

Approximations asymptotiques du taux d’erreur paquet et allocation de puissance dans les canaux à relais sous évanouissements lents

Paul FERRAND, Jean-Marie GORCE, Claire GOURSAUD

Centre d’Innovation en Télécommunications et Intégration de services
6 avenue des Arts, 69621 Villeurbanne CEDEX, France
prenom.nom@insa-lyon.fr

Résumé – Dans cette communication, nous dérivons une approximation du taux d’erreur paquet dans les canaux à évanouissements *quasi-statiques*, où le temps de cohérence du canal est de l’ordre du temps d’émission d’un paquet. Pour différentes hypothèses quant aux modulations considérées et au modèle d’évanouissement du canal, nous obtenue une expression analytique bornant le *gain de codage* asymptotique du taux d’erreur paquet. Nous étendons ensuite cette étude aux canaux à relais en considérant plusieurs modèles de relayage, pour lesquels nous dérivons l’approximation asymptotique du taux d’erreur paquet de bout-en-bout. A l’aide de cette approximation, nous sommes en mesure de fournir une allocation de puissance optimale pour les différents modèles de canaux à relais, et nous montrons que cette allocation fournit un gain en performance sur toute la plage de rapport signal-sur-bruit.

Abstract – In this communication, we derive an approximation for the packet error rate of *quasi-static* fading channels. This channel model is suitable for channel whose coherence time is higher than the transmission duration of a packet. We get an upper bound on the asymptotic *coding gain* of the packet error rate in that model, for various modulation schemes. We then extend the study to 3 relay channel models, and we show that for these models, minimizing the asymptotic end-to-end coding gain provides performances gain over the whole signal-to-noise ratio range with respect to packet error rate.

1 Introduction

La majorité des travaux sur les performances des communications sans-fils dans les canaux à évanouissements se concentrent sur l’évaluation de la probabilité de coupure de la capacité, ou l’évaluation du taux d’erreur symbole. Une revue de ces résultats ainsi qu’une méthode pour évaluer les taux d’erreur symbole dans les canaux à évanouissements est disponible dans [1]. Les résultats que nous présentons ici choisissent une approche différente, introduite et décrite par Wang et Giannakis [2] et visant à obtenir des approximations dites *asymptotiques* du taux d’erreur symbole.

L’utilisation des approximations asymptotiques a été étendue au taux d’erreur symbole dans les canaux à relais fonctionnant selon un modèle *amplify-and-forward* [3], où les auteurs ont montré que dans ce cas le meilleur critère de sélection de relais – mais sans contrôle de puissance – est de maximiser la moyenne harmonique des trajets source-relais et relais-destination. Liu *et al.* ont complété cette étude et ont obtenu les approximations asymptotiques du taux d’erreur symbole dans les canaux à relais, pour un grand nombre de modulations théoriques (voir en particulier [4, Ch.5]). Les études sur le taux d’erreur symbole ou paquet à haut rapport signal sur bruit (SNR) ont été rapprochées des études sur la probabilité de coupure de la capacité par Zheng et Tse [5], où les auteurs ont démontré qu’à haut SNR la probabilité d’erreur symbole était conditionnelle d’un évènement de coupure sur le canal [5, Lem.5]. Ce

résultat lie la bibliographie reliée à la probabilité de coupure à celle portant sur les taux d’erreur symboles, et l’on peut citer en particulier les travaux de Annavajjala *et al.* sur la probabilité de coupure dans les canaux à relais [6]. Ce dernier article présente par ailleurs des optimisations de puissance similaire à celles de cette communication, où les auteurs se restreignent néanmoins à un modèle particulier du canal à relais.

La majorité de ces travaux portent néanmoins sur le taux d’erreur symbole ; quand les évanouissements sont relativement rapides dans le temps, il est possible de les étendre aux taux d’erreur paquet en supposant un entrelacement à l’émission. Cependant, si les évanouissements évoluent lentement par rapport au temps de transmission d’un paquet, il faut considérer que les différents symboles vont subir à l’extrême le même état d’évanouissement – un modèle dénommé évanouissements *blocs* ou *quasi-statiques*. L’approche de Wang et Giannakis dans [2] a récemment été étendue vers ce modèle par les travaux de Xi *et al.* [7], où les auteurs adaptent la théorie et calculent numériquement les différents paramètres de l’approximation.

Les travaux de cette communication se basent sur les résultats de Xi *et al.*. Nous développons une expression bornant le *gain de codage* de l’approximation asymptotique du taux d’erreur paquet dans les canaux à évanouissements quasi-statiques. Nous étendons ensuite ces approximations à 3 modèles de canaux à relais, pour lesquels nous dérivons le gain de codage de bout-en-bout. Nous montrons qu’allouer une puissance globale

entre la source et le relais en minimisant ce gain de codage apporte un gain de performance intéressant sur toute la plage de SNR d'intérêt.

2 Taux d'erreur paquet en lien simple

Dans les systèmes de communication sans-fil, les effets d'évanouissement corrompent l'enveloppe du signal reçu. Le livre de [8] présente de manière précise la dérivation du canal en *bande de base* que nous utilisons dans cette communication. En reprenant les notations de [8, Ch.2], on considère un canal en bande de base complexe discret où le signal $y[m]$ reçu à l'instant m dépend du signal envoyé $x[m]$, d'un bruit blanc gaussien $w[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ et d'un coefficient de canal agrégé $h[m]$:

$$y[m] = h[m]x[m] + w[m] \quad (1)$$

En pratique, les métriques de performances pour les systèmes de communication sans-fils sont basés sur le SNR des symboles reçus. Si l'on suppose que les symboles sont envoyés avec une puissance moyenne P , le SNR *instantané* à la destination peut s'écrire :

$$\gamma[m] = \frac{|h[m]|^2 P}{N_0} \quad (2)$$

Le SNR *moyen* correspond quant à lui à la moyenne dans le temps des SNR instantanés, soit $\bar{\gamma} = \mathbb{E}[|h[m]|^2] P/N_0$. L'effet des canaux à évanouissements va donc être en pratique capturé par la distribution de $|h[m]|^2$ et influer par là sur la variation du SNR en réception et les métriques de performance qui lui sont liées. On se concentre dans cette communication sur les canaux dont les évanouissements suivent des modèles de Rayleigh ou Nakagami, et dont les densités de probabilité (p.d.f.) sont renseignées dans la table 1.

La métrique de performance que nous traitons ici est le taux d'erreur paquet, qui s'écrit sous la forme suivante, avec $p_s(\gamma)$ la probabilité d'erreur symbole pour un SNR instantané γ et N le nombre de symboles dans un paquet transmis :

$$p_p(\gamma) = 1 - (1 - p_s(\gamma))^N \quad (3)$$

Si les évanouissements sont suffisamment rapides, les différents symboles d'un paquet vont pouvoir, avec un entrelacement adapté, subir chacun un état d'évanouissement différent. En contrepartie, si les évanouissements sont quasi-statiques, à l'extrême, tous les symboles vont subir le même état d'évanouissement. Dans ce cas, le taux d'erreur paquet *bloc* s'écrit de la manière

	$f_{\gamma \bar{\gamma}}(\gamma)$: p.d.f. de $ h[m] ^2$	a	t
Rayleigh	$\frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$	1	0
Nakagami- m	$\frac{m^m \gamma^{m-1}}{(\bar{\gamma})^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$	$m^m \Gamma(m)$	$m - 1$

TAB. 1 – Densités de probabilité pour les modèles de canaux de cette communication, et paramètres a et t pour les approximations de Wang et Giannakis [2]. $\Gamma(\cdot)$ indique la fonction Gamma usuelle.

suivante, en prenant l'espérance de (3) sur la distribution de probabilité :

$$\bar{p}_{p,\text{bloc}}(\bar{\gamma}) = 1 - \int_0^\infty (1 - p_s(\gamma))^N f_{\gamma|\bar{\gamma}}(\gamma) d\gamma \quad (4)$$

Nous nous concentrons dans ce papier sur des modulations PSK (*Phase Shift Keying*) théoriques dont le taux d'erreur symbole peut être représenté sous la forme $p_s(\gamma) = Q(\sqrt{k\gamma})$, où Q est la fonction de queue de probabilité d'une distribution gaussienne centrée de variance 1. Des résultats similaires à ceux de cette section pour d'autres formes du taux d'erreur symbole, en particulier des fonctions ajustées sur des résultats de mesures, sont décrits dans le rapport de recherche [9].

Le résultat central de Wang et Giannakis dans [2] a été de montrer que le taux d'erreur symbole dans les canaux à évanouissement pouvait être approximé à haut SNR, quand $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$, par une expression de la forme :

$$a \int_0^\infty \gamma^t p_s(\gamma) d\gamma \cdot \bar{\gamma}^{-(t+1)} = G_c \bar{\gamma}^{-G_d} \quad (5)$$

Les paramètres a et t dépendent du modèle des évanouissements, et sont retranscrit dans la table 1 pour les canaux d'intérêt dans cette communication. Les coefficients G_c et G_d sont dénommés *gain de codage* et *gain de diversité* respectivement. Xi *et al.* ont étendu ces résultats au taux d'erreur paquet dans les canaux à évanouissements lents. Le gain de diversité est inchangé par rapport aux résultats de Giannakis, et l'expression du gain de codage devient dans ce cas :

$$G_c = a \int_0^\infty \gamma^t (1 - (1 - p_s(\gamma))^N) d\gamma \quad (6)$$

Xi *et al.* utilisent une intégration numérique pour déterminer le gain de codage dans leurs applications. Nous proposons ici de fournir une borne supérieure du gain de codage sous forme analytique.

Proposition 1. *En considérant des symboles transmis par une modulation PSK théorique, le gain de codage du taux d'erreur paquet dans les canaux à évanouissements quasi-statiques pour un paquet de N symboles est borné par le haut par :*

$$G_c \leq \left(\frac{2}{k}\right)^{t+1} \frac{aN}{2(t+1)\sqrt{\pi}} \Gamma\left(t + \frac{3}{2}, \frac{k\gamma^*}{2}\right) \quad (7)$$

Les paramètres a et t sont tirés de la table 1, le paramètre k du taux d'erreur symboles du modulation PSK théorique $p_s(\gamma) = Q(\sqrt{k\gamma})$, et γ^* est obtenu suivant :

$$\gamma^* = \frac{2}{k} \left(\text{erfc}^{-1} \left(\frac{2}{N} \right) \right)^2 \quad (8)$$

Démonstration. La dérivation de cette proposition se fait en bornant l'intégrande de (6) par le haut à l'aide de l'expansion du premier ordre $\min\{1, Np_s(\gamma)\}$. La dérivation complète étant trop longue pour être inscrite dans cet article, nous référons les lecteurs au rapport de recherche [9]. \square

3 Taux d'erreur paquet dans les canaux à relais

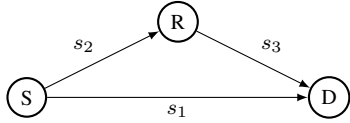


FIG. 1 – Canal à relais et valeurs moyennes du SNR pour chaque lien.

Le composant élémentaire des réseaux coopératifs est le canal à relais, où la source va chercher à transmettre un message vers la destination avec l'aide d'un noeud relais qui ne possède pas de message personnel à envoyer et dont le seul rôle est d'aider la source. Nous considérons ici les canaux à relais *half-duplex* où le relais ne peut pas écouter et transmettre de manière simultanée. Nous identifions 3 modèles de canaux à relais (Tab.2), suivant que la destination écoute les messages transmis à la fois par la source et le relais et la manière de combiner ces signaux pour décoder le paquet. Le mode de coopération totale (modèle 3) a été étudié par Xi *et al.* [7], mais ce fonctionnement nécessite une synchronisation forte entre la source et le relais et traitement adapté à la destination, justifiant l'étude de modèles moins performants, mais plus simples à mettre en oeuvre.

Comme représenté sur la figure 1, les affaiblissements vont être différents sur les 3 liens du canal à relais, influant donc sur le SNR moyen en réception pour chaque lien. On note s_1 , s_2 et s_3 les affaiblissements des liens $S \rightarrow D$, $S \rightarrow R$ et $R \rightarrow D$ respectivement, et on écrit $\bar{\gamma}_S = P_S/N_0$ et $\bar{\gamma}_R = P_R/N_0$ les SNR équivalents à l'émission de la source et du relais. On cherche à distribuer de manière optimale une puissance P_{tot} à la source et au relais. En notant $\bar{\gamma}_{\text{tot}} = P_{\text{tot}}/N_0$ le SNR total équivalent à l'émission, et $\delta \in [0,1]$ le coefficient de partage de puissance entre la source et le relais, on peut écrire les SNR moyens des 3 liens en réception :

$$\bar{\gamma}_1 = \delta s_1 \bar{\gamma}_{\text{tot}} \quad \bar{\gamma}_2 = \delta s_2 \bar{\gamma}_{\text{tot}} \quad \bar{\gamma}_3 = (1 - \delta) s_3 \bar{\gamma}_{\text{tot}} \quad (9)$$

Pour le premier modèle du tableau 2, un évènement d'erreur

	Transmission multi-saut. Le trajet direct entre la source et la destination n'est pas utilisé.
	Coopération partielle. La destination écoute la première transmission de la source et celle du relais.
	Coopération totale avec recombinaison optimale à la destination. La source envoie simultanément avec le relais dans la seconde période.

TAB. 2 – Schémas de relayage considérés pour cette étude.

correspond à une erreur sur le lien $S \rightarrow R$, ou sur le lien $R \rightarrow D$ si la transmission sur le lien $S \rightarrow R$ réussit. La probabilité de l'évènement d'erreur s'écrit donc :

$$P_1 = \bar{p}_p(\bar{\gamma}_2) + (1 - \bar{p}_p(\bar{\gamma}_2))\bar{p}_p(\bar{\gamma}_3) \quad (10)$$

Pour le second modèle, une erreur se produit si les 2 trajets vers la destination sont en erreur, et on a :

$$P_2 = \bar{p}_p(\bar{\gamma}_1) [\bar{p}_p(\bar{\gamma}_2) + (1 - \bar{p}_p(\bar{\gamma}_2))\bar{p}_p(\bar{\gamma}_3)] \quad (11)$$

Si l'on considère des évanouissements de Rayleigh, la probabilité d'erreur sur un des liens a une approximation asymptotique de la forme $\bar{p}_p(\bar{\gamma}_i) \approx G_i/\bar{\gamma}_i$. A fort SNR, les produits de 2 de ces fonctions vont rapidement devenir négligeables devant les termes simples de probabilité d'erreur, et en conséquence les approximations asymptotiques de la probabilité d'erreur de bout en bout pour ces deux modèles s'écrivent :

$$P_1 \approx \frac{1}{\bar{\gamma}_{\text{tot}}} \left(\frac{G_2}{\delta s_2} + \frac{G_3}{(1 - \delta) s_3} \right) \quad (12)$$

$$P_2 \approx \frac{1}{\bar{\gamma}_{\text{tot}}^2} \frac{G_1}{s_1} \left(\frac{G_2}{\delta^2 s_2} + \frac{G_3}{(1 - \delta) \delta s_3} \right) \quad (13)$$

La probabilité d'erreur du troisième modèle du tableau 2 est décrite dans [7], et son approximation asymptotique est, avec $G_{c,\text{MRC}}$ l'évaluation de (6) pour $t = 1$:

$$P_3 \approx \frac{1}{\bar{\gamma}_{\text{tot}}^2} \frac{1}{s_1} \left(\frac{G_1 G_2}{\delta s_2} + \frac{G_{\text{MRC}}}{(1 - \delta) \delta s_3} \right) \quad (14)$$

On peut voir immédiatement que pour les modèles 2 et 3, la probabilité d'erreur de bout-en-bout est en $O(\bar{\gamma}^{-2})$, ce qui correspond à un gain de diversité de 2 par utilisation d'un relais, pour la même puissance rayonnée par le réseau.

Proposition 2. Soit un canal à relais comme représenté sur la figure 1. Pour le premier modèle du tableau 2, l'allocation de puissance asymptotiquement optimale est :

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_2} + \sqrt{\beta_3}} \quad (15)$$

Pour le second modèle :

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{\beta_2 - 4\beta_3 + \sqrt{\beta_2(\beta_2 + 8\beta_3)}}{4(\beta_2 - \beta_3)}, & \text{si } \beta_2 \neq \beta_3 \\ \frac{2}{3}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (16)$$

Pour le troisième modèle :

$$\delta_3 = 1 + \frac{\beta'_2}{\beta'_3} - \sqrt{\left(\frac{\beta'_2}{\beta'_3}\right)^2 + \frac{\beta'_2}{\beta'_3}} \quad (17)$$

avec :

$$\beta_i = \frac{s_i}{G_i}, \quad i \in \{1,2,3\} \quad \beta'_2 = \frac{s_2}{G_1 G_2} \quad \beta'_3 = \frac{s_3}{G_{\text{MRC}}} \quad (18)$$

Démonstration. La preuve consiste à minimiser les termes entre parenthèses dans (12), (13) et (14), ce qui correspond à la résolution d'équations de degré 2 en δ . Par manque de place, la dérivation complète de la preuve peut être trouvée dans [9]. \square

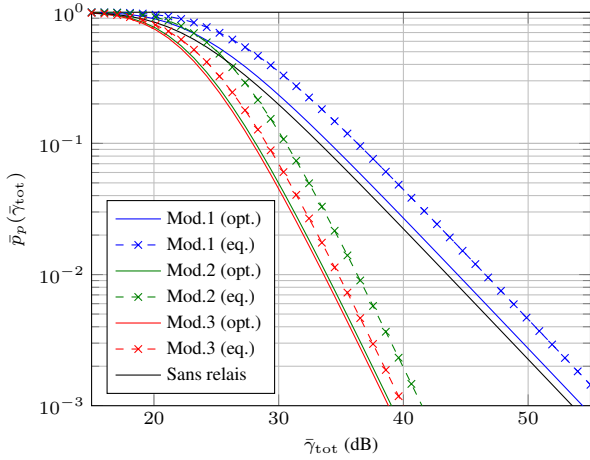


FIG. 2 – Comparaison entre l’allocation de puissance asymptotiquement optimale (opt.) et une allocation de puissance équitable (eq.) entre la source et le relais. Ici, $s_1 = s_2 = -20$ dB, et $s_3 = 0$ dB.

Sur la figure 2, nous comparons les performances de l’allocation de puissance de la proposition 2 avec une allocation de puissance où la source et le relais se partagent la puissance totale disponible de manière équitable. On peut observer tout d’abord sur la figure le gain en diversité des modèles 2 et 3 du tableau 2 par rapport au modèle 1 ou à une transmission directe. Comme dans la situation représentée ici, le trajet $S \rightarrow R$ est de qualité similaire au trajet $S \rightarrow D$, passer par le relais en mode multi-saut dégrade le taux d’erreur paquet, comme attendu. On voit également que l’allocation asymptotiquement optimale fournit des gains importants par rapport à l’allocation de puissance égale, et ce sur toute la plage de SNR. On remarque de plus que dans le cas considéré ici, les performances du modèle 2 sont très proches de celles du modèle 3, alors que ce dernier nécessite un effort de synchronisation important entre la source et le relais. Lorsque la qualité du lien $S \rightarrow R$ augmente, le modèle 3 devient plus performant que le modèle 2. La figure 3 présente un détail dans la zone asymptotique permettant de comparer l’utilisation de la borne sur le gain de codage décrite dans la proposition 1 par rapport à une optimisation numérique du gain de codage. Le gain de codage approché fournit virtuellement les mêmes performances que l’intégration numérique de (6) pour une fraction de la complexité.

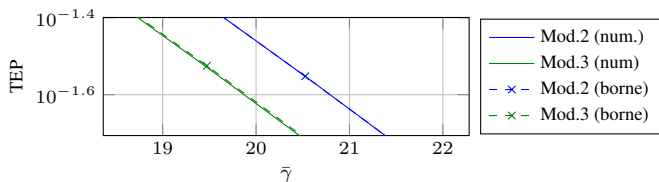


FIG. 3 – Performance comparée entre la minimisation numérique (num.) du gain de codage, et l’utilisation des bornes décrite dans la proposition 1 (borne).

4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette communication une approximation asymptotique du taux d’erreur paquet dans des liens sans-fil subissant des évanouissements *quasi-statiques*. Nous avons ensuite étendu cette approximation pour 3 modèles de relayage dans les canaux à relais. Dans ces approximations, l’allocation de puissance entre la source et le relais n’influe que sur le gain de codage. Par conséquent minimiser le gain de codage asymptotique permet d’obtenir une allocation de puissance performante sous une forme analytique simple, et nous permet de comparer les performances des différents modèles de relayage.

Les perspectives immédiates de ce travail portent sur l’intégration du codage canal dans les approximations asymptotiques, et sur l’extension à plus de modèles de relayage. Les approximations asymptotiques de bout-en-bout font également ressortir que les performances du canal à relais sont, lorsque l’on considère une métrique de taux d’erreur paquet, principalement dépendantes de la qualité des liens $S \rightarrow R$ et $R \rightarrow D$ à travers une *moyenne harmonique pondérée* de l’état de ces canaux, ouvrant la voie à des critères évolués de sélection de relais.

Références

- [1] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital Communications over Fading Channels*. Wiley & Sons, 2004.
- [2] Zhengdao Wang and G. Giannakis, “A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389 – 1398, aug. 2003.
- [3] A. Ribeiro, X. Cai, and G. B. Giannakis, “Symbol error probabilities for general Cooperative links,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 3, pp. 1264–1273, 2005.
- [4] K. R. Liu, A. K. Sadek, W. Su, and A. Kwasinski, *Cooperative communications and networking*, 2009.
- [5] L. Zheng and D. N. C. Tse, “Diversity and multiplexing: a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 5, pp. 1073–1096, 2003.
- [6] R. Annavajjala, P. C. Cosman, and L. B. Milstein, “Statistical channel knowledge-based optimum power allocation for relaying protocols in the high SNR regime,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 25, pp. 292–305, 2007.
- [7] Y. Xi, S. Liu, J. Wei, A. Burr, and D. Grace, “Asymptotic performance analysis of packet cooperative relaying system over quasi-static fading channel,” in *Proc. IEEE Symp. Personal Indoor Mobile Radio Commun. (PIMRC)*, 2010.
- [8] D. Tse and P. Vishwanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] P. Ferrand, J.-M. Gorce, and C. Goursaud, “Approximations of the packet error rate under slow fading in direct and relayed links,” INRIA, Research report, 2013. [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/hal-00834904>