

Indexation d'images texturées fondée sur le modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne

Nour-Eddine LASMAR^{1,2}, Yannick BERTHOUMIEU²,

¹ENSTA Bretagne, Lab-STICC, UMR CNRS 6285
2 rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9, France

²Université de Bordeaux, Laboratoire IMS, UMR CNRS 5218
Groupe Signal et Image, 351 cours de la libération, 33400 Talence, France

noureddine.lasmar@ensta-bretagne.fr, yannick.berthoumieu@ims-bordeaux.fr

Résumé – Dans ce papier, nous nous intéressons à l'indexation d'images texturées dans le contexte des modèles probabilistes multivariés. En utilisant une transformée en ondelettes, la dépendance entre les coefficients des sous-bandes peut être caractérisée à l'aide d'un modèle stochastique multivarié. Nous introduisons le modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne (GC-MAGG) pour la caractérisation de la dépendance spatiale des coefficients d'ondelettes en prenant en compte l'éventuelle asymétrie de leurs distributions marginales. Le modèle proposé est validé en utilisant un test statistique d'adéquation aux statistiques jointes observées. L'expression analytique de la divergence de Jeffreys entre deux distributions à copule Gaussienne est calculée afin de mesurer la similarité et utiliser le modèle proposé dans une application de classification d'images. En comparaison avec d'autres modèles de la littérature, des bonnes performances sont obtenues en recherche d'images par contenu textural en utilisant le modèle proposé GC-MAGG.

Abstract – This paper presents a new approach for texture image retrieval based on multivariate modeling of wavelet coefficients. Using a wavelet transform, the intra-band dependence is characterized by Gaussian copula based multivariate asymmetric generalized Gaussian distribution (GC-MAGG). We use a multivariate statistical goodness of fit test to validate the adequation of GC-MAGG distribution to observed data. The closed form of Jeffreys divergence between Gaussian copula based distributions is derived, which lead to measure similarity and to use the proposed model in classification applications. Experimental results on VisTex image database show significant improvements in retrieval rate using GC-MAGG distribution compared to other known state-of-the-art models.

1 Introduction

Depuis l'avènement du numérique et la multiplication des moyens d'imagerie optique, infrarouge, sonar ou radar, la texture a toujours été au centre de nombreux travaux scientifiques. Que ce soit pour traiter des problèmes d'analyse, de compression ou de synthèse d'images, le thème « texture » a toujours connu un intérêt soutenu. De ce fait, il est toujours d'actualité de définir des modèles mathématiques suffisamment généraux pour couvrir toute la diversité texturale observable dans les images naturelles. Dans le contexte d'indexation d'images texturées, l'enjeu est d'utiliser un bon modèle pour la texture et une mesure de similarité associée.

Dans un cadre Bayésien, la minimisation de l'erreur de classification pour l'indexation d'images est asymptotiquement équivalente à l'emploi de la divergence de Kullback-Leibler (ou de Jeffreys qui en est la version symétrique) pour mesurer la similarité entre les distributions des lois de probabilité qui décrivent les images à indexer [1]. Ces dernières années, il a été montré que l'analyse des coefficients obtenus en utilisant des transformées multi-échelles et multi-orientations est adaptée pour représenter les textures. Afin de caractériser ces coefficients, de

nombreux modèles univariés ont été proposés tels que la distribution Gaussienne généralisée (GG) [2] et la loi Gaussienne généralisée asymétrique (AGG) [3] qui est une généralisation de la distribution GG caractérisant l'éventuelle asymétrie des distributions marginales des coefficients d'ondelettes. Cependant, l'utilisation des modèles univariés pour les lois marginales des coefficients d'ondelettes considère l'indépendance intra-bande, inter-orientations et inter-échelles alors que ces coefficients ne sont pas indépendants [4].

Nous proposons dans ce travail d'utiliser le modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne (GC-MAGG) pour la caractérisation de la dépendance spatiale des coefficients d'ondelettes. Ce modèle est une extension au cas multivarié de la distribution AGG que nous avons déjà proposée pour la modélisation des statistiques marginales des coefficients d'ondelettes dans [3]. Nous présenterons le modèle GC-MAGG et nous montrerons son adéquation aux statistiques jointes observées. Ensuite, nous calculerons l'expression analytique de divergence de Jeffreys entre deux distributions GC-MAGG afin d'utiliser le modèle proposé dans un cadre Bayésien de classification d'images. Enfin nous mettrons en évidence les bonnes performances du modèle proposé en terme

du taux moyen de bonne détection sur la base d'images VisTex par rapport à d'autres modèles de la littérature.

2 Modèle stochastique multivarié de la texture

Trois types de dépendances peuvent être prises en considération pour la modélisation jointe des coefficients d'ondelettes : la dépendance intra-bande, inter-orientations et inter-échelles. Cependant, dans le cas d'une transformée en ondelettes orthogonales, des tests montrent la prédominance de la dépendance intra-bande par rapport à celles inter-orientations et inter-échelles [5]. Dans cette étude, nous cherchons à modéliser la dépendance intra-bande des coefficients d'ondelettes en considérant un voisinage glissant de taille $p \times q = d$. Une sous-bande est alors vue comme une réalisation d'un vecteur aléatoire $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ de dimension d . Afin de décrire la loi multivariée que suit ce vecteur, nous proposons d'utiliser la loi GC-MAGG.

2.1 Copule Gaussienne

En utilisant le théorème de Sklar [6], la densité de probabilité jointe d'un vecteur aléatoire \vec{X} s'écrit

$$f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) \quad (1)$$

où $c : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ est la densité de la copule de \vec{X} , f_i et $F_i, i = 1, \dots, d$ sont respectivement les lois marginales et les fonctions de répartition marginales des composantes de \vec{X} . Plusieurs copules ont été définies dans la littérature pour décrire les différents types de dépendance entre les composantes d'un vecteur aléatoire, telles la copule de Clayton, de Gumbel, de Franck, de Student-t ou la copule Gaussienne [7]. Pour la modélisation de la dépendance intra-bande des coefficients d'ondelettes, nous proposons d'utiliser la copule Gaussienne et nous validons ce choix en étudiant l'ajustement du modèle proposé GC-MAGG aux statistiques jointes observées. L'expression de la distribution GC-MAGG est donnée par :

$$f_{GC-MAGG}(\vec{x}) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) \quad (2)$$

où c est la densité de la copule Gaussienne [8] définie par :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\vec{y}^t (\Sigma^{-1} - I_d) \vec{y}}{2}\right)$$

I_d est la matrice identité, et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_d)^t$ est le vecteur normal tel que $y_i = \phi^{-1}(u_i), i = 1, \dots, d$, ϕ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0, 1)$.

$f_i, i = 1, \dots, d$ sont des distributions AGG [3] et $F_i, i = 1, \dots, d$ leurs fonctions de répartition définies par :

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{\beta_i}{(\alpha_{iL} + \alpha_{iR}) \Gamma(1/\beta_i)} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha_{iL}}\right)^{\beta_i}\right) & x < 0 \\ \frac{\beta_i}{(\alpha_{iL} + \alpha_{iR}) \Gamma(1/\beta_i)} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha_{iR}}\right)^{\beta_i}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{et } F_i(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_{iL}}{\alpha_{iL} + \alpha_{iR}} \left(1 - \gamma\left(1/\beta_i, (-x/\alpha_{iL})^{\beta_i}\right)\right) & x < 0 \\ \frac{\alpha_{iL}}{\alpha_{iL} + \alpha_{iR}} \left(1 + \gamma\left(1/\beta_i, (x/\alpha_{iR})^{\beta_i}\right)\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma usuelle, $\gamma(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma incomplète.

Les hyperparamètres du modèle GC-MAGG sont donc $\{\Sigma; \alpha_{iL}, \alpha_{iR}, \beta_i, i = 1, \dots, d\}$, où Σ est la matrice de covariance de la densité de la copule Gaussienne c et $\{\alpha_{iL}, \alpha_{iR}, \beta_i, i = 1, \dots, d\}$ sont les paramètres des lois marginales AGG. Les hyperparamètres sont estimés en utilisant la méthode d'inférence des fonctions marginales (IFM) [9].

2.2 Adéquation aux statistiques jointes

Afin de valider le modèle GC-MAGG, nous proposons d'étudier son adéquation aux statistiques jointes intra-bande des coefficients d'ondelettes. Dans le cas particulier des modèles multivariés à copule Gaussienne, le test statistique d'adéquation se ramène à tester conjointement l'adéquation des marginales et la *Gaussianité* multivariée. Nous proposons d'employer conjointement le test de Kolmogorov-Smirnov pour tester l'adéquation de la loi AGG aux distributions marginales et le test de *Gaussianité* multivariée de Doornik-Hansen [10] pour tester l'adéquation de la copule Gaussienne.

Nous considérons la base d'images VisTex composée de 40 classes d'images texturées de taille 512×512 qui ont été fréquemment utilisées dans des travaux antérieurs (par exemple dans [2, 11]); chaque image est divisée en 16 imassettes de taille 128×128 sans recouvrement, ce qui génère 640 images de textures. Nous utilisons une décomposition en ondelette de Daubechies 'db2' à 3 échelles des 640 images de VisTex, ce qui génère 5760 sous-bandes sur lesquelles nous testons l'adéquation de l'*a priori* GC-MAGG aux statistiques jointes intra-bande. En considérant différentes dimensions du voisinage d , nous calculons le pourcentage du rejet de l'hypothèse d'adéquation du modèle GC-MAGG aux statistiques jointes intra-bande (tableau 1). De bonnes performances ont été obtenues en terme d'acceptation de l'*a priori* GC-MAGG (moins que 12% de rejet de l'*a priori* pour les cas bi, tri et quadri-variés). On note qu'en augmentant la dimension, le modèle est de moins en moins accepté.

2.3 Métrique probabiliste

Dans une approche probabiliste d'indexation d'images, la divergence de Jeffreys JD (version symétrisée de la divergence de Kullback-Leibler KLD) est utilisée pour mesurer la similarité entre deux distributions paramétriques.

TABLE 1 – Pourcentages de rejet (avec incertitude = 0.01) de l'hypothèse d'adéquation du modèle GC-MAGG aux statistiques jointes intra-bande.

d	Pourcentage de rejet	d	Pourcentage de rejet	d	Pourcentage de rejet
1 × 2	6.6	4 × 1	10.9	4 × 2	15.5
2 × 1	6.5	2 × 2	10.8	3 × 3	16.5
1 × 3	9.2	2 × 3	13.7	3 × 4	18.6
3 × 1	9.0	3 × 2	13.8	4 × 3	18.5
1 × 4	11.6	2 × 4	15.7	4 × 4	20.4

Nous proposons de calculer l'expression analytique de la divergence de Jeffreys entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne et nous donnons son expression dans le cas particulier de la distribution GC-MAGG.

Soient $f(\vec{x}; \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_d^{(1)}, \Sigma_1)$ et $g(\vec{x}; \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_d^{(2)}, \Sigma_2)$ deux distributions multivariées à copule Gaussienne et aux lois marginales $f_i(x_i; \theta_i^{(1)})$ et $g_i(x_i; \theta_i^{(2)})$ respectivement ; Σ_1 et Σ_2 étant les matrices de covariance de la copule Gaussienne associée aux distributions f et g respectivement. Nous avons :

$$f(\vec{x}; \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_d^{(1)}, \Sigma_1) = \frac{1}{|\Sigma_1|^{1/2}} \exp \frac{-\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y}}{2} \prod_{i=1}^d f_i(x_i; \theta_1^{(1)})$$

$$g(\vec{x}; \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_d^{(2)}, \Sigma_2) = \frac{1}{|\Sigma_2|^{1/2}} \exp \frac{-\vec{z}^t (\Sigma_2^{-1} - I_d) \vec{z}}{2} \prod_{i=1}^d g_i(x_i; \theta_1^{(2)})$$

$$\text{où } \vec{y}^t = (\phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \phi^{-1}(F_d(x_d))) \text{ et } \vec{z}^t = (\phi^{-1}(G_1(x_1)), \dots, \phi^{-1}(G_d(x_d))).$$

La divergence de Kullback-Leibler entre f et g est

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} d\vec{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}} d\vec{x} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{z}^t (\Sigma_2^{-1} - I_d) \vec{z}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{\prod_{i=1}^d f_i(x_i; \theta_1^{(1)})}{\prod_{i=1}^d g_i(x_i; \theta_1^{(2)})} d\vec{x} \end{aligned} \quad (3)$$

En calculant chacun des 4 termes de l'Équation 3, nous avons :

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}} d\vec{x} = 0.5 \ln \frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} \quad (4)$$

b) Ensuite, en employant la relation $\text{tr}(a) = a$ si a est un scalaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \text{tr} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} (\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y} f(\vec{x})) d\vec{x} \\ &= 0.5 \text{tr} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y} \vec{y}^t d\vec{x} \right) \\ &= 0.5 \text{tr} \left((\Sigma_1^{-1} - I_d) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \vec{y} \vec{y}^t d\vec{x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

et nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \vec{y} \vec{y}^t d\vec{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} N(\vec{y}; 0, \Sigma_1) \vec{y} \vec{y}^t d\vec{y} = \Sigma_1 \end{aligned}$$

où $N(\vec{y}; 0, \Sigma_1)$ est une distribution normale multivariée et le vecteur \vec{y} est normal et de covariance Σ_1 . Par suite, l'Équation 5 devient

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t (\Sigma_1^{-1} - I_d) \vec{y}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= 0.5 \text{tr} \left((\Sigma_1^{-1} - I_d) \Sigma_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

c) De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{z}^t (\Sigma_2^{-1} - I_d) \vec{z}}{2} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= 0.5 \text{tr} \left((\Sigma_2^{-1} - I_d) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \vec{z} \vec{z}^t d\vec{x} \right) \\ &= 0.5 \text{tr} \left((\Sigma_2^{-1} - I_d) \Sigma_1 \right) \\ &= 0.5 (\text{tr} (\Sigma_2^{-1} \Sigma_1) - d) \end{aligned} \quad (7)$$

d) Le développement du quatrième terme de l'Équation 3 donne

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{\prod_{i=1}^d f_i(x_i; \theta_1^{(1)})}{\prod_{i=1}^d g_i(x_i; \theta_1^{(2)})} d\vec{x} \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \ln \frac{f_i(x_i; \theta_1^{(1)})}{g_i(x_i; \theta_1^{(2)})} d\vec{x} \\ &= \sum_{i=1}^d KLD \left(f_i(x_i; \theta_1^{(1)}) \parallel g_i(x_i; \theta_1^{(2)}) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Finalement, en sommant Équation 4, Équation 6, Équation 7 et Équation 8 nous obtenons

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) &= \sum_{i=1}^d KLD \left(f_i(x_i; \theta_1^{(1)}) \parallel g_i(x_i; \theta_1^{(2)}) \right) \\ &\quad + 0.5 \ln \left(\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} \right) + 0.5 \text{tr} \left((\Sigma_2^{-1} \Sigma_1) - d \right) \end{aligned} \quad (9)$$

TABLE 2 – Taux moyen de bonne détection (en %) sur la base d’images VisTex.

d	GG[2]	AGG[3]	GC-MAGG	MGmix[12]	MGG[11]
1 × 1	79.0	79.8			
2 × 2			84.1	80.6	73.5
3 × 3			83.5	79.1	61.2
4 × 4			82.2	77.8	52.3

Par conséquent, la divergence de Jeffreys entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne est

$$JD(f \parallel g) = \sum_{i=1}^d JD \left(f_i(x_i; \theta_i^{(1)}) \parallel g_i(x_i; \theta_i^{(2)}) \right) + 0.5 \left(\text{tr}(\Sigma_2^{-1} \Sigma_1) + \text{tr}(\Sigma_2^{-1} \Sigma_2) \right) - d \quad (10)$$

Cette expression est composée d’un premier terme qui est la somme des JDs entre les lois marginales et le deuxième terme est la JD entre deux distributions Gaussiennes multivariées correspondant à la *Gaussianisation* des lois marginales. C’est une expression générique et peut être calculée pour différentes lois marginales ; dans le cas de la GC-MAGG, les lois marginales sont des AGG dont la JD est donnée dans [3].

3 Résultats

Pour évaluer les performances en recherche d’images par contenu textural, nous considérons la base d’images VisTex. Nous rapportons dans le tableau 2 le taux moyen de bonne détection pour différents modèles stochastiques. Nous comparons les performances obtenues avec le modèle multivarié GC-MAGG, les modèles univarié GG, AGG et les modèles multivariés de mélange de Gaussiennes multivariées (MGmix) [12] et la Gaussienne généralisée multivariée (MGG) [11]. Nous employons la divergence de Jeffreys pour mesurer la similarité dans le cas GG, AGG, GC-MAGG et MGmix tandis que la distance géodésique est considérée pour le modèle MGG. Nous observons un gain d’environ 5% en utilisant le modèle multivarié GC-MAGG par à rapport aux modèles univariés GG et AGG. En considérant différentes dimensions, les meilleures performances d’indexation des modèles multivariés sont obtenues avec le modèle GC-MAGG. Nous observons aussi qu’en augmentant la dimension, les performances de tous les modèles multivariés baissent. Cela est dû à la difficulté des modèles à s’adapter aux statistiques jointes quand la dimension du vecteur observé est grande. Dans notre étude, la dimension $d = 2 \times 2$ est un bon compromis pour l’obtention des bonnes performances en indexation tout en utilisant un modèle adéquat aux statistiques jointes.

4 Conclusion

Nous avons proposé la distribution GC-MAGG pour modéliser la dépendance spatiale des coefficients d’ondelettes. C’est

une extension au cas multivarié de la distribution AGG en utilisant la copule Gaussienne. Le modèle a été validé en utilisant un test statistique d’adéquation aux données observées. Nous avons calculé l’expression analytique de la divergence de Kullback-Leibler et par conséquent celle de Jeffreys entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne. Les résultats en recherche d’images par contenu textural sur la base VisTex ont montré les bonnes performances de la distribution GC-MAGG pour la caractérisation de la texture dans le domaine des ondelettes.

Références

- [1] N. Vasconcelos et A. Lippman, “A probabilistic architecture for content-based image retrieval,” in *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - CVPR 2000*, pp. 216–221.
- [2] M. N. Do et M. Vetterli, “Wavelet-based texture retrieval using generalized Gaussian density and Kullback-Leibler distance,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 2, pp. 146–158, Feb. 2002.
- [3] N.-E. Lasmari, Y. Stitou, et Y. Berthoumieu, “Multiscale skewed heavy tailed model for texture analysis,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2009*, pp. 2281–2284.
- [4] J. Liu et P. Moulin, “Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no. 11, pp. 1647–1658, Nov. 2001.
- [5] N.-E. Lasmari et Y. Berthoumieu, “Gaussian copula multivariate modeling for image texture retrieval using wavelet transforms,” *IEEE Transactions on Image Processing*, en révision.
- [6] A. Sklar, “Random variables, joint distribution functions, and copulas,” *Kybernetika*, vol. 9, no. 6, pp. 449–460, 1973.
- [7] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, 2nd revised edition. New York : Springer-Verlag, 2006.
- [8] I. Zezula, “On multivariate Gaussian copulas,” *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 139, no. 11, pp. 3942–3946, Nov. 2009.
- [9] H. Joe, “Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 94, no. 2, pp. 401–419, Jun. 2005.
- [10] A. Doornik and H. Hansen, “An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 70, pp. 927–939, 2008.
- [11] G. Verdoolaege et P. Scheunders, “Geodesics on the Manifold of Multivariate Generalized Gaussian Distributions with an Application to Multicomponent Texture Discrimination,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 95, no. 3, pp. 265–286, May 2011.
- [12] N. Vasconcelos, “On the Efficient Evaluation of Probabilistic Similarity Functions for Image Retrieval,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 7, pp. 1482–1496, Jul. 2004.