(1 - \mathbb{P}(\mathcal{K}_1)) \times p_{\xi|r}(\xi|r)$.

La figure 3 montre les courbes de TEB en fonction du RSB (en dB), pour une plage de RSB de -10 à 40 dB, ce qui permet de remarquer l'effet de seuil du taux d'erreur. De plus, deux valeurs d'écart fréquentiel entre pilotes $\Delta_f = 2$ et $\Delta_f = 4$ sont considérées. La valeur théorique du seuil est calculée analytiquement pour chaque cas au moyen de (15). Premièrement, on remarque que les courbes de TEB atteignent le seuil calculé analytiquement. De plus, on vérifie que pour une technique d'interpolation fixée (ici linéaire), plus l'écart entre pilotes est grand, et plus le seuil d'erreur est élevé.

5 Conclusion

Dans cet article, une analyse des erreurs d'interpolation dans l'estimation de canal de Rayleigh dans un contexte OFDM a été proposée. Cette analyse permet de mesurer théoriquement la valeur du seuil d'erreur atteint par les courbes de TEB pour un fort RSB. En effet, pour des interpolations de type linéaire, cubique ou encore spline, les erreurs suivent aussi une loi de Rayleigh. Dans ces conditions, il est alors possible de mesurer le seuil atteint en fonction du type d'interpolation choisi, de l'écart fréquentiel entre porteuses pilote et d'une analyse géométrique dépendant de la constellation choisie. Les résultats de simulations valident les différentes analyses. Il sera possible d'étendre l'étude à d'autres types d'interpolation et de constellations de plus grandes tailles.

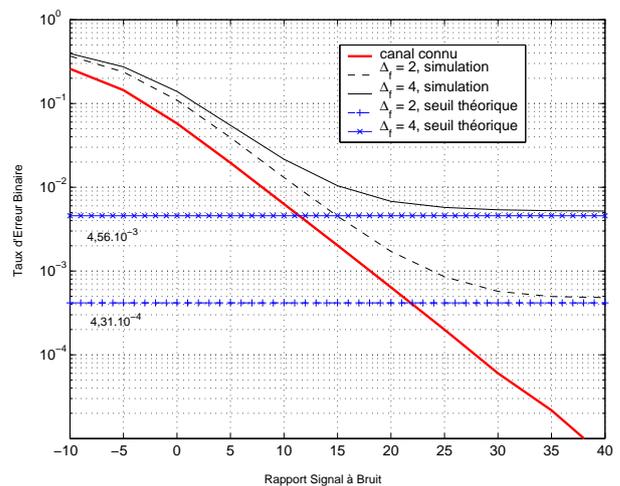


FIGURE 3 – TEB en fonction du RSB, pour différentes valeurs Δ_f , et seuil de taux d'erreur théorique.

Références

- [1] Y. A. Chau et K. Y.-T. Huang, "On the Second-Order Statistics of Correlated Cascaded Rayleigh Fading Channels," *International Journal of Antennas and Propagation*, June 2012.
- [2] S. Coleri, M. Ergen, A. Puri, et A. Bahai, "A Study of Channel Estimation in OFDM Systems," dans *Vehicular Technology Conference*, volume 2, septembre 2002, pages 894–898.
- [3] X. Dong, W.-S. Lu, et A. Soong, "Linear Interpolation in Pilot Symbol Assisted Channel Estimation for OFDM," *IEEE Trans. on wireless Communications*, volume 6, numéro 5, pages 1910 – 1920, May 2007.
- [4] M. K. Simon, *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables : A Handbook For Engineers and Scientists*. Springer, 2006.
- [5] X. Tang, M.-S. Alouini, et A. J. Goldsmith, "Effect of Channel Estimation Error on M-QAM BER Performance in Rayleigh Fading," *IEEE Trans. on Communications*, volume 47, numéro 12, pages 1856 – 1864, December 1999.
- [6] B. Widrow, "Statistical analysis of amplitude-quantized sampled-data systems," *Transactions of the AIEE*, volume 79, numéro 6, pages 555 – 568, January 1961.
- [7] C.-H. Yih, "Effects of Channel Estimation Error in the Presence of CFO on OFDM BER in Frequency-Selective Rayleigh Fading Channels," *Journal of Communications*, volume 3, numéro 3, pages 10 – 18, July 2008.