Simulation de vagues non-linéaires à l'aide de processus Laplace moyenne mobile.

Marc PREVOSTO, Nicolas RAILLARD

IFREMER
Technopôle de Brest, Pointe du Diable, 29280 Plouzané
marc.prevosto@ifremer.fr, nicolas.raillard@ifremer.fr

Thème – Signaux & Images en Océanographie

Problème traité – Simulation de processus non-linéaires à l'aide de processus Laplace Moyenne Mobile

Originalité – Ces travaux s'intéressent à l'estimation des paramètres d'un processus $\mathcal{LMA}$ dans le cas où les données présentent de fortes dissymétries haut-bas ainsi qu'une irréversibilité temporelle. L'originalité de ce papier concerne la nouvelle méthode d'estimation du noyau qui était jusqu'a présent uniquement considéré symétrique.

Résultats – Ce papier montre l'amélioration de l'ajustement du $\mathcal{LMA}$ quand les relations de phases sont prises en compte pour l'estimation du noyau. Nous montrons en particulier que la méthode proposée permet de retrouver les dissymétries du processus, ce que ne permet pas le noyau symétrique utilisé dans les études précédentes.

1 Introduction

Les structures marines, telles que les systèmes de récupération de l'énergie des vagues (SREV), sont soumis à des contraintes liées aux vagues. En eau peu profonde et avec une bathymétrie variable, ces vagues ont un comportement fortement non-linéaire, avec en particulier des dissymétries crêtes-creux et avant-arrière. Pour étudier les propriétés statistiques du comportement dynamique du système, comme par exemple les probabilités d'évènements extrêmes pour juger de la fiabilité, de longues séries temporelles de vagues sont nécessaires. Les modèles numériques d'hydrodynamique pour simuler de telles vagues existent, mais sont très demandeurs en temps de calcul dans une telle situation.

L'objectif de cette étude est de montrer comment l'utilisation de modèles basés sur les processus de Laplace moyenne mobile (en anglais Laplace Moving Average process, ou $\mathcal{LMA}$, voir p.e. [3] et [1]) peuvent répondre à cette problématique, comment leurs paramètres peuvent êtres ajustés à un grand nombre de situation d'états de mers (formes spectrales et paramètres spectraux) et de bathymétrie (profondeur d'eau, pente du fond) qu'une structure côtière peut rencontrer durant son cycle de vie.

2 Modélisation par processus Laplace Moyenne Mobile

2.1 Description du modèle

Définition (Distribution de Laplace Généralisée). *Soient X une variable aléatoire réelle, et $\delta, \mu \in \mathbb{R}$ ainsi que $\sigma > 0$ et $\nu > 0$. On dit que X suit une loi de Laplace Généralisée de paramètres $(\delta, \mu, \sigma, \nu)$ si sa fonction caractéristique Φ_X est donnée par :*

$$\Phi_X(u) = e^{i\delta u}\left(1 - i\mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)^{-1/\nu}, \tag{1}$$

où δ est un paramètre de position, μ de symétrie, σ d'échelle et ν de forme. Tous les moments de X sont finis, et de plus si on prend $\delta = 0, \mu = 0,\ \sigma^2 = \nu$ alors quand $\nu \to 0$, on obtient une loi normale centrée-réduite.

Cette distribution est très souple car elle permet d'obtenir à la fois des queues lourdes ou identiques à la loi normale, ainsi que des lois dissymétriques ou non. Elle permet également de définir un processus, analogue au mouvement brownien, appelé Bruit

Laplace (ou Laplace Motion), qui sera à la base de la construction des processus Laplace Moyenne Mobile ($\mathcal{LMA}$) dans ce qui va suivre).

Définition (Laplace Moving Average)**.** *Soit* Γ *un processus de Lévy, de loi marginale la loi de Laplace.* Γ *est appelé Bruit Laplace, ou processus Variance-Gamma. Soit également une fonction* f *à valeur dans* $\mathbb{R}$*, appelée* noyau *telle que* $\int_{\mathbb{R}} f$ *et* $\int_{\mathbb{R}} f^2$ *soient finies. Alors,*

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)d\Gamma(x) \tag{2}$$

défini un processus sur $\mathbb{R}$*, appelé* Laplace Moving Average ($\mathcal{LMA}$).

Ce processus a des propriétés intéressantes (voir [3]), qui dépendent à la fois du noyau et des paramètres du mouvement Laplace. En particulier il peut présenter des queues lourdes, mais aussi des dissymétries avant-arrière ainsi que haut-bas et est donc un bon candidat pour modéliser la surface de la mer en eau peu profonde.

Il est également possible de calculer les propriétés spectrales du processus :

Propriété (Propriétés spectrales)**.**

$$S_{X_t}(\omega) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{\nu}|\mathcal{F}[f](\omega)|^2 \tag{3}$$

$$S_{2,X_t}(\omega_1,\omega_2) = \frac{\mu}{\nu}(2\mu^2+3\sigma^2)\mathcal{F}[f](\omega_1)\mathcal{F}[f](\omega_2)\overline{\mathcal{F}[f](\omega_1+\omega_2)} \tag{4}$$

où $\mathcal{F}[f]$ *est la transformée de Fourier de* f*.*

2.2 Estimation des paramètres

Les processus décrit dans la section précédente sont déterminés par quatre paramètres marginaux (réel), mais aussi par un paramètre infini-dimensionnel, le noyau. Nous traiterons l'estimation de ces quantités séparément.

2.2.1 Estimation des paramètres marginaux

Dans cette partie, nous supposerons que le noyau est connu, et chercherons à estimer les paramètres (δ,μ,σ,ν) du bruit Laplace, qui sert d'entrée au filtre linéaire. Nous allons pour cela utiliser la méthode des moments mise en oeuvre par [4], qui consiste à estimer les paramètres de la loi à partir des moments empiriques. Pour cela, nous avons besoin des moments du processus.

Propriété. *Soit* X_t *un* $\mathcal{LMA}$ *de noyau* f *tel que* $\int f^i < \infty,\ i=1,2,3,4$ *et de paramètres* (δ,μ,σ,ν)*. Les quatre premiers moments sont donnés en fonction des paramètres par les relations suivantes :*

$$\mathbb{E}X_t = \left(\frac{\mu}{\nu}+\delta\right)\int_{\mathbb{R}} f \qquad \mathbb{V}X_t = \frac{\mu^2+\sigma^2}{\nu}\int_{\mathbb{R}} f^2 \tag{5}$$

$$\textit{skewness } s = \mu\sqrt{\nu}\frac{2\mu^2+3\sigma^2}{(\mu^2+\sigma^2)^{3/2}}\frac{\int_{\mathbb{R}} f^3}{(\int_{\mathbb{R}} f^2)^{3/2}} \qquad \textit{Excès de kurtosis } k_e = 3\nu\left(2-\frac{\sigma^4}{(\mu^2+\sigma^2)^2}\frac{\int_{\mathbb{R}} f^4}{(\int_{\mathbb{R}} f^2)^2}\right) \tag{6}$$

Les équations précédentes sont alors inversées en remplaçant le membre de gauche par les équivalents empiriques. Sous certaines conditions, ces estimateurs sont convergents, grâce à l'ergodicité du $\mathcal{LMA}$. Ce résultat permet de régler le cas de l'estimation des paramètres marginaux, une fois que le noyau est connu. Nous allons donc chercher à estimer ce dernier.

2.2.2 Estimation du noyau

Le noyau peut être estimé à l'aide des propriétés spectrales du noyau. Dans tout ce qui suit, f est déterminée à une constante près, on choisira donc f telle que $\int f^2 = 1$ et donc f peut être estimée indépendamment de la loi marginale du processus. D'après l'équation 3, on doit avoir :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{S_{X_t}(\omega)}e^{-i\Phi(\omega)}\right]. \tag{7}$$

pour une certaine fonction de phase Φ. On en déduit donc que la norme de la transformée de Fourier de f peut être obtenue à l'aide du spectre, mais ce dernier ne permet pas d'obtenir Φ, qui a pourtant une influence importance sur f. Par exemple :

– Si $\Phi = 0$, f est symétrique, et le processus est reversible en temps. C'est le cas étudié dans les études précédentes ;
– Si $\Phi(\omega) = \pi/2\,\mathrm{sgn}\,\omega$, on obtient un noyau impair ;
– Si $\Phi(\omega) = \mathcal{H}[\log\sqrt{S(\omega)}]$, où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert, alors on obtient un noyau causal (nul pour $x<0$) de phase minimale.

En pratique, on doit estimer la fonction Φ à partir des données, ce qu'il est possible de faire à partir du bispectre empirique, grâce à la relation 4 (voir p.e. [2]).

3 Résultats de simulation

Dans cette section, nous nous intéresserons à l'estimation des paramètres pour un processus $\mathcal{LMA}$ à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Le tableau 1 contient un exemple de résultat d'estimation des paramètres d'un $\mathcal{LMA}$ en fonction du noyau utilisé. Nous nous intéresserons dans ce papier également à l'influence du noyau ainsi que de la taille de l'échantillon sur la précision de l'estimateur des paramètres.

TABLE 1 – Estimation des paramètres d'un $\mathcal{LMA}$ de noyau $f(x) = xe^{-|x|}\mathbb{1}_{x>=0}$. Valeurs calculées à partir de 1000 réalisations de longueur 10000. Entre crochets, l'intervalle de variation à 95%.

Paramètre	Valeur	Vrai noyau	Noyau Symétrique	Noyau Phase estimée
δ	-0.5	-0.60 [-0.96 0.27]	-0.76 [-1.10 -0.34]	-0.59 [-0.96 -0.27]
μ	1	0.79 [0.86 1.30]	0.98 [0.79 1.20]	1.05 [0.84 1.31]
σ	1	1.05 [0 1.70]	0.48 [0 1.41]	0.79 [0 1.73]
ν	2	1.98 [1.05 4.01]	1.43 [0.80 2.92]	1.99 [1.03 4.16]
ρ_3	2.96	2.31 [0 4.56]	0 [0 0]	1.61 [0 3.11]

Le tableau 1 nous permet de voir l'apport de la méthode : le biais dans l'estimation des paramètres de même que l'écart-type sont réduits de par l'estimation des phases de la fonction de transfert $\mathcal{F}f$, contrairement au cas retenu dans les études précédentes, dans lesquelles la phase était fixée à 0. Nous verrons que la structure du processus est également mieux estimée, car un noyau symétrique ne permet pas de retrouver les dissymétries avant-arrière du processus : par exemple, l'asymétrie de la dérivée du processus ρ_3 vaut 0.

4 Application à des séries temporelles de vagues

Cette dernière section détaillera les résultats obtenus sur des simulations de hauteurs de vagues obtenues à l'aide d'un modèle numérique de propagation des vagues dans une situation qui correspond à celle détaillée en introduction : vagues aléatoires et bathymétrie variable, en faible profondeur. Nous validerons l'ajustement à l'aide de l'intensité de dépassement pour les différents processus considérés classiquement (Gaussien et $\mathcal{LMA}$ de noyau symétrique) ainsi que pour le $\mathcal{LMA}$ avec le noyau estimé par la nouvelle méthode proposée ; ainsi que grâce aux caractéristiques des vagues individuelles, qui nous permettrons de mettre en évidence les dissymétries du processus.

Références

[1] Thomas Galtier. Note on the estimation of crossing intensity for laplace moving average. *Extremes*, 14 :157–166, 2011. 10.1007/s10687-010-0116-4.

[2] T. Matsuoka and T.J. Ulrych. Phase estimation using the bispectrum. *Proceedings of the IEEE*, 72(10) :1403 – 1411, oct. 1984.

[3] K. Podgórski and J. Wegener. Non-gaussian fields with vertical and horizontal asymmetries. *Preprint*, 2010.

[4] K. Podgórski and J. Wegener. Estimation for stochastic models driven by laplace motion. *Communications in statistics. Theory and methods*, 40, 2011.