

# Filtrage particulaire marginalisé pour la poursuite multi-objets

Yohan PETETIN<sup>1</sup>, Mark MORELANDE<sup>2</sup>, François DESBOUVRIES<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Institut Mines Telecom / Telecom SudParis / Département CITI et CNRS UMR 5157, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry, France

<sup>2</sup>Electrical and Electronic Engineering Department / University of Melbourne, 161 Barry Street, Parkville 3010, VIC Australia  
{yohan.petetin, francois.desbouvries}@it-sudparis.eu, mrmore@unimelb.edu.au

**Résumé** – Nous nous intéressons dans cette communication au problème de filtrage multi-objets dans le contexte des ensembles statistiques finis et du filtre Probability Hypothesis Density (PHD), une fonction à valeurs réelles qui permet d’estimer à la fois le nombre d’objets et leur état caché. L’utilisation des méthodes de Monte Carlo Séquentielles (SMC) peut produire dans ce contexte des mauvais estimateurs du nombre d’objets et des états cachés inconnus si la dimension du vecteur d’état de chaque objet est importante. Pour pallier ce problème, nous proposons de combiner une méthode de marginalisation visant à réduire la variance des estimateurs considérés avec une méthode de tirage efficace visant à guider les particules dans des régions de l’espace d’état où se trouvent probablement les états cachés.

**Abstract** – In this paper, we focus on the multi-object filtering problem via Random Finite Sets. In this context, the problem consists in propagating the Probability Hypothesis Density (PHD) function which enables to estimate the number of objects and the hidden states. The use of Sequential Monte Carlo (SMC) methods may lead to inaccurate estimates when the dimension of the state vector is high. In order to cope with this issue, we combine a marginalisation technique to an efficient sampling method which guides the particles in regions where the objects are likely to be present.

## 1 Introduction

La théorie récente des Ensembles Statistiques Finis [4] est une solution efficace pour le problème de filtrage multi-objets car elle permet d’éviter le problème d’association objets - observations. Parmi les solutions basées sur les ensembles statistiques finis, le filtre PHD propage le PHD ou la fonction d’intensité, c’est à dire une densité surfacique multi-modale permettant d’évaluer un nombre aléatoire de vecteurs aléatoires (des objets ou des cibles) appartenant à  $\mathbb{R}^p$ . En effet, pour tout région  $S$  de  $\mathbb{R}^p$ , le calcul de l’intégrale  $\int_S v_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  est un estimateur du nombre d’objets appartenant à la région  $S$ . Le PHD est donc la densité surfacique de l’espérance mathématique du nombre d’objets et le calcul de l’intégrale ci-dessus est important pour déduire un estimateur du nombre d’objets, et déduire les régions  $S$  dans lesquelles le PHD est important.

Néanmoins, le calcul récursif du PHD n’est pas faisable, et des approximations basées sur l’utilisation des méthodes SMC sont nécessaires. Comme en filtrage mono-objet [2], ces méthodes produisent de mauvais estimateurs dès lors que la dimension du vecteur d’état  $\mathbf{x}$  devient importante. Cependant, les conséquences sont d’autant plus sévères dans ce contexte qu’il faut à la fois estimer le nombre d’objets et l’état caché de chaque objet.

Dans cette communication, nous nous proposons d’adapter les méthodes de réduction de variance pour les méthodes MC basées sur le théorème de Rao-Blackwell (RB), au problème du filtrage multi-objets. Nous proposons donc un filtre PHD marginalisé (M-PHD) adapté aux modèles partiellement linéaires

et Gaussiens, puis nous proposons deux implémentations MC du M-PHD. Nos algorithmes sont validés par des simulations.

## 2 Filtrage Multi-objets

### 2.1 Le filtre PHD

Supposons que la dynamique d’un objet  $\mathbf{x}_n$  est une chaîne de Markov dont la transition est donnée par la loi  $f_{n|n-1}(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1})$  et que la vraisemblance d’une observation  $\mathbf{z}$  avec l’état  $\mathbf{x}$  est donnée par la loi  $g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n)$ . Si nous notons  $p_{s,n}(\mathbf{x})$  la probabilité de survie d’un état  $\mathbf{x}$ ,  $p_{d,n}(\mathbf{x})$  sa probabilité de détection,  $\gamma_n(\mathbf{x})$  l’intensité des objets naissants,  $\kappa_n(\mathbf{z})$  l’intensité des mesures de fausses alarmes, et  $\mathcal{Z}_n$  l’ensemble des observations disponibles à l’instant  $n$ , alors la propagation du PHD se fait en deux étapes (prédiction et mise-à-jour) :

$$v_{n|n-1}(\mathbf{x}) = \int p_{s,n}(\boldsymbol{\xi})f_{n|n-1}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})v_{n-1}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} + \gamma_n(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$v_n(\mathbf{x}) = (1 - p_{d,n}(\mathbf{x}_n))v_{n|n-1}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n} \frac{p_{d,n}(\mathbf{x}_n)g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x})v_{n|n-1}(\mathbf{x})}{\kappa_n(\mathbf{z}) + \int p_{d,n}(\mathbf{x}_n)g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n)v_{n|n-1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}}. \quad (2)$$

### 2.2 L’implémentation SMC du filtre PHD

Les équations précédentes ne sont pas calculables en pratique. Plusieurs solutions sous optimales, incluant l’implémentation par mélange de Gaussiennes [1], ont ainsi été proposées dans la littérature.

L'implémentation SMC du filtre PHD [5] approxime le PHD par un mélange discret  $\hat{v}_{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_{n-1}} w_{n-1}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{n-1}^{(i)}}$ . En tirant de nouveaux points  $\mathbf{x}_n^{(i)}$ , une approximation MC  $\hat{v}_n$  de  $v_n$  est alors donnée par  $\hat{v}_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_n} w_n^i \delta_{\mathbf{x}_n^{(i)}}$  avec

$$w_n^i = (1 - p_{d,n}(\mathbf{x}_n^{(i)}))w_{n|n-1}^{(i)} + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n} \frac{p_{d,n}(\mathbf{x}_n^{(i)})g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n^{(i)})w_{n|n-1}^{(i)}}{\kappa_n(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{L_{n-1}} p_{d,n}(\mathbf{x}_n^{(i)})g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n^{(i)})w_{n|n-1}^{(i)}}. \quad (3)$$

Cette implémentation souffre des mêmes inconvénients que celle des filtres particuliers classiquement utilisés en filtrage mono-objet. Le terme crucial dans l'expression des poids (3) est  $p_{d,n}(\mathbf{x}_n^{(i)})g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n^{(i)})w_{n|n-1}^{(i)}$  car il a une influence déterminante sur la masse totale  $\int v_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ , un estimateur du nombre d'objets. Ce terme dépend de la vraisemblance  $g_n(\mathbf{z}|\mathbf{x}_n^{(i)})$ . Par conséquent, si toutes les particules ont une vraisemblance faible avec toutes les mesures disponibles, l'estimateur MC du nombre d'objets  $\hat{N}_n = \sum_{i=1}^{L_n} w_n^i$  a tendance à être proche de 0, même si certaines de ces mesures sont dues à la présence d'objets. Un tel scénario se produit dès lors que les particules ne sont pas concentrées dans des régions à forte vraisemblance. Cette tâche est d'autant plus exigeante que la dimension des tirages est grande.

Pour résoudre ce problème, deux solutions sont envisagées. Nous combinons des techniques de réduction de variance et des méthodes de tirage efficaces, basées sur une implémentation auxiliaire [6], afin d'obtenir un estimateur robuste du nombre d'objets et de leur état caché.

## 3 Le filtre PHD Marginalisé

### 3.1 Le filtre M-PHD

Notre méthode de réduction de variance repose sur la décomposition suivante

$$\int v_n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int \underbrace{[\int v_n(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l)d\mathbf{x}^{nl}]}_{\text{implémentation MC}} d\mathbf{x}^l = \int \underbrace{\tilde{v}_n(\mathbf{x}^l)}_{\text{calculable exactement}} d\mathbf{x}^l.$$

L'utilisation d'une telle décomposition est possible dans les modèles à sauts partiellement linéaires Gaussiens,

$$f_{n|n-1}(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_n; \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^{nl}(\mathbf{x}_{n-1}^{nl}) \\ \mathbf{f}_n^l(\mathbf{x}_{n-1}^{nl}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_n^{nl}(\mathbf{x}_{n-1}^{nl}) \\ \mathbf{F}_n^l(\mathbf{x}_{n-1}^{nl}) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1}^l; \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^{nl} & (\mathbf{S}_n^{nl})^T \\ (\mathbf{S}_n^{nl}) & \mathbf{Q}_n^l \end{bmatrix}\right), \quad (4)$$

$$g_n(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_n) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_n; \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_n^{nl}) + \mathbf{H}_n(\mathbf{x}_n^{nl})\mathbf{x}_n^l; \mathbf{R}_n). \quad (5)$$

sous les hypothèses suivantes : les probabilités de survie  $p_{s,n}(\mathbf{x}) = p_{s,n}(\mathbf{x}^{nl})$  et de détection  $p_{d,n}(\mathbf{x}) = p_{d,n}(\mathbf{x}^{nl})$  dépendent seulement de la composante non linéaire du vecteur d'état d'un objet ;  $\gamma_n(\mathbf{x})$  est un mélange de la forme  $\gamma_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\gamma_n}} w_{n|n-1}^{2,(i)}$

$p_{i,n}(\mathbf{x}^{nl})\mathcal{N}(\mathbf{x}^l; \mathbf{m}_{n|n-1}^{2,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}); \mathbf{P}_{n|n-1}^{2,l,(i)})$  (l'exposant 2 caractérisera ici les composantes naissantes).

L'idée sur laquelle repose notre approche est de supposer qu'à l'instant  $n$ , le PHD est approché par un mélange Normal-Discret (ND) :  $\hat{v}_{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_{n-1}} w_{n-1}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}^l; \mathbf{m}_{n-1}^{l,(i)}; \mathbf{P}_{n-1}^{l,(i)}) \delta_{\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)}}(\mathbf{x}^{nl})$ .

#### 3.1.1 Étape de Prédiction

Posons  $\mathbf{F}_n^{l,(i)} \triangleq \mathbf{F}_n^l(\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)})$ ,  $\mathbf{F}_n^{nl,(i)} \triangleq \mathbf{F}_n^{nl}(\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)})$ ,  $\mathbf{f}_n^{l,(i)} \triangleq \mathbf{f}_n^l(\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)})$ ,  $\mathbf{f}_n^{nl,(i)} \triangleq \mathbf{f}_n^{nl}(\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)})$  et  $p_{s,n}^{(i)} \triangleq p_{s,n}(\mathbf{x}_{n-1}^{nl,(i)})$ . Soit  $\hat{v}_{n-1}$  une approximation ND du PHD  $v_{n-1}$ . En injectant cette approximation dans (1), nous obtenons l'approximation  $\tilde{v}_{n|n-1}$ ,

$$\tilde{v}_{n|n-1}(\mathbf{x}) = \tilde{v}_{n|n-1}^1(\mathbf{x}) + \tilde{v}_{n|n-1}^2(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$\tilde{v}_{n|n-1}^1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_n} w_{n|n-1}^{1,(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}^l; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}); \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,l,(i)}) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,nl,(i)}; \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,nl,(i)}), \quad (7)$$

$$\tilde{v}_{n|n-1}^2(\mathbf{x}) = \gamma_n(\mathbf{x}), \quad (8)$$

où

$$w_{n|n-1}^{1,(i)} = p_{s,n}^{(i)} w_n^{(i)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{m}_{n|n-1}^{1,nl,(i)} = \mathbf{f}_n^{nl,(i)} + \mathbf{F}_n^{nl,(i)} \mathbf{m}_{n-1}^{l,(i)}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{1,nl,(i)} = \mathbf{Q}_n^{nl} + \mathbf{F}_n^{nl,(i)} \mathbf{P}_{n-1}^{l,(i)} \mathbf{F}_n^{nl,(i)T}, \quad (11)$$

$$\mathbf{m}_{n|n-1}^{1,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) = \mathbf{A}_n^{(i)} \tilde{\mathbf{m}}_{n|n-1}^{l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) + \mathbf{f}_n^{l,(i)} + \tilde{\mathbf{Q}}_n^{nl}(\mathbf{x}^{nl} - \mathbf{f}_n^{nl,(i)}), \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{1,l,(i)} = \mathbf{Q}_n^l - (\tilde{\mathbf{Q}}_n^{nl})^{-1} \mathbf{Q}_n^{nl} \mathbf{P}_{n-1}^{l,(i)T} + \mathbf{A}_n^{(i)} \tilde{\mathbf{P}}_{n|n-1}^{l,(i)} \mathbf{A}_n^{(i)T} \quad (13)$$

où  $\tilde{\mathbf{m}}_{n|n-1}^{l,(i)}(\mathbf{x}^{nl})$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_{n|n-1}^{l,(i)}$  et  $\mathbf{A}_n^{(i)}$  sont définis par

$$\tilde{\mathbf{m}}_{n|n-1}^{l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) = \mathbf{m}_{n-1}^{l,(i)} + \tilde{\mathbf{K}}_{n|n-1}^{l,(i)} \times \left[ \mathbf{x}^{nl} - \mathbf{f}_n^{nl,(i)} - \mathbf{F}_n^{nl,(i)} \mathbf{m}_{n-1}^{l,(i)} \right], \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n|n-1}^{l,(i)} = \left[ \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{n|n-1}^{l,(i)} \mathbf{F}_n^{nl,(i)} \right] \mathbf{P}_{n-1}^{l,(i)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_n^{(i)} = \mathbf{F}_n^{l,(i)} - (\tilde{\mathbf{Q}}_n^{nl})^{-1} \mathbf{F}_n^{nl,(i)}, \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n|n-1}^{l,(i)} = \mathbf{P}_{n-1}^{l,(i)} (\mathbf{F}_n^{nl,(i)})^T (\mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i)})^{-1}, \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n^{nl} = \mathbf{S}_n^{nl} (\mathbf{Q}_n^{nl})^{-1}. \quad (18)$$

#### 3.1.2 Étape de mise-à-jour

Posons  $\mathcal{Z}'_n = \{\theta\} \cup \mathcal{Z}_n$ , où  $\theta$  est un point fictif quelconque qui correspond à une non détection. En injectant (6) dans (2), nous obtenons l'approximation suivante de  $v_n$  :

$$\tilde{v}_n(\mathbf{x}) = \tilde{v}_n^1(\mathbf{x}) + \tilde{v}_n^2(\mathbf{x}), \quad (19)$$

où

$$\tilde{v}_n^1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_{n-1}} \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,n,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,n,(i)}) \times \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \Phi_n^{1,(i)}(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}), \quad (20)$$

$$\tilde{v}_n^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\gamma_n}} p_{i,n}(\mathbf{x}^{nl}) \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \Phi_n^{2,(i)}(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}), \quad (21)$$

$$\Phi_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}^l; \mathbf{m}_n^{j,l,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}); \mathbf{P}_n^{j,l,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl})) \times w_n^{j,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) \text{ pour } j = 1, 2, \quad (22)$$

avec, pour  $j = 1, 2$ , et  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n$ ,

$$w_n^{j,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = \begin{cases} (1 - p_{d,n}(\mathbf{x}^{nl})) w_{n|n-1}^{j,(i)}, & \mathbf{z} = \theta, \\ \frac{p_{d,n}(\mathbf{x}^{nl}) q_n^{j,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) w_{n|n-1}^{j,(i)}}{\kappa_n(\mathbf{z}) + \tilde{B}^1(\mathbf{z}) + \tilde{B}^2(\mathbf{z})}, & \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n, \end{cases} \quad (23)$$

$$\mathbf{m}_n^{j,l,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = \begin{cases} \mathbf{m}_{n|n-1}^{j,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}), & \mathbf{z} = \theta, \\ \mathbf{m}_{n|n-1}^{j,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) + \mathbf{K}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) \tilde{\mathbf{z}}_n^{(i)}(\mathbf{x}^{nl}), & \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n, \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_n^{j,l,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = \begin{cases} \mathbf{P}_{n|n-1}^{j,l,(i)}, & \mathbf{z} = \theta, \\ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{K}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) \mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl}) \right] \mathbf{P}_{n|n-1}^{j,l,(i)}, & \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n, \end{cases} \quad (25)$$

où

$$q_n^{j,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}; h_n(\mathbf{x}^{nl}) + \mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl}) \mathbf{m}_{n|n-1}^{j,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}); \mathbf{S}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl})), \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) = \mathbf{P}_{n|n-1}^{j,l,(i)} \mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl})^T (\mathbf{S}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}))^{-1}, \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) = \mathbf{z} - \mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl}) \mathbf{m}_{n|n-1}^{j,l,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) - h_n(\mathbf{x}^{nl}), \quad (28)$$

$$\mathbf{S}_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}) = \mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl}) \mathbf{P}_{n|n-1}^{j,l,(i)} (\mathbf{H}_n(\mathbf{x}^{nl}))^T + \mathbf{R}_n, \quad (29)$$

$$\tilde{B}^1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{L_n} \int w_{n|n-1}^{1,(i)} p_{d,n}(\mathbf{x}^{nl}) q_n^{1,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) d\mathbf{x}^{nl} \times \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,n,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,n,(i)}), \quad (30)$$

$$\tilde{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N_{\gamma_n}} \int w_{n|n-1}^{2,(i)} p_{d,n}(\mathbf{x}^{nl}) q_n^{2,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) p_{i,n}(\mathbf{x}^{nl}) d\mathbf{x}^{nl} \quad (31)$$

**Remarque 1** Les équations du filtre M-PHD peuvent être également obtenues pour des modèles à sauts linéaires et Gaussiens, ou éventuellement partiellement linéaires et Gaussiens, qui dépendent d'un troisième processus discret latent.

### 3.2 Implémentation SMC du filtre M-PHD

Seul le terme  $\int \tilde{v}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^l$  est calculable puisque  $\int \Phi_n^{j,(i)}(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}) d\mathbf{x}^l$ , réduit à  $w_n^{j,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl})$ , est calculable. Nous propo-

sons deux implémentations SMC pour le calcul de l'intégrale  $\int [\int \tilde{v}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^l] d\mathbf{x}^{nl}$ ;

#### 3.2.1 Une implémentation Bootstrap

Cette implémentation repose sur le fait que les lois  $\mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,n,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,n,(i)})$  et  $p_{i,n}$  sont disponibles pour tirer de nouvelles particules.

**Approximation ND de  $\tilde{v}_{n|n-1}^1$**  : Une approximation ND de  $\tilde{v}_n^1$  à  $L_n$  composantes est donnée par

$$\tilde{v}_n^1(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l) = \sum_{i=1}^{L_{n-1}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \Phi_n^{1,(i)}(\mathbf{x}_n^{1,nl,(i)}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}) \delta_{\mathbf{x}_n^{1,nl,(i)}}(\mathbf{x}^{nl}), \quad (32)$$

avec  $\mathbf{x}_n^{1,nl,(i)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{1,nl,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{1,nl,(i)})$  pour  $1 \leq i \leq L_n$ .

**Approximation ND de  $\tilde{v}_n^2$**  : Ensuite, nous tirons des particules pour les objets naissants. Il peut être dangereux de tirer seulement  $N_{\gamma_n}$  particules si  $N_{\gamma_n}$  est petit. Nous utilisons donc une approximation de  $\tilde{v}_n^2$  basée sur un ensemble de  $L_n^2 = M \times N_{\gamma_n}$  particules. Pour  $i = 1, \dots, L_n^2$ , posons  $j^i = \lceil i/M \rceil$ . Une approximation ND de  $\tilde{v}_n^2$  est alors donnée par

$$\tilde{v}_n^2(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{L_n^2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \Phi_n^{2,(j^i)}(\mathbf{x}_n^{2,n,(i)}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}) \delta_{\mathbf{x}_n^{2,n,(i)}}(\mathbf{x}^{nl}), \quad (33)$$

où  $\mathbf{x}_n^{2,n,(i)} \sim p_{j^i,n}(\mathbf{x}^{nl})$ .

Une étape de rééchantillonnage peut être utilisée pour limiter le nombre de composantes de  $\tilde{v}_n(\mathbf{x})$ .

#### 3.2.2 Une implémentation marginale auxiliaire

L'implémentation précédente peut être inefficace car les mesures disponibles  $\mathcal{Z}_n$  ne sont pas prises en compte pour tirer les nouvelles particules. Une implémentation efficace reposant sur deux variables auxiliaires (une mesure et une ancienne particule) peut résoudre ce problème, à condition de supposer que les probabilités de survie et de détection sont constantes et que  $\gamma_n$  est un mélange Gaussien.

En effet,  $\tilde{v}_n(\mathbf{x})$  peut se réécrire sous une forme plus directe,

$$\tilde{v}_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L_{n|n-1}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \mathcal{N}(\mathbf{x}^n; \mathbf{m}_{n|n-1}^{n,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{n,(i)}) \Phi_n^{(i)}(\mathbf{x}^{nl}, \mathbf{x}^l, \mathbf{z}),$$

En marginalisant par rapport à  $\mathbf{x}^l$ , nous obtenons

$$\tilde{v}_n(\mathbf{x}^{nl}) = \sum_{i=1}^{L_{n|n-1}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{nl,(i)}, \mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i)}) w_n^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl});$$

où  $w_n^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = w_n^{1,(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl})$  pour  $i=1, \dots, L_{n-1}$  et  $w_n^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) = w_n^{2,(i-L_{n-1})}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl})$  pour  $i=L_{n-1}+1, \dots, L_{n-1}+N_{\gamma_n}$ .

Nous tirons alors  $L_n$  points selon  $\tilde{v}_n(\mathbf{x}^{nl})$ , qui est un mélange de mélanges en utilisant une implémentation auxiliaire.

Pour cela, nous supposons que nous avons les approximations suivantes obtenues par linéarisation ou la transformation uncentred,  $p^{(i)}(\mathbf{z}) \approx \int q_n^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{nl,(i)}; \mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i)}) d\mathbf{x}^{nl}$ ,  $p^{(i)}(\mathbf{x}^{nl}|\mathbf{z}) \tilde{\propto} q_n^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^{nl}) \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{nl,(i)}; \mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i)})$ .

**Sélection des anciennes composantes :** Pour  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n$ , définissons

$$\tilde{q}(\mathbf{z}|i) = \begin{cases} 1 - p_{d,n}, & \mathbf{z} = \theta, \\ p_{d,n} p^{(i)}(\mathbf{z}) / [\kappa_n(\mathbf{z}) + \widehat{B}(\mathbf{z})], & \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n, \end{cases} \quad (34)$$

où  $\widehat{B}(\mathbf{z})$  est une approximation de  $\widetilde{B}_1(\mathbf{z}) + \widetilde{B}_2(\mathbf{z})$ . La densité d'importance associée à la sélection de la composante est donnée par

$$q(i) = w_{n|n-1}^{(i)} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \tilde{q}(\mathbf{z}|i) / C_n, \quad (35)$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{L_{n|n-1}} w_{n|n-1}^{(i)} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n} \tilde{q}(\mathbf{z}|i). \quad (36)$$

**Selection d'une mesure :** Nous sélectionnons  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}'_n$  suivant

$$q(\mathbf{z}|i) = \tilde{q}(\mathbf{z}|i) / \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Z}'_n} \tilde{q}(\mathbf{y}|i) \quad (37)$$

**Selection d'une nouvelle particule :** La nouvelle particule est tirée selon

$$q(\mathbf{x}^{nl}|i, \mathbf{z}) = \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{x}^{nl}; \mathbf{m}_{n+1|k}^{nl,(i^j)}; \mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i^j)}), & \mathbf{z} = \theta, \\ p^{(i)}(\mathbf{x}^{nl}|\mathbf{z}), & \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n. \end{cases} \quad (38)$$

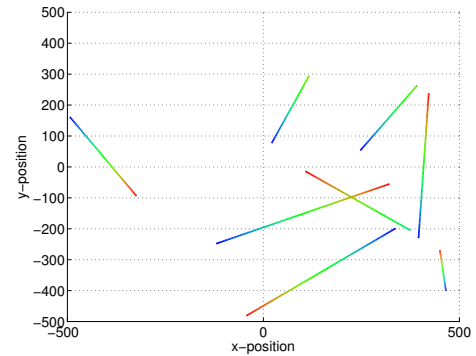
**Calcul des poids :** L'expression des poids est donnée par

$$w_n^{(j)} = \begin{cases} C_n / L_n, & \mathbf{z}^j = \theta, \\ \frac{C_n q_n^{(i^j)}(\mathbf{z}^j, \mathbf{x}_n^{nl,(j)}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_n^{nl,(j)}; \mathbf{m}_{n|n-1}^{nl,(i)}; \mathbf{P}_{n|n-1}^{nl,(i)})}{L_n p^{(i^j)}(\mathbf{z}^j) p^{(i^j)}(\mathbf{x}_n^{nl,(j)}|\mathbf{z}^j)}, & \mathbf{z}^j \in \mathcal{Z}_n. \end{cases} \quad (39)$$

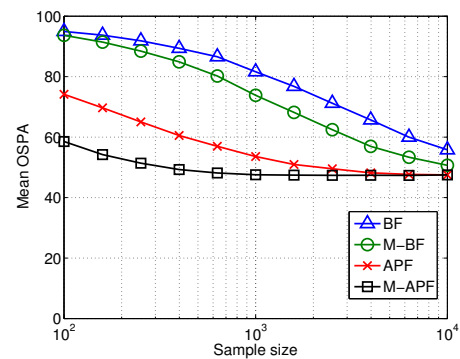
## 4 Simulations

Nous considérons un scénario classique de poursuite d'objets à partir de mesures polaires dans le modèle (4)-(5) et nous comparons 4 filtres PHD différents sur un scénario présenté sur la Figure 1(a) : un filtre classique bootstrap PHD (BF) [5], un filtre marginalisé bootstrap (M-BF), un filtre PHD auxiliaire (APF) [6] et un filtre PHD marginalisé auxiliaire (M-APF). Les différents algorithmes sont comparés sur la Figure 1(b) en fonction du nombre de particules utilisées, en utilisant la distance OSPA [3] qui permet de prendre en compte à la fois l'erreur sur le nombre d'objets et sur leurs positions : les filtres marginalisés améliorent les filtres purement MC. De plus, les filtres APF

se révèlent plus performants que les filtres bootstrap, mais ne sont utilisables que sous certaines hypothèses propres au modèle utilisé.



(a)



(b)

FIGURE 1 – Scénario de huit objets qui apparaissent et disparaissent : (a) Trajectoire des objets (b) Distance OSPA moyenne pour les 4 algorithmes, en fonction du nombre de particules.

## Références

- [1] B.Vo and W.K.Ma. The gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Tr. Sig. Pro.*, 54 :4091–4104, November 2006.
- [2] A. Doucet, S. J. Godsill, and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10 :197–208, 2000.
- [3] D.Schuhmacher, B.T.Vo, and B.N.Vo. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters. *IEEE Tr. Sig. Pro.*, 56(8) :3447–3457, August 2008.
- [4] R.Mahler. *Statistical Multisource Multitarget Information Fusion*. Artech House, 2007.
- [5] B. Vo, S. Singh, and A. Doucet. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Tr. on Aerospace and Electronic Systems*, 41, 2005.
- [6] N. Whiteley, S. Singh, and S. Godsill. Auxiliary particle implementation of the probability hypothesis density filter. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2010.