

Caractérisation garantie de régions de confiance non-asymptotiques

Michel KIEFFER^{1,2}, Éric WALTER¹

¹L2S - CNRS - SUPELEC - Univ Paris-Sud, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

²Institut Universitaire de France, 103 bld Saint-Michel, 75005 Paris

{kieffer, walter}@lss.supelec.fr

Résumé – Récemment, Campi *et al.* ont proposé deux familles de méthodes (LSCR et SPS) pour caractériser la précision de l’estimation à partir de mesures bruitées de la valeur des paramètres de modèles. Ces méthodes permettent d’obtenir des régions de confiance *exactes* et *non-asymptotiques*, en faisant uniquement l’hypothèse que les échantillons de bruit sont indépendants et suivent une distribution symétrique. Cependant, la caractérisation numérique de ces régions de confiance est loin d’être triviale.

Cet article montre que l’analyse par intervalles, utilisée par ailleurs pour aborder des problèmes d’estimation à erreurs bornées, peut être employée pour caractériser de façon garantie les régions de confiance définies par LSCR ou SPS.

Abstract – Recently, Campi *et al.* have proposed two approaches (LSCR and SPS) to define *exact* and *non-asymptotic* confidence regions for the estimation from noisy measurements of the parameters of models. The main hypothesis of these techniques is that the noise samples corrupting the data are independent and symmetrically distributed. The numerical characterisation of the confidence regions defined by LSCR or SPS remains however, an open problem.

This paper shows that interval analysis, previously used in bounded-error parameter estimation problems, may be employed to characterize, in a guaranteed way, confidence regions as defined by LSCR and SPS.

1 Introduction

Quand on veut estimer la valeur $\hat{\mathbf{p}}$ du vecteur des paramètres \mathbf{p} d’un modèle dont la sortie est $\mathbf{y}_m(\mathbf{p})$ à partir du vecteur de mesures \mathbf{y} , tous deux de dimension n , il est souvent indispensable de disposer d’une indication de la qualité de l’estimée obtenue.

Cet article montre que l’analyse par intervalles [5] peut être employée pour caractériser des régions de confiance exactes et non-asymptotiques définies par les méthodes LSCR (*Leave out Sign-dominant Correlation Regions*) [1, 3] et SPS (*Sign-perturbed sums*) [2] récemment introduites par Campi *et al.* Ces deux approches sont brièvement rappelées au paragraphe 2. Le principe de la caractérisation à l’aide d’outils de l’analyse par intervalles est introduit au paragraphe 3. Des exemples sont traités au paragraphe 4¹.

2 Régions de confiance

Nous supposons que le système produisant les données \mathbf{y} appartient à l’ensemble des modèles et notons son vecteur de paramètres par \mathbf{p}^* . Cette hypothèse donne un sens à la notion de *vraie* valeur pour le vecteur des paramètres.

Dans [1, 2, 3], deux nouvelles approches nommées LSCR et SPS sont introduites pour obtenir une caractérisation exacte de

l’incertitude paramétrique dans des conditions non-asymptotiques. Une des caractéristiques les plus frappantes de ces approches est qu’elles évitent un grand nombre des hypothèses habituelles sur les bruits de mesure. Il n’est, par exemple, pas nécessaire de supposer que le bruit est gaussien (ou qu’il suit toute autre distribution de probabilité définie *a priori*, d’ailleurs). Il n’est pas non plus nécessaire de supposer qu’une borne δ sur la taille des erreurs acceptables est connue. Les approches LSCR et SPS reposent sur la seule hypothèse que les échantillons du bruit sont distribués de façon indépendante, et que leur distribution est symétrique par rapport à zéro.

LSCR et SPS définissent alors, *sans approximation*, des régions Θ auxquelles \mathbf{p}^* appartient avec une probabilité donnée.

2.1 LSCR

Soit $\varepsilon_t(\mathbf{p})$ l’erreur de prédiction, telle que $\varepsilon_t(\mathbf{p}^*)$ soit la réalisation du bruit affectant les données à l’instant t . La procédure permettant de calculer une région de confiance non-asymptotique est la suivante :

1. Choisir deux entiers $r \geq 0$ et $q \geq 0$.

2. Pour $t = 1 + r, \dots, k + r = n$, calculer

$$c_{t-r,r}^\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_{t-r}(\mathbf{p}) \varepsilon_t(\mathbf{p}), \quad (1)$$

3. Calculer

$$s_{i,r}^\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{k \in \mathbb{I}_i} c_{k,r}^\varepsilon(\mathbf{p}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

¹. Ce travail a été en partie financé par l’ANR CPP.

où \mathbb{I}_i est un sous-ensemble de l'ensemble des indices \mathbb{I} et la collection \mathbb{G} de ces sous-ensembles \mathbb{I}_i , $i = 1, \dots, m$, forme un groupe pour l'opération de différence symétrique $(\mathbb{I}_i \cup \mathbb{I}_j) - (\mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_j) \in \mathbb{G}$.

4. Caractériser l'ensemble $\Theta_{r,q}^\varepsilon = \Theta_{r,q}^{\varepsilon,1} \cap \Theta_{r,q}^{\varepsilon,2}$, avec pour $j = 1, 2$,

$$\Theta_{r,q}^{\varepsilon,j} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{P} \text{ tel que } \sum_{i=1}^m \tau_i^{\varepsilon,j}(\mathbf{p}) \geq q \right\}, \quad (3)$$

où \mathbb{P} est le domaine de recherche *a priori* pour \mathbf{p} et où

$$\tau_i^{\varepsilon,j}(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (-1)^j s_{i,r}^\varepsilon(\mathbf{p}) \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

L'ensemble $\Theta_{r,q}^\varepsilon$ contient toutes les valeurs de \mathbf{p} pour lesquelles *au moins* q fonctions $s_{i,r}^\varepsilon(\mathbf{p})$ sont positives et *au moins* q sont négatives. La probabilité que \mathbf{p}^* appartienne à $\Theta_{r,q}^\varepsilon$ est *exactement* égale à $1 - 2q/m$. La taille et la forme de $\Theta_{r,q}^\varepsilon$ dépendent des valeurs de q et de r , ainsi que du groupe \mathbb{G} et du nombre m d'éléments qu'il contient. Une procédure pour générer un groupe de taille appropriée est suggérée dans [4].

2.2 SPS

SPS [2] repose sur les mêmes hypothèses sur les bruits de mesure que LSCR. Il fournit également une région de confiance à laquelle \mathbf{p}^* appartient avec probabilité donnée, en exploitant la symétrie des distributions des bruits et l'indépendance des réalisations. SPS est applicable pour des modèles à réponse impulsionnelle finie (RIF), tels que

$$y_t = \varphi_t^T \mathbf{p}^* + w_t, t = 1, \dots, n, \quad (5)$$

avec φ_t un vecteur de régresseur connu ne dépendant pas des paramètres inconnus. SPS définit une région de confiance non-asymptotique pour \mathbf{p}^* contenant l'estimée au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{p}}$, qui est la solution des *équations normales*

$$\sum_{t=1}^n \varphi_t (y_t - \varphi_t^T \hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Pour un vecteur \mathbf{p} générique, considérons

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{p}) = \sum_{t=1}^n \varphi_t (y_t - \varphi_t^T \mathbf{p}), \quad (7)$$

ainsi que les *sign-perturbed sums*

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{p}) = \sum_{t=1}^n \alpha_{i,t} \varphi_t (y_t - \varphi_t^T \mathbf{p}), \quad (8)$$

où $i = 1, \dots, m-1$ et $\alpha_{i,t}$ sont des signes aléatoires i.i.d., avec $\Pr(\alpha_{i,t} = -1) = 0.5$ et $\Pr(\alpha_{i,t} = 1) = 0.5$ et

$$z_i(\mathbf{p}) = \|\mathbf{s}_i(\mathbf{p})\|_2^2, i = 0, \dots, m-1. \quad (9)$$

Une région de confiance Σ_q est obtenue en caractérisant l'ensemble de toutes les valeurs de \mathbf{p} telles que $z_0(\mathbf{p})$ n'est pas

parmi les q plus grandes valeurs de $(z_i(\mathbf{p}))_{i=0}^{m-1}$. Dans [2], il est montré que \mathbf{p}^* appartient à Σ_q avec une probabilité *exacte* de $1 - q/m$. L'ensemble Σ_q peut être défini comme

$$\Sigma_q = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{P} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{m-1} \tau_i(\mathbf{p}) \geq q \right\} \quad (10)$$

où

$$\tau_i(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_i(\mathbf{p}) - z_0(\mathbf{p}) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11)$$

Ceci est justifié par le fait que si $\sum_{i=1}^{m-1} \tau_i(\mathbf{p}) \geq q$, alors $\tau_i(\mathbf{p}) = 1$ pour au moins q parmi les $m-1$ fonctions $\tau_i(\mathbf{p})$. Ainsi, il y a au moins q fonctions $z_i(\mathbf{p})$ telles que $z_i(\mathbf{p}) > z_0(\mathbf{p})$ et $z_0(\mathbf{p})$ n'est pas parmi les q plus grandes valeurs de $(z_i(\mathbf{p}))_{i=0}^{m-1}$.

3 Caractérisation garantie

Un aspect essentiel pour une utilisation fiable de LSCR et de SPS est la caractérisation *garantie* et *globale* de ces régions à l'aide d'outils numériques. Cet aspect n'est cependant que rarement abordé en dehors de la communauté s'intéressant à l'estimation à erreurs bornées.

Les régions de confiance introduites par LSCR et SPS sont définies à partir d'ensembles ou d'intersection d'ensembles tels que

$$\Psi_q = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{P} \text{ tel que } \sum_{i=1}^m \tau_i(\mathbf{p}) \geq q \right\}, \quad (12)$$

où $\tau_i(\mathbf{p})$ est une fonction indicatrice

$$\tau_i(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_i(\mathbf{p}) \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (13)$$

et où $f_i(\mathbf{p})$ dépend de la structure du modèle, des mesures, et du vecteur de paramètres \mathbf{p} .

La caractérisation de Ψ_q peut être formulée comme un problème d'*inversion ensembliste* [6]

$$\Psi_q = \mathbb{P} \cap \tau^{-1}([q, m]), \quad (14)$$

avec

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \tau_i(\mathbf{p}), \quad (15)$$

qui peut être résolu efficacement grâce à l'analyse par intervalles [8, 5], à l'algorithme SIVIA et à des techniques de propagation de contraintes intervalles [5].

Pour cela, il est nécessaire d'introduire des fonctions d'inclusion des τ_i 's et par conséquent des fonctions f_i . SIVIA partitionne itérativement l'espace de recherche \mathbb{P} en pavés (vecteurs d'intervalles) pour lesquels il est possible de *prouver* qu'ils appartiennent à Ψ_q , en pavés qui ont une intersection vide avec Ψ_q , et en pavés *indéterminés* pour lesquels il n'est pas possible de conclure. SIVIA découpe les pavés indéterminés jusqu'à ce que leur plus grand côté soit plus petit qu'un paramètre de précision ε .

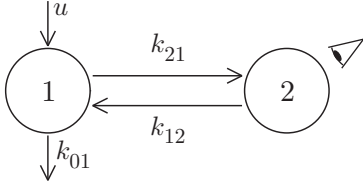


FIG. 1: *Modèle à deux compartiments*

4 Exemples

Un modèle dont la sortie est non-linéaire en les paramètres (NLP) est considéré dans un premier temps avec LSCR. Un modèle à réponse impulsionnelle finie (FIR) est ensuite abordé avec SPS. Tous les calculs ont été réalisés à l'aide d'Intlab [9], une bibliothèque de calcul par intervalles pour Matlab, sur un Intel Core i7 à 3.7 GHz équipé de 8 GO de RAM. Les temps de calcul pourraient être considérablement diminués par une implantation en C++.

4.1 Modèle NLP (LSCR)

Considérons le modèle à deux compartiments représenté sur la figure 1. Sa sortie satisfait

$$y_t = \alpha(\mathbf{p}^*) (\exp(\lambda_1(\mathbf{p}^*)t) - \exp(\lambda_2(\mathbf{p}^*)t)) + w_t, \quad (16)$$

où $\mathbf{p} = (k_{01}, k_{12}, k_{21})^T$,

$$\alpha(\mathbf{p}) = k_{21} / \sqrt{(k_{01} - k_{12} + k_{21})^2 + 4k_{12}k_{21}}, \quad (17)$$

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \left((k_{01} + k_{12} + k_{21}) \right. \quad (18)$$

$$\left. \pm \left((k_{01} - k_{12} + k_{21})^2 + 4k_{12}k_{21} \right)^{-1/2} \right) \quad (19)$$

et où les w_t sont des réalisations de variables i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, pour $t = 0, T, \dots, (n-1)T$. Des mesures ont été générées pour $\mathbf{p}^* = (1, 0.25, 0.5)^T$. La variance du bruit de mesure est $\sigma^2 = 10^{-4}$. La période d'échantillonnage est $T = 0.2$ s, et $n = 64$. Pour faciliter l'illustration, seuls k_{01} et k_{12} sont estimés. La valeur k_{21}^* de k_{21} est supposée connue.

Pour une valeur donnée $\mathbf{p} = (k_{01}, k_{12}, k_{21}^*)^T$ du vecteur des paramètres, les erreurs de prédiction sont $\varepsilon_t(\mathbf{p}) = y_t - y_t^m(\mathbf{p})$, avec $y_t^m(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}) (\exp(\lambda_1(\mathbf{p})t) - \exp(\lambda_2(\mathbf{p})t))$, for $t = 0, T, \dots, (n-1)T$.

L'ensemble $\Theta_{r,q}^\varepsilon$ a été caractérisé à l'aide de LSCR et SIVIA pour $m = 63$, $r = 1$ et $q = 3$, ce qui correspond à une région de confiance à 90 %. Le pavé de recherche initial est $\mathbb{P} = [0, 5] \times [0, 5]$ et $\varepsilon = 0.001$. La figure 2 montre que $\Theta_{r,q}^\varepsilon$ est constituée de deux composantes disjointes, une conséquence de l'absence d'identifiabilité globale de ce modèle, qui n'est que localement identifiable. Les valeurs de k_{01} et de k_{12} peuvent être échangées sans changer la sortie du modèle.

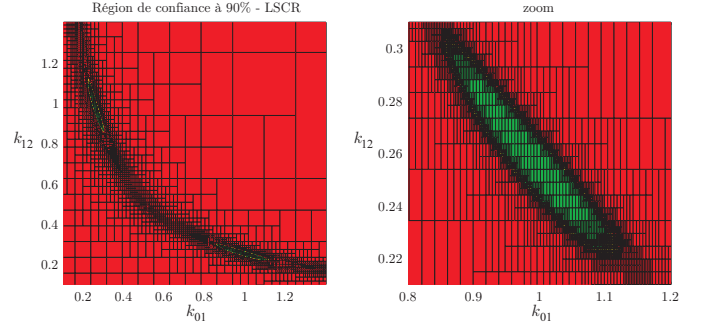


FIG. 2: *Différents zooms sur le pavage de l'espace de recherche $\mathbb{P} = [0, 5] \times [0, 5]$ obtenu dans le cas d'un modèle à deux compartiments pour la caractérisation d'une région de confiance $\Theta_{r,q}^\varepsilon$; les pavés verts sont à l'intérieur de $\Theta_{r,q}^\varepsilon$, les rouges à l'extérieur*

4.2 Modèle RIF (SPS)

Considérons le système

$$y_t = y_t^m(\mathbf{p}^*) + w_t, \quad (20)$$

et le modèle RIF

$$y_t^m(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i u_{t-i}, \quad (21)$$

où $\mathbf{p} = (a_0, \dots, a_{n_a-1})^T$ et $u_t = 0$ pour $t \leq 0$. Pour $t = 1, \dots, n$, les w_t sont des échantillons de bruit i.i.d. On peut mettre (20) sous la forme

$$y_t = \varphi_t^T \mathbf{p}^* + w_t, \quad (22)$$

avec $\varphi_t^T = (u_t, \dots, u_{t-n_a+1})$ et $\mathbf{p}^* = (a_0^*, \dots, a_{n_a-1}^*)^T$.

La caractérisation de Σ_q introduit dans (10) est réalisée avec SIVIA. Pour cela, les fonction d'inclusion pour les τ_i 's sont de la forme

$$[\tau_i](\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \inf([f_i](\mathbf{p})) \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sup([f_i](\mathbf{p})) < 0, \\ [0, 1] & \text{sinon,} \end{cases} \quad (23)$$

où

$$[f_i](\mathbf{p}) = [z_i - z_0](\mathbf{p}) \quad (24)$$

et où $[z_i - z_0](\mathbf{p})$ est une fonction d'inclusion de la différence entre z_i et z_0 , introduites au paragraphe 2.2.

La figure 3 montre le pavage de l'espace de recherche $\mathbb{P} = [-2, 2] \times [-2, 2]$ obtenu pour un modèle à deux paramètres ($n_a = 2$, lorsque $a_0 = 0.2$, $a_1 = 0.3$, $\sigma^2 = 0.25$, $n = 256$, $m = 255$, et $q = 20$). Les pavés rouges ont une intersection vide avec Σ_q , les verts sont inclus dans Σ_q , les jaunes sont indéterminés. Ces derniers sont bisectés à condition que leur plus grand côté soit de taille supérieure à $\varepsilon = 0.01$. L'union des pavés verts et jaunes contient de manière garantie une région de confiance à 92% pour \mathbf{p} .

Des modèles RIF (21) avec $n_a = 20$ paramètres uniformément répartis dans $[-2, 2]^{n_a}$ sont générés pour évaluer les performances de l'approche pour des modèles comportant un

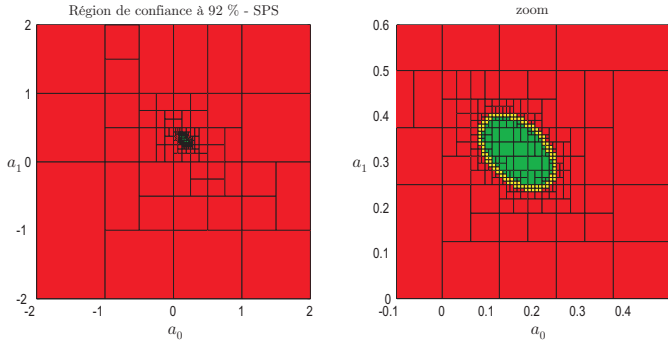


FIG. 3: Pavage de l'espace de recherche obtenu avec SPS pour le modèle RIF; la région de confiance à 92% est enfermée entre l'union des pavés verts et des pavés verts et jaunes

plus grand nombre de paramètres. Pour chaque modèle, $n = 512, 1024, 2048, 4096,$ et 8192 sorties sans bruit sont générées en appliquant en entrée une suite aléatoire u_t de ± 1 , qui est l'entrée D-optimale sous la contrainte que l'entrée doit rester dans l'intervalle $[-1, 1]$ [10]. Un bruit blanc Laplacien est ensuite ajouté aux données. La variance du bruit est ajustée de manière à obtenir un rapport signal-à-bruit (RSAB) allant de 5 dB à 40 dB.

Pour obtenir une région de confiance à 95% à l'aide de SPS, un choix possible est $m = 255$ et $q = 13$. Le pavé de recherche initial dans l'espace des paramètres est $\mathbb{P} = [-10^4, 10^4]^{20}$. Il n'est pas possible dans ce cas d'obtenir des approximations intérieures et extérieures à l'aide d'unions de pavés. L'objectif est d'obtenir un pavé contenant la région de confiance. Pour cela, des techniques de propagation de contraintes intervalles sont mises en œuvre, voir [7]. Un pavé contenant Σ_q est obtenu en 5 s en moyenne, quelle que soit la valeur de n , la complexité de calcul étant principalement liée aux valeurs de m et de n_a . La figure 4 représente la taille du plus grand côté du pavé contenant Σ_q en fonction du RSAB et du nombre de points de mesure.

La taille du pavé décroît linéairement (en log) lorsque le SNR ou le logarithme du nombre de points de mesure augmente.

5 Conclusions et perspectives

L'analyse par intervalles fournit des outils efficace pour évaluer de manière garantie des approximations intérieures et extérieures de régions de confiance non-asymptotiques définies par LSCR ou SPS.

L'efficacité de la caractérisation est largement liée à la qualité des fonctions d'inclusion utilisées pour caractériser les ensembles définis par LSCR ou SPS. Les fonctions (2) introduites par LSCR ou (7) et (8) pour SPS contiennent de multiples occurrences des paramètres à estimer.

Des manipulations symboliques de ces expressions peuvent être très utiles pour améliorer l'efficacité de SIVIA et permettre de construire des contracteurs plus puissants, comme cela a été

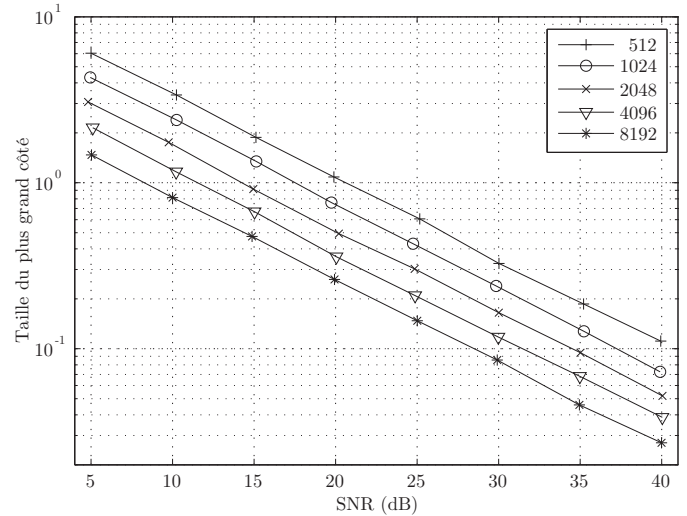


FIG. 4: Taille du plus grand côté du pavé contenant Σ_q en fonction du RSAB et du nombre de points de mesure.

fait pour SPS [7].

Références

- [1] M. C. Campi and E. Weyer. Guaranteed non-asymptotic confidence regions in system identification. *Automatica*, 41(10):1751–1764, 2005.
- [2] B. C. Csáji, M. C. Campi, and E. Weyer. Non-asymptotic confidence regions for the least-squares estimate. In *Proc. SYSID*, pages 227–232, Brussels, Belgium, 2012.
- [3] M. Dalai, E. Weyer, and M. C. Campi. Parameter identification for nonlinear systems: Guaranteed confidence regions through LSCR. *Automatica*, 43:1418 – 1425, 2007.
- [4] L. Gordon. Completely separating groups in subsampling. *Annals of Statistics*, 2(3):572–578, 1974.
- [5] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [6] L. Jaulin and E. Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4):1053–1064, 1993.
- [7] M. Kieffer and E. Walter. Guaranteed characterization of exact non-asymptotic confidence regions as defined by LSCR and SPS. *Automatica*, submitted, 2013.
- [8] R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [9] S. M. Rump. INTLAB - INTerval LABoratory. In J. Grabmeier, E. Kaltofen, and V. Weispfennig, editors, *Handbook of Computer Algebra: Foundations, Applications, Systems*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2001.
- [10] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer, London, 1997.