

Approche bayésienne variationnelle en tomographie micro-onde appliquée à la détection du cancer du sein

Leila GHARSALLI¹, Hacheme AYASSO², Bernard DUCHÊNE¹, Ali MOHAMMAD-DJAFARI¹

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S, UMR8506: CNRS-SUPELEC-Univ Paris-Sud)
3 rue Joliot-Curie, 91190 Gif-sur-Yvette, France

²Département Image Signal, GIPSA-LAB (CNRS-Univ Joseph Fourier)
BP 46 - 38402, Saint Martin d'Hères, France

Leila.Gharsalli@lss.supelec.fr, Hacheme.Ayasso@gipsa-lab.grenoble-inp.fr
Bernard.Duchene@lss.supelec.fr, Ali.Mohammad-Djafari@lss.supelec.fr

Résumé – Dans cet article le but est de reconstruire une image d'un sein (l'objet) atteint d'une tumeur à partir de mesures du champ diffracté résultant de son interaction avec une onde interrogatrice connue. La résolution de ce problème nécessite d'abord une modélisation directe exprimant le lien entre les grandeurs mesurées et le contraste de l'objet qui est la véritable variable d'intérêt. En ce qui concerne l'inversion on se place dans un cadre bayésien où l'on adopte un *a priori* de Gauss-Markov-Potts qui prend en compte l'information *a priori* que l'objet est composé d'un nombre fini de matériaux différents répartis en régions homogènes et compactes. Ensuite on applique l'approche bayésienne variationnelle où la loi *a posteriori* jointe est approchée par une loi séparable minimisant la divergence de Kullback-Leibler entre ces deux lois, ce qui permet d'obtenir un estimateur simple du contraste et des autres paramètres du modèle. Les résultats de reconstruction sont discutés et comparés avec les résultats obtenus par le biais d'une méthode déterministe dite d'inversion contraste source.

Abstract – In this article, the goal is to image a breast (the object) hit by a tumor from measurements of the scattered field resulting from its interaction with a known interrogating wave. The resolution of this problem requires, beforehand, the construction of a forward model that describes the link between the measured scattered fields and the object contrast for various incidences and frequencies. Concerning the inversion, a Gauss-Markov-Potts prior is assigned to the contrast in order to account for the *a priori* information that the object is composed of a finite number of different materials distributed in compact homogeneous regions. Then we use the variational Bayesian approach to obtain a good estimator of the object and model. The outline of this method is to approximate the posterior distribution by a separable law which is as close as possible to the posterior distribution in terms of the Kullback-Leibler divergence. Reconstruction results are discussed and compared to those obtained by means of a deterministic technique : the contrast source inversion method.

1 Introduction

Dans cette communication, on s'intéresse à l'inversion de données micro-ondes en vue d'une application à la détection du cancer du sein. En effet, l'imagerie micro-onde constitue une alternative intéressante à la mammographie par rayons X pour la détection du cancer du sein [1, 2], car les propriétés diélectriques des tissus cancéreux présentent un contraste relativement important par rapport à celles des tissus biologiques sains et les micro-ondes peuvent donc être utilisées pour mettre en évidence ces différences.

Le but est de reconstruire une image du sein à partir des mesures de champ diffracté résultant de son interaction avec une onde interrogatrice connue. Ceci constitue un problème inverse non linéaire et mal posé. La résolution de ce problème nécessite d'abord une modélisation directe exprimant le lien entre les grandeurs mesurées et le contraste χ de l'objet (du sein) qui est la véritable variable d'intérêt. En ce qui concerne l'inversion, le caractère mal posé du problème rend indispensable sa régularisation par introduction d'information *a priori*

sur la solution recherchée. Ceci est effectué en se plaçant dans le cadre de l'inférence bayésienne où l'on adopte un *a priori* de Gauss-Markov-Potts, qui prend en compte le fait que l'objet est constitué d'un nombre fini de matériaux différents répartis en régions homogènes et compactes [3, 4]. Dans ce cas, les paramètres d'intérêt, ainsi que les hyperparamètres du modèle, sont inconnus et doivent être estimés conjointement avec l'objet. La loi *a posteriori* résultante est complexe et son calcul exact est peu envisageable. Une manière de contourner ce problème est d'utiliser l'approximation des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Ces approches sont cependant très coûteuses en temps de calcul. C'est pourquoi nous proposons de résoudre ce problème à l'aide de l'approche bayésienne variationnelle (VBA) [5], où la distribution *a posteriori* est approchée analytiquement par des lois séparables. Ainsi, en choisissant des lois *a priori* conjuguées, les paramètres des lois approchantes peuvent être déduits des équations qui les relient implicitement. Dans [6], l'approche VBA a été introduite dans le domaine optique et a été testée sur des don-

nées issues de l'*institut Fresnel* (Marseille, France). Dans [7], sa performance a été comparée à celle d'une méthode MCMC, qui a conduit à des résultats de reconstruction souvent proches de ceux de VBA, mais qui s'est avérée coûteuse en termes de temps de calcul et de difficultés techniques.

Dans un premier temps nous décrivons le modèle direct, puis nous nous intéressons à la formulation bayésienne du problème inverse. Enfin, nous donnons les résultats de cette approche pour l'application visée.

2 Modélisation du problème direct

La configuration de mesure considérée ici est une configuration 2D-TM où les différents milieux sont cylindriques d'extension infinie et le champ électrique est perpendiculaire au plan de la figure 1, i.e. parallèle aux génératrices des cylindres. On dispose de 64 sources et de 64 récepteurs régulièrement répartis sur un cercle de rayon 7,5 cm centré sur l'origine des axes. Le dispositif fonctionne à 6 fréquences dans la bande 0,5 - 3 GHz. Le sein est de section circulaire. Il est placé dans un milieu d'adaptation D_1 et est entouré de peau. La tumeur et le milieu glandulaire sont également considérés comme étant de section circulaire. Le tableau 1 donne les permittivité diélectrique relative ϵ_r et conductivité σ de chaque milieu.

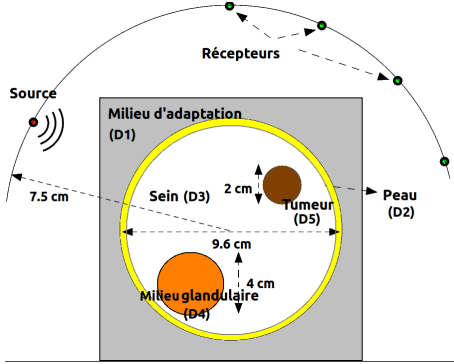


FIGURE 1 – Objet sous test en configuration 2D-TM

TABLE 1 – les paramètres électromagnétiques des différents milieux

Milieu	D1	D2	D3	D4	D5
ϵ_r	35	35.7	6.12	42	55.3
σ (Sm ⁻¹)	0.5	0.32	0.11	1.11	1.57
\emptyset (cm)		10	9.6	4	2

La physique contrôlant l'interaction entre l'onde interrogatrice et l'objet est décrite par l'équation des ondes de Helmholtz. En appliquant le théorème de Green à cette équation et en tenant compte des conditions de continuité des champs et de rayonnement à l'infini, nous sommes conduits à une représentation intégrale du champ électrique constituée de deux équations

intégrales couplées dites équation d'observation et équation de couplage (ou d'état). Elles sont données respectivement par :

$$y(\mathbf{r}) = E^{dif}(\mathbf{r}) = k_1^2 \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1)$$

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc}(\mathbf{r}) + k_1^2 \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

où E^{dif} est le champ diffracté observé, E est le champ total dans l'objet, E^{inc} est le champ incident et k_1 et $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^1(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ sont respectivement la constante de propagation et fonction de Green du milieu \mathcal{D}_1 , H_0^1 étant la fonction de Hankel d'ordre 0 et de première espèce. $w(\mathbf{r}') = \chi(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}')$ représente les sources de Huyghens induites à l'intérieur de l'objet par l'onde incidente, où $\chi = k(\mathbf{r})^2 - k_1^2$ est la fonction contraste, avec $k(\mathbf{r})^2 = \omega \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) \mu_0 + i \omega \mu_0 \sigma(\mathbf{r})$. ω est la fréquence angulaire et ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du vide, tandis que $\epsilon_r(\mathbf{r})$ et $\sigma(\mathbf{r})$ représentent la permittivité relative et la conductivité dans le domaine test \mathcal{D} .

La résolution des équations (1) est effectuée à partir de leurs contreparties discrètes obtenues à l'aide de la méthode des moments. Le domaine \mathcal{D} contenant l'objet inconnu est alors discrétisé en $N_{\mathcal{D}}$ pixels élémentaires suffisamment petits pour que l'on puisse considérer le champ électrique et le contraste comme constants sur chacun d'eux.

En reformulant l'équation de couplage pour faire apparaître les sources induites et en introduisant les bruits ϵ et ξ tenant compte des erreurs de mesures et de modélisation pour chaque fréquence d'excitation f et source ν , on arrive au modèle bilinéaire suivant :

$$y_{\nu,f} = E_{\nu,f}^{dif} = G^o w_{\nu,f} + \epsilon \quad (2)$$

$$w_{\nu,f} = \chi E_{\nu,f}^{inc} + \chi G^c w_{\nu,f} + \xi,$$

où les éléments des matrices d'observation G^o et de couplage G^c , dont les expressions peuvent être trouvées dans [7], résultent de l'intégration des fonctions de Green d'observation et de couplage sur les pixels élémentaires.

3 Modèle *a priori* - inversion bayésienne

Le point essentiel dans l'approche bayésienne est la modélisation *a priori* de l'inconnue χ . La principale idée est que l'image à reconstruire contient K classes de pixels, chaque classe correspondant à un matériau, et que les pixels de chacune de ces classes sont répartis en régions homogènes et compactes. Cette information peut être prise en compte par un modèle de Gauss-Markov-Potts [3, 4]. Dans ce modèle on associe à chaque pixel inconnu $\chi(\mathbf{r})$ une variable cachée $z(\mathbf{r})$ prenant ses valeurs dans $\{1, \dots, K\}$ et déterminant la classe du matériau (notée k) auquel le pixel appartient.

L'introduction du champ caché z nous permet de prendre en compte l'homogénéité de chaque matériau k , que l'on choisit de décrire par une loi gaussienne à travers un modèle de mélange de gaussiennes indépendantes (MGI) :

$$p(\chi(\mathbf{r})|z(\mathbf{r}) = k) = \mathcal{N}(m_k, v_k), \quad k = 1, \dots, K. \quad (3)$$

Pour prendre en compte la compacité des régions homogènes, on utilise un champ de Potts :

$$p(\mathbf{z}|\lambda) = \frac{1}{T(\lambda)} \exp \left\{ \lambda \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}_{\mathbf{r}}} \delta(z(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}')) \right\}, \quad (4)$$

où $T(\lambda)$ est une constante de normalisation, λ est le paramètre de Potts (ici $\lambda = 1$) et $\mathcal{V}_{\mathbf{r}}$ représente le voisinage de \mathbf{r} constitué des quatre plus proches voisins.

Ensuite, en partant des équations (2) et en supposant des erreurs gaussiennes ($\epsilon \sim \mathcal{N}(0, v_\epsilon \mathbf{I})$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, v_\xi \mathbf{I})$), on peut écrire $p(\mathbf{y}|\mathbf{w}, v_\epsilon)$ et $p(\mathbf{w}|\chi, v_\xi)$. Notons que les hyperparamètres du modèle sont également inconnus ; ils doivent donc être estimés conjointement avec les autres paramètres. Pour simplifier les calculs, on les choisit dans des familles de lois *a priori* conjuguées :

$$\begin{aligned} p(m_k) &= \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0), & p(v_k) &= \mathcal{IG}(\eta_0, \phi_0), \\ p(v_\epsilon) &= \mathcal{IG}(\eta_\epsilon, \phi_\epsilon), & p(v_\xi) &= \mathcal{IG}(\eta_\xi, \phi_\xi), \end{aligned}$$

où $\mu_0, \tau_0, \eta_0, \phi_0, \eta_\epsilon, \phi_\epsilon, \eta_\xi$ et ϕ_ξ sont des meta-hyperparamètres choisis comme des lois *a priori* non informatives, qui permettent d'évaluer l'influence de la loi *a priori* donnée.

En utilisant toutes ces lois *a priori* et en notant ψ l'ensemble des hyperparamètres ($\psi = \{\mathbf{m}, \mathbf{v}, v_\epsilon, v_\xi\}$), on obtient la loi *a posteriori* conjointe des inconnues et de tous les paramètres et hyperparamètres du modèle :

$$\begin{aligned} p(\chi, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \psi|\mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y}|\mathbf{w}, v_\epsilon) p(\mathbf{w}|\chi, v_\xi) p(\chi|\mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{v}) \\ &\times p(\mathbf{z}|\lambda) p(\mathbf{m}|\mu_0, \tau_0) p(\mathbf{v}|\eta_0, \phi_0) \\ &\times p(v_\epsilon|\eta_\epsilon, \phi_\epsilon) p(v_\xi|\eta_\xi, \phi_\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

Une approche classique serait alors de chercher la solution en calculant le maximum *a posteriori* (MAP) ou la moyenne *a posteriori* (MP). Cependant l'obtention d'une expression analytique de ces estimateurs est difficile. Une alternative est alors d'approcher la loi *a posteriori* pour pouvoir obtenir un estimateur plus simple. C'est le principe de l'approche bayésienne variationnelle.

4 Approche bayésienne variationnelle

L'idée de l'approche bayésienne variationnelle est d'approcher la vraie loi *a posteriori* $p(\mathbf{u}|\mathbf{y})$, où $\mathbf{u} = \{\chi, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \psi\}$, par un produit $q(\mathbf{u}) = \prod_i q(\mathbf{u}_i)$ d'approximations des lois marginales. L'approximation optimale est choisie en minimisant la divergence de Kullback-Leibler, $\text{KL}(q|\mathbf{p}) = \int q \ln(q|\mathbf{p})$. Notons que minimiser cette dernière revient à maximiser l'énergie libre négative (terme dérivé de la physique statistique) :

$$\mathcal{F}(q) = \int_{\mathcal{R}^N} q(\mathbf{u}) \ln \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{q(\mathbf{u})} d\mathbf{u}. \quad (6)$$

Ainsi, en tenant compte de la séparabilité $q(\mathbf{u}) = \prod_i q(\mathbf{u}_i)$, le but de l'approche bayésienne variationnelle est de trouver :

$$\begin{aligned} q^{opt}(\mathbf{u}) &= \arg \max_{\mathbf{q}} \mathcal{F}(q(\mathbf{u})) \\ &\propto \exp \left\{ \langle \log(p(\mathbf{u}, \mathbf{y})) \rangle_{\prod_{j \neq i} q(\mathbf{u}_j)} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Nous appliquons alors ce principe pour approcher la distribution *a posteriori* (6) par :

$$q(\mathbf{u}) = q(v_\epsilon)q(v_\xi) \prod_k q(v_k)q(m_k) \prod_i q(\chi_i)q(z_i) \prod_j q(w_j),$$

où le choix d'une séparation forte permet de simplifier les expressions des paramètres de forme des lois approchantes sans trop détériorer la qualité de l'approximation.

En choisissant des *a priori* conjugués et en considérant la forme optimale donnée par (7), on arrive à la mise à jour :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{w}) &= \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_w, \tilde{\mathbf{V}}_w), & q(\chi) &= \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_\chi, \tilde{\mathbf{V}}_\chi), \\ q(m_k) &= \mathcal{N}(\tilde{\mu}_k, \tilde{\tau}_k), & q(v_k) &= \mathcal{IG}(\tilde{\eta}_k, \tilde{\phi}_k), \\ q(v_\epsilon) &= \mathcal{IG}(\tilde{\eta}_\epsilon, \tilde{\phi}_\epsilon), & q(v_\xi) &= \mathcal{IG}(\tilde{\eta}_\xi, \tilde{\phi}_\xi), \\ q(\mathbf{z}) &= \tilde{\zeta}_k \propto \exp \left(\lambda \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} \sum_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} \tilde{\zeta}(\mathbf{r}') \right), \end{aligned} \quad (8)$$

où les expressions des paramètres tildés sont détaillées dans [7]. Le calcul des valeurs initiales des variables recherchées $\chi^{(0)}$ et $\mathbf{w}^{(0)}$ se fait par rétro-propagation du champ diffracté du domaine de mesure vers le domaine de reconstruction. La valeur initiale de la segmentation $\mathbf{z}^{(0)}$ peut être obtenue au moyen de l'algorithme *K-means* [8] avec des estimateurs empiriques pour les hyperparamètres $\psi^{(0)}$. Ici, compte tenu du fait que le contraste est complexe, on choisit d'abord de segmenter sa partie réelle et d'utiliser la même segmentation pour initialiser sa partie imaginaire.

5 Application et résultats

La méthode est appliquée à la configuration décrite ci-dessus, le domaine test étant divisé en $N_{\mathcal{D}} = 64 \times 64$ pixels carrés de coté $\delta = 1.9$ mm et l'inversion étant réalisée à partir de données synthétiques. Les résultats sont comparés à ceux obtenus via l'inversion contraste source (CSI), où une fonction coût, tenant compte à la fois des équations d'observation et de couplage, est minimisée à l'aide d'une méthode de gradient conjugué et où, à chaque itération le coût est minimisé alternativement par rapport aux sources \mathbf{w} et au contraste χ [9].

La figure 2 montre les distributions de permittivité et conductivité reconstruites après 500 itérations au moyen de CSI et de VBA (cette dernière étant initialisée par quelques itérations de CSI). La qualité de reconstruction, particulièrement en ce qui concerne la conductivité, est nettement améliorée avec VBA

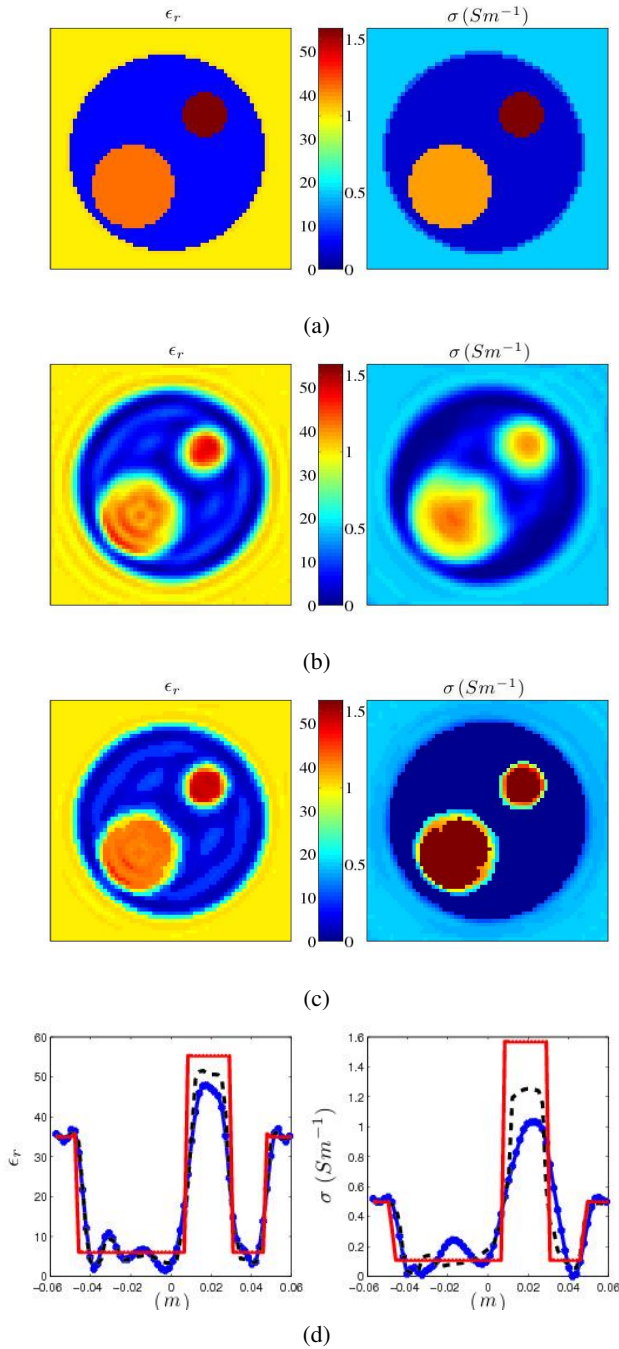


FIGURE 2 – La permittivité diélectrique (à gauche) et la conductivité (à droite) de l’objet réel (a) et de l’objet reconstruit par CSI (b) et par VBA (c) et les profils (d) reconstruits le long d’une ligne passant par le centre de la tumeur (réel = rouge, CSI = bleu, VBA = noir discontinu).

comparée à CSI qui donne de bons résultats mais avec une résolution insuffisante. Ceci est confirmé par les profils de permittivité et conductivité reconstruits avec les deux méthodes le long d’une ligne horizontale passant par le centre de la tumeur (Fig. 2-d). D’autre part, l’apport de l’information *a priori* par le biais du modèle Gauss-Markov-Potts permet également de segmenter l’image et de mettre en évidence les différents tissus

composant le sein.

6 Conclusion

Nous considérons, ici, l’imagerie micro-onde en vue d’une application à la détection du cancer du sein. Ce problème inverse est abordé dans un cadre bayésien avec un *a priori* de Gauss-Markov-Potts qui prend en compte le fait que le sein est constitué d’un nombre fini de tissus différents et que ceux-ci sont répartis en régions homogènes et compactes. Une approche bayésienne variationnelle est utilisée pour approcher la loi *a posteriori* conjointe des inconnues et paramètres du modèle par un produit d’approximations des lois marginales dont l’expression optimale est obtenue en minimisant la divergence de Kullback-Leibler. Un des points délicats, par rapport aux travaux précédents, est la nature complexe et l’amplitude importante du contraste considéré ici, les tissus présentant de fortes permittivité et conductivité qui peuvent rendre problématique la convergence des méthodes déterministes traditionnelles telles que CSI. Les résultats obtenus montrent l’efficacité de l’approche développée et une amélioration de la précision des valeurs obtenues comparée à CSI. Il reste cependant à améliorer certains points, en particulier la vitesse de convergence, ce qui peut être fait en introduisant un pas de gradient.

Références

- [1] P. A. Barrière. *Développement d’algorithmes d’inversion rapides et propositions relatives à la configuration du montage de mesures dans un contexte de tomographie micro-onde appliquée à la détection du cancer du sein*. Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Nantes, 2008.
- [2] T. Henriksson. *Contribution to quantitative microwave imaging techniques for biomedical applications*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11 - Mälardalen University, 2009.
- [3] A. Mohammad-Djafari. *Gauss-Markov-Potts priors for images in computer tomography resulting to joint optimal reconstruction and segmentation*. International Journal of Tomography and Statistics, 2008, vol 11, W09, pp. 76 – 92.
- [4] H. Ayasso and A. Mohammad-Djafari. *Joint NDT image restoration and segmentation using Gauss-Markov-Potts prior models and variational Bayesian computation*. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, vol 19, n°9, pp. 2265 – 2277.
- [5] V. Smídl and A. Quinn. *The Variational Bayes Method in Signal Processing*. Springer-Verlag, 2006.
- [6] H. Ayasso, B. Duchêne and A. Mohammad-Djafari. *Optical diffraction tomography within a variational Bayesian framework*. Inverse Problems in Science and Engineering, 2012, vol 20, n°1, pp. 59 – 73.
- [7] H. Ayasso, B. Duchêne and A. Mohammad-Djafari. *Approches MCMC et variationnelle de l’inversion bayésienne en imagerie de diffraction*. in Méthodes d’Inversion Appliquées au Traitement du Signal et de l’Image, J.-F. Giovannelli and J. Idier Eds., pp. 223-247, Hermes Science Publications, 2013.
- [8] J. B. MacQueen. *Some methods for classification and analysis of multivariate observations*. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability, Univ. California Press, 1967, vol 1, pp. 281 – 297.
- [9] R. F. Bloemenkamp, A. Abubakar and P. M. van den Berg. *Inversion of experimental multi-frequency data using the contrast source inversion method*. Inverse problems, 2001, vol. 17, n°6, pp.1611 – 1622.