

# Coefficients dominants de la Transformée hyperbolique en ondelettes 2D :

## Application à l'analyse de textures invariantes d'échelle, multifractales et anisotropes

S.G. ROUX<sup>1</sup>, B. VEDEL<sup>3</sup>, S. JAFFARD<sup>4</sup>, P. ABRY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

<sup>3</sup>Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, UMR 6205, CNRS, Université de Bretagne, Vannes.

<sup>4</sup>LAMA, CNRS, UMR 8050, Université Paris Est Créteil.

stephane.roux@ens-lyon.fr, beatrice.vedel@univ-ubs.fr, stephane.jaffard@u-pec.fr,  
patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – Elaborant sur des travaux précédents dédiés à l'analyse de champs aléatoires 2D (ou textures d'images) caractérisés conjointement par des propriétés d'autosimilarité et d'anisotropie [11, 1, 10], nous nous intéressons, dans cette contribution, au cas où l'invariance d'échelle des textures d'images est bien décrite par des propriétés multifractales anisotropes. Nous proposons tout d'abord un modèle possédant des propriétés conjointes d'anisotropie et de multifractalité. Nous proposons ensuite une généralisation de la définition des coefficients dominants à la transformée hyperbolique en ondelettes ainsi qu'une généralisation de l'analyse multifractale permettant d'estimer conjointement le paramètre d'anisotropie et le spectre multifractal.

**Abstract** – Expanding a recent work on the study of anisotropic self-similar processes [11, 1, 10], the focus here is on the analysis of processes with anisotropic multifractal properties. We first propose a model of anisotropic multifractal processes. Then we generalize the definition of leader coefficients to the hyperbolic wavelet transform. We then propose a methodology for the joint estimation of the anisotropy and the multifractal spectrum. We also show that classical analysis based on the dyadic wavelet transform fails to estimate this multifractal spectrum.

## 1 Motivations et objectifs

Dans de multiples applications, la texture de l'image à analyser est bien caractérisée à la fois par des propriétés d'invariance d'échelle et d'anisotropie (cf. e.g., [12]). Dans de précédents travaux, nous nous sommes intéressés d'une part, à l'analyse de textures multifractales isotropes [13], d'autre part à celle de textures autosimilaires anisotropes [11, 1, 10]. Nous combinons ici ces deux approches pour étudier les textures multifractales anisotropes. Nous montrons comment estimer correctement les paramètres multifractals de manière robuste, et ce même en présence d'anisotropie.

## 2 Processus multifractal anisotrope

Combinant les définitions des marches aléatoires multifractales multidimensionnelles introduites par exemple dans [9], comme extension du cas 1D (cf. e.g., [2]), et celles des processus auto-similaires anisotropes proposés par exemple dans [4], nous proposons la définition d'une marche aléa-

toire multifractale anisotrope 2D comme processus modèle pour l'étude de textures multifractales anisotropes :

$$X_{\alpha_0, H_0, \lambda}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{i\langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle} - 1)}{\|\underline{\xi}\|_{2, \alpha_0}^{(H_0+1)}} F(\underline{\xi}) d\widehat{W}(\underline{\xi}), \quad (1)$$

où  $\underline{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $d\widehat{W}(\underline{\xi})$  représente une mesure de Wiener et où  $\|\underline{x}\|_{2, \alpha_0} = \sqrt{|x_1|^{2/\alpha_0} + |x_2|^{2/(2-\alpha_0)}}$  est une pseudo-norme anisotrope au sens où elle vérifie la relation  $\|a^{E_0} \underline{x}\|_{2, \alpha_0} = a \|\underline{x}\|_{2, \alpha_0}$  avec  $a^{E_0} = \begin{pmatrix} a^{\alpha_0} & 0 \\ 0 & a^{2-\alpha_0} \end{pmatrix}$ .

Le terme  $F(\underline{\xi})$  correspond à la transformée de Fourier  $e^{\omega(\underline{x})}$  de l'exponentielle d'un processus aléatoire gaussien stationnaire  $\omega$ , dont la fonction de covariance est définie par  $\text{cov}(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y})) = \lambda^2 \log(1/\|\underline{x} - \underline{y}\|_{2, \alpha_0})$ . Le paramètre  $\lambda$  qui entre dans la définition de cette covariance contrôle les propriétés multifractales de  $X_{\alpha_0, H_0, \lambda}$ . On y fait souvent référence en parlant de paramètre d'écart à la monofractalité, de multifractalité ou d'intermittence. Quand  $\lambda \rightarrow 0$ , le bruit gaussien,  $\omega$ , se décorrèle ainsi que  $e^\omega$ . Le modèle devient alors monofractal et est équivalent au processus

défini par (1) avec  $F(\xi) = 1$ . Le processus  $X_{\alpha_0, H_0}(\underline{x})$  est alors gaussien autosimilaire anisotrope suivant la relation [4]

$$\{X_{\alpha_0, H_0}(a^{E_0} \underline{x})\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^{H_0} X_{\alpha_0, H_0}(\underline{x})\}, \quad (2)$$

$\forall a > 0$  et  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\alpha_0 = 1$  le processus est isotrope avec un exposant de régularité classique  $h(\underline{x}_0) = H_0$ . On rappelle que l'exposant  $h(\underline{x}_0)$  est défini comme le supremum des  $s$  tel qu'il existe  $C > 0$  et un polynôme  $P_{\underline{x}_0}$  de degré inférieur ou égal à  $s$  vérifiant :

$$|X_{\alpha_0, H_0}(\underline{x}) - P_{\underline{x}_0}(\underline{x})| \leq C \|\underline{x} - \underline{x}_0\|_2^s. \quad (3)$$

Si  $\alpha_0 \neq 1$  alors l'exposant de régularité anisotrope  $h_{\alpha_0}(\underline{x}_0)$  se définit en remplaçant l'équation (3) par (cf. [3]) :

$$|X_{\alpha_0, H_0}(\underline{x}) - P_{\underline{x}_0}(\underline{x})| \leq C \|\underline{x} - \underline{x}_0\|_{2, \alpha_0}^s, \quad (4)$$

où  $P_{\underline{x}_0}$  est un polynôme de la forme

$$P(x_1, x_2) = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2} a_{\beta_1, \beta_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}.$$

L'équation (1), avec  $\lambda > 0$  ( $F(\xi) \neq 1$ ), permet d'obtenir un processus multifractal anisotrope au sens où  $h_{\alpha_0}(\underline{x}_0)$  dépend de  $\underline{x}_0$ . Le spectre multifractal anisotrope se définit, comme dans le cas isotrope, par

$$D_{\alpha_0}(h) = d_H(\{\underline{x} \mid h_{\alpha_0}(\underline{x}) = h\}). \quad (5)$$

qui à tout  $h$ , associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points  $\underline{x}$  qui vérifient  $h_{\alpha_0}(\underline{x}) = h$ . Comme pour les marches aléatoires multifractales isotropes [9], un spectre multifractal de la forme suivante est attendu :

$$D_{\alpha_0}(h) = 2 - (h - H_0 - \lambda^2)^2 / \lambda^2$$

et, par transformée de Legendre,

$$\tau_{\alpha_0}(q) = qH_0 - \lambda^2 q(q-2)/2.$$

### 3 Analyse et estimation

Grâce à l'usage conjoint de deux facteurs de dilatation différents pour les axes horizontaux et verticaux  $(j_1, j_2)$ , la transformée hyperbolique en ondelettes 2D permet l'analyse de processus anisotropes [11]. En effet, le comportement des coefficients en ondelettes hyperbolique le long des directions  $(\alpha j, (2-\alpha)j)$  permet d'analyser les propriétés multifractales du processus suivant toutes les directions d'anisotropie  $\alpha$  possibles et de déterminer la valeur de  $\alpha$  la mieux adaptée à l'image. Une généralisation des coefficients dominants [6, 13] est alors proposée pour permettre une estimation conjointe du paramètre d'anisotropie et du spectre multifractal  $D_{\alpha_0}(h)$  et  $\tau_{\alpha_0}(q)$ .

#### 3.1 Transformée hyperbolique

La transformée hyperbolique 2D en ondelettes est obtenue comme produit tensoriel d'une base d'ondelettes,

issue d'une analyse multirésolution 1D, avec elle-même (cf. e.g., [8]). Si on note  $\varphi, \psi$  respectivement la fonction d'échelle et l'ondelette mère (ici Daubechies 3) de la transformée en ondelettes orthogonale 1D. On définit alors pour  $\underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$  la collection de fonctions :

$$\begin{aligned} \psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \psi(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi(2^{j_2} x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \varphi(x_1 - k_1) \psi(2^{j_2} x_2 - k_2), \\ \psi_{j_1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \psi(2^{j_1} x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \varphi(x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \end{aligned}$$

qui forment une base de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sous-jacente à la HWT (cf. [5]). Les coefficients (en norme  $L_1$ ) de la HWT de l'image  $X$  se définissent alors par

$$d_X(\underline{j}, \underline{k}) = 2^{(j_1+j_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\underline{j}, \underline{k}}(x_1, x_2) X(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$\forall \underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $\underline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Contrairement aux coefficients en ondelettes de la transformée 2D classique (2D-DWT), ces coefficients  $d_X(\underline{j}, \underline{k})$  dépendent de deux échelles d'analyse  $2^{j_1}, 2^{j_2}$  différentes selon les axes horizontaux et verticaux de l'image. De manière pratique, une itération de la HWT d'une image de taille  $N \times N$  s'obtient en combinant une itération de l'algorithme 2D-DWT (donnant 4 sous bandes HH, HL, LH et LL) à  $N/2$  1D-DWT pour chaque ligne de la sous-bande LH et à  $N/2$  1D-DWT pour chaque colonne de la sous-bande HL.

#### 3.2 Coefficients dominants

Pour l'analyse multifractale isotrope, l'apport des coefficients dominants a été démontré des points de vue théorique et pratique [6, 13]. Nous proposons ici une généralisation de la définition des coefficients dominants à la transformée hyperbolique en ondelettes.

Pour tous  $(\underline{j}, \underline{k})$ , introduisons  $\lambda(\underline{j}, \underline{k})$  le rectangle dyadique hyperbolique [1]

$$\lambda = \lambda(\underline{j}, \underline{k}) = ]\frac{k_1}{2^{j_1}}, \frac{k_1+1}{2^{j_1}}] \times ]\frac{k_2}{2^{j_2}}, \frac{k_2+1}{2^{j_2}}], \quad (6)$$

et dénotons l'union de 9 tels intervalles voisins par

$$3\lambda_{\underline{j}}(x_0) = ]\frac{2^{j_1} k_1 - 1}{2^{j_1}}, \frac{2^{j_1} k_1 + 2}{2^{j_1}}] \times ]\frac{2^{j_2} k_2 - 1}{2^{j_2}}, \frac{2^{j_2} k_2 + 2}{2^{j_2}}].$$

A partir des coefficients  $d_X(\underline{j}, \underline{k})$ , on définit les coefficients dominants par

$$L_X(\underline{j}, \underline{k}) = \sup_{\lambda' \subset 9\lambda_{\underline{j}}(\underline{k})} |d_X(\lambda')|, \quad (7)$$

où  $d_X(\lambda)$  est une notation raccourcie de  $d_X(\underline{j}, \underline{k})$ . Notons que ce supremum est fini dès que  $X$  est bornée. En termes pratiques, le coefficient dominant,  $L_X(\underline{j}, \underline{k})$  remplace le coefficient en ondelette  $d_X(\underline{j}, \underline{k})$  par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi tous les coefficients en ondelettes dans un voisinage spatial de  $\underline{k}$  à toutes les échelles  $2^{\underline{j}'} = (2^{j'_1}, 2^{j'_2})$  telles que  $j'_1 \leq j_1$  et  $j'_2 \leq j_2$ .

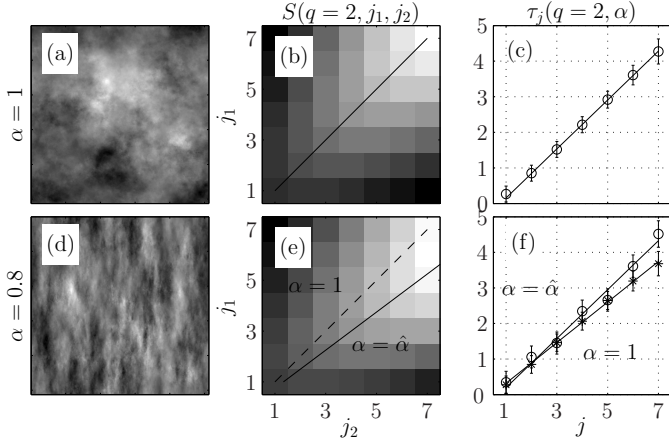


FIG. 1 – **Analyse.** (a-c) processus isotrope ( $\alpha = 1$ ); (d-f) processus anisotrope avec  $\alpha = 0.8$ . (a)-(d) une réalisation du processus; (b)-(e)  $S(q = 2, j_1, j_2)$ ; la ligne continue représente l'anisotropie  $\alpha = \hat{\alpha}$  et la ligne pointillée  $\alpha = 1$ ; (c)-(e) régression linéaire de  $\tau_j(q = 2, \alpha)$  vs  $j$  pour  $\alpha = \hat{\alpha}$  (o) et  $\alpha = 1$  (\*).

Pour  $j_1 = j_2$ , la définition obtenue par (7) est proche de celle des coefficients dominants définis à partir de la transformée en ondelettes 2D classique. La différence vient du fait que, dans la définition classique, le maximum est pris dans le même voisinage spatial mais pour les échelles  $2^{j'}$  avec ( $j'_1 \leq j_1, \forall j'_2$ ) et ( $\forall j'_1, j'_2 \leq j_2$ ).

On peut montrer que, si  $X$  possède un exposant de régularité anisotrope  $h_{\alpha_0}(\underline{x}_0) > 0$ , alors, pour  $\underline{k}$  voisin de  $\underline{x}_0$ , on a [1, 11] :

$$L_X(\underline{j}, \underline{k}) \leq 2^{-h_{\alpha_0}(\underline{x}_0) \max(\frac{j_1}{\alpha}, \frac{j_2}{2-\alpha})}, \quad (8)$$

**Pseudo integration fractionnaire.** La définition des coefficients dominants hyperboliques, qui repose sur la recherche d'un maximum à toutes les échelles plus petites, ceci suivant l'axe horizontal ou vertical, est très sensible aux effets de taille finie. Nous proposons pour minimiser ces effets de définir les coefficients dominants à partir d'une intégrée fractionnaire d'ordre  $\beta$  de l'image originale. De manière pratique, cette intégration fractionnaire est faite directement dans l'espace ondelette, c'est à dire en remplaçant les coefficients en ondelettes par [13]

$$d'_X(\underline{j}, \underline{k}) = 2^{\frac{(j_1+j_2)\beta}{2}} d_X(\underline{j}, \underline{k}), \quad (9)$$

et la définition des coefficients dominants par

$$L_X(\underline{j}, \underline{k}) = 2^{-\frac{(j_1+j_2)\beta}{2}} \sup_{\lambda' \subset 3\lambda_{j_1, j_2}(\underline{k})} |d'_X(\lambda')|. \quad (10)$$

Cette définition permet de généraliser l'équation (8) pour les exposants  $h_{\alpha_0}(\underline{x}_0)$  négatifs tels que  $\beta > 0 > h_{\alpha_0}(\underline{x}_0)$  [7].

### 3.3 Estimation

Pour l'analyse des propriétés d'invariance d'échelle, nous étendons aux paires d'échelles  $(j_1, j_2)$ , la définition des

fonctions de partition (ou de structure) classiquement définies avec la transformée discrète en ondelettes 2D pour une seule échelle [13] :

$$S(q, j_1, j_2) = \frac{1}{N_{j_1, j_2}} \sum_{(\underline{k}) \in \mathbb{Z}^2} L_X(\underline{j}, \underline{k})^q, \forall q \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

où  $N_{j_1, j_2}$  est le nombre de coefficients disponibles aux échelles  $(j_1, j_2)$ . Le comportement en loi de puissance de cette quantité dans la direction  $(\alpha j, (2-\alpha)j)$ ,  $0 < \alpha < 2$ , quand  $j$  tend vers 0 définit le spectre  $\tau(q, \alpha)$  :

$$S(q, \alpha j, (2-\alpha)j) \sim 2^{-\frac{j}{\alpha} \tau(q, \alpha)}. \quad (12)$$

Pour chaque valeur de  $q$ , on définit les estimateurs :

$$\hat{\alpha}_q = \operatorname{argmax}_{\alpha} \tau(q, \alpha), \quad (13)$$

$$\hat{\tau}(q) = \tau(q, \hat{\alpha}_q). \quad (14)$$

Pour le modèle défini par (1) avec  $\lambda = 0$ , c'est à dire dans le cas monofractal, la convergence asymptotique de ces deux estimateurs est prouvée dans [1, 11] ; puisque :

$$\mathbb{E}(|L_X(\underline{j}, \underline{k})|^q) \approx 2^{\frac{(j_1+j_2)q}{2}} 2^{-q(H_0+1) \max(\frac{j_1}{\alpha_0}, \frac{j_2}{2-\alpha_0})}. \quad (15)$$

Dans le cas multifractal ( $\lambda > 0$ ), on obtient :

$$\mathbb{E}(|L_X(\underline{j}, \underline{k})|^q) \approx 2^{\frac{(j_1+j_2)q}{2}} 2^{-(\tau_{\alpha_0}(q)+q) \max(\frac{j_1}{\alpha_0}, \frac{j_2}{2-\alpha_0})}. \quad (16)$$

En utilisant la faible corrélation des coefficients dominants de la HWT on écrit que  $S(q, j_1, j_2) \approx \mathbb{E}(|L_X(\underline{j}, \underline{k})|^q)$  et en choisissant des échelles  $(j_1, j_2) = (\alpha j, (2-\alpha)j)$  on obtient :

$$S(q, \alpha j, (2-\alpha)j) \approx 2^{\frac{j}{\alpha} (q - (\tau_{\alpha_0}(q)+q) \max(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0}))}. \quad (17)$$

Le spectre  $\tau(q, \alpha) = (q - (\tau_{\alpha_0}(q)+q) \max(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0}))$  est bien maximal en  $\alpha = \alpha_0$  et on a  $\tau(q, \alpha_0) = \tau_{\alpha_0}(q)$  ce qui justifie la définition des estimateurs (13) et (14). On estime alors  $\hat{D}(h)$  par transformée de Legendre de  $\hat{\tau}(q)$ .

## 4 Résultats

Pour différentes valeurs des paramètres  $(\alpha_0, H_0, \lambda^2)$ , on génère 100 réalisations de taille  $1024 \times 1024$  du processus défini par (1). Pour chaque réalisation, on effectue les étapes suivantes, illustrées dans la figure 1 pour un processus multifractal ( $H_0 = 0.7, \lambda^2 = 0.025$ ) isotrope ( $\alpha_0 = 1$ , Fig. 1 a-c), et anisotrope ( $\alpha_0 = 0.8$ ), Fig. 1 d-f) :

- 1 on calcule les coefficients dominants de la transformée hyperbolique en ondelettes ainsi que les fonctions de structure  $S(q, j_1, j_2)$  (Eq. 11) pour toutes les échelles  $(j_1, j_2)$  accessibles et pour différentes valeurs de  $q \in \mathbb{R}$  (cf. Fig 1 b-e).
- 2 On interpole ensuite  $S(q, j_1, j_2)$  au points  $(\alpha j, (2-\alpha)j)$  pour toutes les valeurs  $\alpha$  qui relient au moins deux points tels que  $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ . Par régression linéaire de  $\log_2(S(q, \alpha j, (2-\alpha)j))$  versus  $j$ , on obtient  $\tau(q, \alpha)$  (cf. Fig 1 c-f).

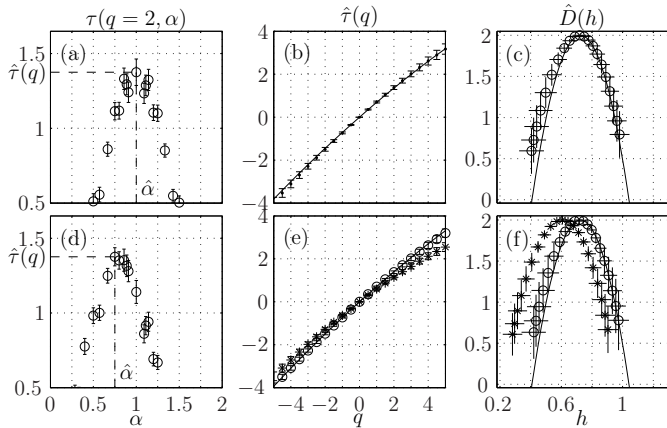


FIG. 2 – (a-c) processus isotrope ( $\alpha = 1$ ); (d-f) processus anisotrope avec  $\alpha = 0.8$ . (a)-(d)  $\tau(q = 2, \alpha)$  vs  $\alpha$ . Les lignes discontinues correspondent à  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\tau}(q = 2)$ ; (b)-(e) spectre  $\hat{\tau}(q)$  obtenu pour  $\alpha = \hat{\alpha}$ ; (c)-(f) spectre multifractal  $\hat{D}(h)$  obtenu suivant  $\hat{\alpha}$  (o) et  $\alpha = 1$  (\*). Les lignes continues représentent les spectres théoriques.

3 Pour chaque valeur de  $q$ , on détermine la position du maximum de  $\tau(q, \alpha)$  qui nous donne les estimés  $\hat{\alpha}_q$  et  $\hat{\tau}(q)$ . La transformée de Legendre de  $\hat{\tau}(q)$  nous donne alors  $\hat{D}(h)$ .

La figure 2 a-d, représente la moyenne et l'écart type sur le nombre de réalisations de  $\hat{\tau}(q = 2, \alpha)$ . Cette courbe présente clairement un maximum en  $\alpha = 1$  dans le cas isotrope (Fig. 2 a) et  $\alpha \neq 1$  dans le cas anisotrope (2 d). L'estimation de  $\hat{\alpha}_q$  ne dépend que très faiblement de la valeur de  $q$  quand  $\alpha_0 \neq 1$  ( $\langle \hat{\alpha}_q \rangle_q = 0.76$ ). L'estimation de  $\hat{\tau}(q) = \hat{\tau}(q, \hat{\alpha}_q)$  en fonction de  $q$  ainsi que la fonction  $\tau(q)$  théorique sont présentées figure 2 b-e. Les transformées de Legendre de  $\hat{\tau}(q)$  et  $\tau(q)$  sont présentées figure 2 c-f. Ces figures montrent des performances d'estimation très satisfaisantes et ceci même en présence d'anisotropie. Pour comparaison, nous avons représenté, Fig. 2 e-f, l'estimation des spectres multifractals obtenus en utilisant les coefficients dominants de la transformée en ondelettes 2D classique [13]. Cette estimation, qui présente pourtant la même forme parabolique, est clairement biaisée en présence d'anisotropie. Le maximum du spectre  $D(h)$  ainsi que sa largeur diminuent quand  $|\alpha - \alpha_0|$  augmente : l'image paraît donc plus irrégulière et moins multifractale par une analyse classique isotrope.

## 5 Conclusion et perspectives

Les résultats obtenus ici montrent clairement les avantages de l'utilisation des coefficients dominants de la transformée hyperbolique en ondelettes pour l'analyse de processus qui présente des propriétés conjointes d'anisotropie et de multifractalité. La méthodologie présentée généralise l'analyse multifractale classique et permet non seulement d'estimer les spectres multifractals dans leur totalité mais

aussi d'estimer le paramètre d'anisotropie.

## Références

- [1] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S.G. Roux, and B. Vedel, *Hyperbolic wavelet transform : an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures*, arXiv :1210.1944 (2012).
- [2] E. Bacry, J. Delour, and J. R. Muzy, *Multifractal random walk*, Physical Review E **64** (2001), no. 2, 026103.
- [3] M. Ben Slimane and Ben Braïek, *Directional and anisotropic regularity and irregularity criteria in triebel wavelet bases*, Journal of Fourier Analysis and Applications **18** (2012), no. 5, 893–914.
- [4] H. Biermé, M.M. Meerschaert, and H.P. Scheffler, *Operator scaling stable random fields.*, Stoch. Proc. Appl. **117** (2009), no. 3, 312–332.
- [5] R. A. DeVore, S. V. Konyagin, and V. N. Temlyakov, *Hyperbolic wavelet approximation*, Constr. Approx. **14** (1998), 1–26.
- [6] S. Jaffard, *Wavelet techniques in multifractal analysis*, Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72(2), AMS, 2004, pp. 91–152.
- [7] S. Jaffard, P. Abry, S.G. Roux, B. Vedel, and H. Wendt, *The contribution of wavelets in multifractal analysis*, Proceedings of the ISFMA summer school on wavelets and their applications, Zuhai, China, 2008.
- [8] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [9] R. Robert and V. Vargas, *Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields*, Communications In Mathematical Physics **284** (2008), no. 3, 649–673.
- [10] S.G. Roux, M. Clausel, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry, *Transformé hyperbolique en ondelettes 2d pour la caractérisation d'images autosimilaires anisotropes*, XXIII colloque sur le Traitement du Signal et des Images GRETSI, Bordeaux, France, 5–8 Sep. 2011.
- [11] ———, *Self-similar anisotropic texture analysis : the hyperbolic wavelet transform contribution*, Transaction on Image Processing (2013), accepté.
- [12] D. Schertzer and S. Lovejoy, *Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades*, J. Geophys. Res. **92** (1987), 9693–9714.
- [13] H. Wendt, S.G. Roux, S. Jaffard, and P. Abry, *Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images*, Signal Processing **89** (2009), no. 6, 1100–1114.