

Etude au second ordre d'un modèle de canal à accès multiple pour une station à grand nombre d'antennes

Adrien PELLETIER¹, Romain COUILLET¹, Jamal NAJIM²

¹Département Télécommunications, Supélec, 3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif sur Yvette, France

²Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge, Université Paris-Est, 5 Boulevard Descartes, Marne La Vallée
adrien.pelletier@ens-cachan.fr, romain.couillet@supelec.fr, najim@univ-mlv.fr

Résumé – Cet article présente une étude asymptotique au second ordre de la distribution conjointe des rapports signal sur interférence plus bruit (SINR) des utilisateurs d'un canal à accès multiple Rayleigh, à la sortie d'un décodeur à erreur quadratique moyenne minimale (MMSE). Deux régimes asymptotiques sont considérés : le premier pour une station à grand nombre d'antennes et faible nombre d'utilisateurs, le second pour une station à grand nombre d'antennes et grand nombre d'utilisateurs. Il est montré que, dans ces deux régimes, le comportement de la distribution des SINR est asymptotiquement gaussien (dans un sens qui est précisé dans l'article), de moyenne et variance qui sont explicitées. Ce résultat est appliqué à l'étude de la proportion des utilisateurs dont le débit est inférieur à un débit cible. La pertinence du résultat asymptotique dans un cas réaliste est illustrée par des simulations.

Abstract – This article presents an second-order asymptotic study of the joint distribution of the signal to interference plus noise ratios (SINR) of users in a Rayleigh multiple access channel, at the output of a minimal mean square error (MMSE) decoder. Two asymptotic regimes are considered : the first with a large number of antennas and a small number of users, the second with a large number of antennas and a large number of users. It is shown that, in these two regimes, the distribution of the SINRs is asymptotically Gaussian (in a sense that is explicitated in the article), with identified mean and variance. This result is applied to the estimation of the proportion of users below a target rate. Simulations illustrate the relevance of asymptotic results in a realistic context.

Introduction

L'étude de modèles de systèmes de communication à antennes multiples (MIMO) par la théorie des matrices aléatoires, initiée par Telatar [1] pour la communication point-à-point, puis par Tse et Hanly [2] pour la communication à accès multiple, est un domaine de recherche actif, motivé par le besoin d'obtenir des résultats analytiques sur la capacité d'un canal de communication dans le cas asymptotique où au moins un des paramètres du canal devient grand. Le cas d'un canal à accès multiple (MAC), où plusieurs utilisateurs sont connectés à la même station de base, a été étudié par des méthodes de ce type, et il existe des expressions asymptotiques pour les débits individuels des utilisateurs ainsi que pour le débit total, dans la continuité des travaux de Tse et Hanly. Le cas d'un canal MAC a été étudié asymptotiquement au premier ordre dans des modèles simples puis réalistes d'un point de vue applicatif [3, 4, 5].

Cependant, [3, 4, 5] ne fournissent que des résultats valides pour un nombre arbitrairement grand d'antennes. Il est ainsi intéressant, dans le but de comparer la qualité de service des différents utilisateurs, de connaître les fluctuations de l'expression du débit individuel autour de son expression asymptotique par une étude au second ordre. Une étude au second ordre d'un canal à accès multiple a été réalisée dans [6], qui prouve un

théorème central limite (TCL) pour le rapport signal sur interférence plus bruit (SINR) d'un utilisateur arbitraire du canal. L'objet du travail présenté ici est d'étudier asymptotiquement la distribution conjointe des SINR de tous les utilisateurs du canal. En effet, connaître la distribution des SINR des utilisateurs (et donc des débits atteignables pour ceux-ci) est intéressant du point de vue d'un opérateur de télécommunications, car cela lui permettrait d'assurer une qualité de service minimale pour chaque utilisateur. Le problème est non trivial car il consiste à prendre en compte les corrélations entre les performances des utilisateurs dues aux interférences. Ici, nous étudions cette distribution dans le cas de la transmission en voie montante (uplink) d'un modèle simple de canal à accès multiple (canal Rayleigh, signaux et bruit gaussiens), à la sortie d'un décodeur MMSE.

Après avoir présenté le modèle, nous décrivons la structure de covariance asymptotique des SINR. Nous montrerons ensuite que cette structure de covariance permet de décrire les propriétés asymptotiques de la distribution des SINR, en utilisant une méthode basée sur un résultat de [7].

1 Présentation du problème

1.1 Le modèle étudié

On considère un canal MAC, constitué d'une station de base équipée de N antennes, qui dessert K utilisateurs équipés d'une antenne simple chacun, en voie montante. Le signal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_K)^T$ envoyé par les utilisateurs vers la station, supposé gaussien blanc de covariance \mathbf{I}_K , traverse un canal de Rayleigh $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K] \in \mathbb{C}^{N \times K}$ sans mémoire et sans corrélation entre antennes. Dans ce modèle, les entrées $\mathbf{X}_{i,j}$ de \mathbf{X} sont des gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées (iid), de distribution $\mathcal{CN}(0, 1/N)$, le facteur $1/N$ permettant de garder la puissance transmise dans le canal finie indépendamment de N . Le bruit ambiant $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ qui s'ajoute au signal reçu est supposé gaussien de variance $\sigma^2 \mathbf{I}_N$. Les utilisateurs sont supposés placés à distances égales de la station de telle sorte que la puissance reçue au niveau de la station est la même quelque soit l'utilisateur.

Nous considérons le cas où le signal reçu est décodé au niveau de la station par un estimateur à erreur quadratique moyenne minimale (MMSE). Le signal décodé a ainsi pour expression :

$$\mathbf{y} = (\mathbf{X}^* \mathbf{X} + \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-1} \mathbf{X}^* (\mathbf{X} \mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{X}^* \mathbf{Q} (\mathbf{X} \mathbf{u} + \mathbf{w})$$

avec $\mathbf{Q} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^* + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1}$ la résolvante de $\mathbf{X} \mathbf{X}^*$ évaluée au point $(-\sigma^2)$.

Dans ce modèle, on peut montrer que le SINR s_i de l'utilisateur $i \in \{1, \dots, K\}$ s'écrit :

$$s_i = \mathbf{x}_i^* \mathbf{Q}^{[i]} \mathbf{x}_i \quad (1)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mathbf{Q}^{[i]} = (\mathbf{X}^{[i]} \mathbf{X}^{[i]*} + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \\ \mathbf{X}^{[i]} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_K] \end{cases}$$

1.2 Méthodologie

On note $c_N = N/(K-1)$. La suite de l'article s'intéresse au comportement statistique des $\{s_i\}$ quand $N \rightarrow \infty$. On distinguera par la suite deux régimes asymptotiques selon le comportement asymptotique de K :

- Le régime à grand nombre d'antennes et faible nombre d'utilisateurs, où $N \rightarrow \infty$, K restant fini. Ce régime correspond en particulier aux canaux massive MIMO.
- Le régime à grand nombre d'antennes et grand nombre d'utilisateurs, où $N, K \rightarrow \infty$, $N/(K-1) \rightarrow c \in \mathbb{R}_*^+$. Ce régime est le plus courant dans l'étude d'un canal MAC.

L'étude des fluctuations des SINR comporte trois étapes. La première consiste à calculer des expressions asymptotiques de leurs moyennes et (co)variances. La seconde consiste à montrer, dans le régime asymptotique à nombre fini d'utilisateurs, la convergence du vecteur des SINR vers un vecteur blanc gaussien ayant la même variance que la variance individuelle, en utilisant une méthode implicite. Enfin, la troisième est de prouver, dans le régime asymptotique à grand nombre d'utilisateurs, la convergence de la distribution empirique des SINR vers cette même limite gaussienne.

2 Structure de covariance

Cette section décrit la structure de covariance asymptotique des $\{s_i\}$, dont nous montrerons qu'elle dépend uniquement du comportement asymptotique de N et est indépendante de celui de K . Ainsi, les résultats de cette section seront valables dans les deux régimes.

Comme les entrées de \mathbf{X} sont gaussiennes, ces termes peuvent être évalués en utilisant des outils de calcul gaussien, l'intégration par parties et l'inégalité de Poincaré-Nash [8] :

Proposition 1. *Les deux premiers moments du vecteur des $\{s_i\}$ s'expriment asymptotiquement, pour tous $i, j \in \{1, \dots, K\}$ tels que $j \neq i$, comme :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_i] &= m_N^{(1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) & \text{Var}(s_i) &= \frac{1}{N} m_N^{(2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ \text{Cov}(s_i, s_j) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned}$$

où l'on a défini :

$$m_N^{(1)} = \frac{c_N - 1}{2c_N \sigma^2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(1 - c_N + c_N \sigma^2)^2 + 4c_N^2 \sigma^2}}{2c_N \sigma^2} \quad (2)$$

$$m_N^{(2)} = -\frac{d}{d(\sigma^2)}\left(m^{(1)}\right). \quad (3)$$

Dans les deux régimes asymptotiques considérés, $m_N^{(1)}$ et $m_N^{(2)}$ convergent vers une limite finie non-nulle.

3 Régime à faible nombre d'utilisateurs

Dans cette section, nous considérons le régime où $N \rightarrow \infty$, K restant fini. Ce régime correspond en particulier aux canaux massive MIMO.

3.1 Théorème central limite

Le théorème central-limite suivant montre que dans le régime asymptotique considéré, les $\{s_i\}$ fluctuent autour de leur limite comme des gaussiennes iid dont les moyennes et variances individuelles sont celles de Prop. 1 :

Théorème 1. *Soit $K \geq 1$ fixé. Lorsque $N \rightarrow \infty$, les $\{s_i\}$ vérifient le TCL :*

$$\sqrt{\frac{N}{m_N^{(2)}}} \begin{pmatrix} s_1 - m_N^{(1)} \\ s_2 - m_N^{(1)} \\ \dots \\ s_K - m_N^{(1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_K(\mathbf{0}, \mathbf{I}_K).$$

Comme le débit individuel de chaque utilisateur donné par la théorie de l'information s'exprime en fonction de son SINR uniquement, la connaissance du comportement asymptotique des SINR est suffisante pour connaître asymptotiquement la distribution des débits des utilisateurs.

L'idée de la preuve du théorème 1 est donnée ci-après.

Éléments de preuve L'étude du vecteur aléatoire de taille K peut être ramenée à l'étude d'une variable aléatoire scalaire : par le Cramer-Wold device, il suffit de montrer la convergence de toute combinaison linéaire des éléments du vecteur vers une gaussienne univariée.

Les techniques de Stein, revisitées par Chatterjee [7] dans un contexte de matrices aléatoires, permettent ensuite de montrer la convergence en variation totale de cette variable scalaire vers une gaussienne, sans donner d'informations sur la moyenne et la variance de cette limite. Cette approche est implicite, et ne nécessite pas de connaître la structure de covariance, qui a déjà été calculée.

Enfin, la convergence des moments montrée dans Prop. 1 permet de remplacer dans le régime asymptotique la moyenne et la variance de cette gaussienne par les limites que l'on a calculées, et ainsi de conclure.

3.2 Illustrations et simulations

Cette partie présente les résultats des simulations réalisées dans le but d'évaluer la précision des résultats asymptotiques présentés précédemment, avec des paramètres réalistes pour un canal massive MIMO.

Les quantités considérées sont la mesure empirique $\mu_N = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \delta_{s_i}$ des SINR, qui donne la distribution globale des SINR des utilisateurs, et le minimum $\min_{i \in \{1, \dots, K\}} s_i$ des SINR, qui donne le SINR de l'utilisateur qui a le moins bon signal. Comme ces deux variables aléatoires sont des fonctions continues des $\{s_i\}$, leur comportement asymptotique est donné directement par le TCL de Prop. 1. La figure 1 compare les distributions de la mesure empirique et du minimum, moyennées sur un grand nombre de réalisations des $\{s_i\}$, avec leur expression théorique. On observe un bon accord entre simulations et résultats asymptotiques.

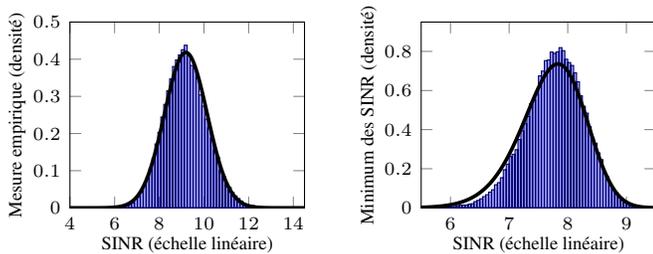


FIGURE 1 – Simulation de la distribution des SINR pour $N = 100$, $K = 10$ et $\sigma^2 = 0.1$. Le graphique de gauche représente la distribution empirique des $\{s_i\}_{i=1}^K$, superposée sur 5000 itérations; la distribution limite est $\mathcal{N}(m_N^{(1)}, m_N^{(2)}/N)$ (Théorème 1). Le graphique de droite représente la distribution du minimum des $\{s_i\}_{i=1}^K$ sur 50000 itérations; la distribution limite est l'expression du minimum de K gaussiennes iid $\mathcal{N}(m_N^{(1)}, m_N^{(2)}/N)$ (Théorème 1).

4 Régime à grand nombre d'utilisateurs

Dans cette section, nous considérons le régime à grand nombre d'antennes et grand nombre d'utilisateurs, où $N, K \rightarrow \infty$,

$N/(K-1) \rightarrow c \in \mathbb{R}_*^+$.

4.1 Comportement de la mesure empirique

On définit $s_i^\circ = \sqrt{\frac{N}{m_N^{(2)}}}(s_i - m_N^{(1)})$, qui est la version de s_i recentrée par sa moyenne asymptotique et divisée par sa variance asymptotique. Soit Ω l'espace de probabilité des suites ω de matrices aléatoires $\mathbf{X}_{N_i, K_i} \in \mathbb{C}^{N_i \times K_i}$ de taille grandissante : $\omega = \{\mathbf{X}_{N_1, K_1}, \mathbf{X}_{N_2, K_2}, \dots\}$, avec $N_i, K_i \rightarrow \infty$ et $N_i/(K_i - 1) \rightarrow c$ pour $i \rightarrow \infty$.

On définit la distribution empirique des $\{s_i^\circ\}_{i=1}^K$ comme la mesure de probabilité aléatoire :

$$\mu_{K, \omega} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta_{s_k^\circ(\omega)}. \quad (4)$$

Le théorème suivant montre que $\mu_{K, \omega}$ converge presque sûrement vers une gaussienne dans le régime à grand nombre d'antennes et grand nombre d'utilisateurs.

Théorème 2. Dans le régime $K, N \rightarrow \infty$, avec $c_N \rightarrow c \in]0, \infty[$, $\mu_{K, \omega}$ converge en distribution vers $\mathcal{N}(0, 1)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Éléments de preuve La preuve de Théorème 2 se base sur Théorème 1. En effet, Théorème 1 est aussi valable dans le régime $K \rightarrow \infty$, et dans ce cas le TCL donne le comportement des \hat{K} premiers termes $\{s_i\}_{i=1}^{\hat{K}}$ pour tout \hat{K} fini. Soit $\phi_{K, \omega}(u) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{i u s_k^\circ(\omega)}$ la fonction caractéristique de $\mu_{K, \omega}$. Grâce au TCL précédent appliqué pour $\hat{K} = 1$ et $\hat{K} = 2$, on peut obtenir pour tout u les approximations suivantes des deux premiers moments de $\phi_{K, \omega}(u)$:

$$\mathbb{E}[\phi_{K, \omega}(u)] = e^{-u^2/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K^{1/4}}\right) \quad (5)$$

$$\text{Var}(\phi_{K, \omega}(u)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{K^{1/4}}\right) \quad (6)$$

Par l'inégalité de Chebychev, (5) et (6) impliquent la convergence en probabilité de $\mu_{K, \omega}$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$. On remarque ensuite que la sous-suite $\phi_{\alpha_n, \omega}(u)$, avec $\alpha_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$ pour tout $\alpha > 1$ converge presque sûrement vers $\mathcal{N}(0, 1)$. On conclut en majorant la différence entre $\phi_{K, \omega}(u)$ et $\phi_{\alpha_n, \omega}(u)$.

4.2 Distribution des débits individuels

Le théorème 2 peut être appliqué au calcul de la distribution des débits individuels des utilisateurs. Dans notre modèle de signaux gaussiens, le débit maximum atteignable pour l'utilisateur i est $R_i = \log(1 + s_i)$. Soit $F_{K, \omega}(R)$ la fonction de répartition des débits

$$F_{K, \omega}(R) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\{\log(1 + s_k(\omega)) \leq R\}}. \quad (7)$$

Une application simple de Théorème 2 donne :

Corollaire 1. Soit $R_K(\sigma^2, q)$ défini comme

$$R_K(\sigma^2, q) = \log \left(1 + m_N^{(1)} + \sqrt{\frac{m_N^{(2)}}{N}} \Phi^{-1}(q) \right) \quad (8)$$

avec Φ^{-1} la réciproque de la fonction de répartition gaussienne standard $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$. Alors, dans le régime $N, K \rightarrow \infty$ avec $c_N \rightarrow c \in]0, \infty[$, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$F_{K,\omega}(R_K(\sigma^2, q)) \xrightarrow{a.s.} q. \quad (9)$$

Le corollaire 1 affirme en particulier que, pour N, K suffisamment grands, une proportion q d'utilisateurs a un débit en-dessous du débit cible $R_K(\sigma^2, q)$.

4.3 Illustrations et simulations

Le comportement de la mesure empirique des SINR donné par le théorème 2 est comparé aux simulations en figure 2. Les quantiles $R_K(\sigma^2, q)$ de la fonction de répartition des débits des utilisateurs est représentée en figure 3 pour des valeurs différentes de q .

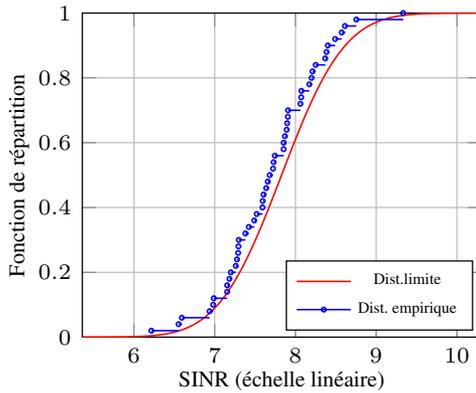


FIGURE 2 – Simulation de la fonction de répartition empirique des $\{s_i\}_{i=1}^K$ pour $N = 200$, $K = 50$ et $\sigma^2 = 0.1$. La distribution limite est $\mathcal{N}(m_N^{(1)}, m_N^{(2)}/N)$ (Théorème 2).

Conclusion et perspectives

Ainsi, nous avons montré que les SINR d'un canal à accès multiple de Rayleigh fluctuent comme des gaussiennes indépendantes dans le régime $N \rightarrow \infty$, K restant fixé. De plus, nous avons vu que dans le régime $N, K \rightarrow \infty$, $N/(K-1) \rightarrow c \in \mathbb{R}_*^+$, la distribution des SINR tend vers une gaussienne de même moyenne et variance que celle obtenue dans le régime précédent. Ces résultats permettent de dériver la distribution des débits des utilisateurs et montrent une très bonne cohérence avec les simulations numériques.

La généralité de l'approche théorique utilisée ici permet des extensions à l'étude de modèles plus réalistes (e.g canaux de

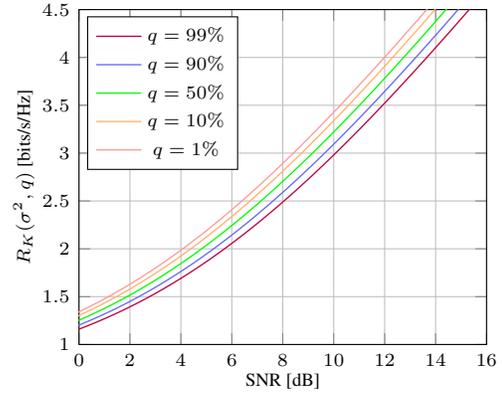


FIGURE 3 – Valeurs asymptotiques des quantiles $q = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$ des débits des utilisateurs (Corollaire 1), en fonction du rapport signal sur bruit (SNR) $1/\sigma^2$, pour $N = 200$ et $K = 50$.

Rice, corrélations entre antennes). Un cas intéressant mais légèrement plus complexe serait de considérer que les puissances du signal diffèrent d'un utilisateur à l'autre, à cause de la différence de distance entre les utilisateurs et la station de base ; il faudrait pour cela adapter l'approche étant donné que dans ce cas les SINR n'ont plus la même moyenne. L'étude d'autres modèles par l'approche présentée ici pourrait permettre de comparer et d'optimiser différentes stratégies de décodage et/ou précodage du point de vue de la distribution de la qualité de service. Nous étudierons ces perspectives dans un travail futur.

Références

- [1] E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10, no. 6, pp. 585–595, 1999.
- [2] D. Tse et S. Hanly, "Linear multiuser receivers : Effective interference, effective bandwidth and user capacity," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 2, 1999.
- [3] R. Couillet, M. Debbah, et J. W. Silverstein, "A deterministic equivalent for the analysis of correlated mimo multiple access channels," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 6, pp. 3493–3514, 2011.
- [4] T. L. Marzetta, "Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 9, no. 11, pp. 3590–3600, 2010.
- [5] J. Hoydis, S. ten Brink, et M. Debbah, "Massive MIMO in the UL/DL of cellular networks : How many antennas do we need?," (to appear in) *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2013.
- [6] A. Kammoun, M. Kharouf, W. Hachem, et J. Najim, "A central limit theorem for the SINR at the LMMSE estimator output for large dimensional signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 11, 2009.
- [7] S. Chatterjee, "Fluctuations of eigenvalues and second-order Poincaré inequalities," *Probability Theory and Related Fields*, vol. 143, pp. 1–40, 2009.
- [8] L. A. Pastur et M. Shcherbina, *Eigenvalue distribution of large random matrices*, vol. 171. Amer Mathematical Society, 2011.