Reconstruction Stable par Régularisation Décomposable Analyse

Jalal M. FADILI[1], Gabriel PEYRÉ[2], Samuel VAITER[2], Charles-Alban DELEDALLE[3], Joseph SALMON[4]
[1]GREYC CNRS-ENSICAEN-Univ. Caen [2]CEREMADE CNRS-Univ. Paris-Dauphine
[3]IMB CNRS-Univ. Bordeaux 1 [4]LTCI CNRS-Télécom ParisTech
Jalal.Fadili@greyc.ensicaen.fr, {Gabriel.Peyre,Samuel.Vaiter}@ceremade.dauphine.fr
cdeledal@math.u-bordeaux1.fr joseph.salmon@telecom-paristech.fr

Résumé – Cet article traite des propriétés structurelles des solutions de problèmes inverses avec régularisation favorisant des modèles de faible complexité. Plus exactement, la régularisation appartient à la classe générique de semi-normes définies comme des normes décomposables composées par un opérateur linéaire, d'où l'a priori décomposable type analyse. Nous proposons une analyse théorique unifiée des propriétés structurelles des solutions de problèmes inverses. Nous prouvons de nouveaux résultats d'unicité et des bornes de stabilité. Notre cadre inclut de nombreux cas particuliers comme la variation totale discrète, le Lasso par blocs analyse ou alors la norme nucléaire. Nos résultats principaux établissent des conditions suffisantes garantissant l'unicité de la solution régularisée et sa stabilité à un bruit arbitraire borné. En chemin, nous montrons une condition suffisante fine d'unicité dont la portée va bien au delà des normes décomposables.

Abstract – In this paper, we investigate in a unified way the structural properties of solutions to inverse problems. These solutions are regularized by the generic class of semi-norms defined as a decomposable norm composed with a linear operator, the so-called analysis type decomposable prior. This encompasses several well-known analysis-type regularizations such as the discrete total variation (in any dimension), analysis group-Lasso or the nuclear norm. Our main results establish sufficient conditions under which uniqueness and stability to a bounded noise of the regularized solution are guaranteed. Along the way, we also provide a strong sufficient uniqueness result that is of independent interest and goes beyond the case of decomposable norms.

1 Introduction

1.1 Formulation du problème

On observe $y = \Phi x_0 + w$, où $\|w\|_2 \leqslant \varepsilon$, où $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ est un opérateur linéaire pouvant avoir un noyau non trivial. Nous voulons reconstruire de façon stable une approximation de x_0 en résolvant le problème d'optimisation

$$x^\star \in \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\text{Argmin}}\ \tfrac{1}{2}\|y - \Phi x\|_2^2 + \lambda R(x)\ , \tag{1}$$

où

$$R(x) := \|L^* x\|_{\mathcal{A}}\ ,$$

avec $L : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^N$ un opérateur linéaire, et $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^+$ est une norme décomposable au sens de [1]. Ces normes permettent de promouvoir une forme de simplicité/faible complexité compatible avec celle de $u_0 = L^* x_0$. Ceci motive la définition suivante de ces normes. Par commodité, on utilisera par la suite, pour un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^P$, les notations $L_V = L\mathcal{P}_V$, $L_V^* = \mathcal{P}_V L^*$, et $\alpha_V = \mathcal{P}_V \alpha$ pour tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^P$, où $\mathcal{P}_V$ (resp. $\mathcal{P}_{V^\perp}$) est le projecteur orthogonal sur V (resp. son orthogonal $V^\perp$).

Définition 1. *Une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est* décomposable *en $u \in \mathbb{R}^P$ si :*

(i) il existe un sous-espace $T \subset \mathbb{R}^P$ et un vecteur $e \in T$ tels que

$$\partial\|\cdot\|_{\mathcal{A}}(u) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^P \setminus \alpha_T = e \quad et \quad \|\alpha_{T^\perp}\|_{\mathcal{A}}^* \leqslant 1\right\}$$

(ii) pour tout $z \in T^\perp$, $\|z\|_{\mathcal{A}} = \sup_{v\in T^\perp, \|v\|_{\mathcal{A}}^*\leqslant 1} \langle v,\, z\rangle$, où $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}^*$ est la norme duale de $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$.

De cette définition, on peut aisément montrer, en utilisant l'identité de Fenchel, que si $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est décomposable en u, alors $u \in T$. Des exemples de normes décomposables populaires en traitement du signal et en apprentissage sont la norme ℓ_1, la norme ℓ_1-ℓ_2 pour la parcimonie par blocs et la norme nucléaire [1].

1.2 Contributions et état de l'art

Dans cet article, nous établissons une condition nécessaire et suffisante sous laquelle (1) admet une solution unique. En corollaire, nous énonçons plusieurs conditions suffisantes d'unicité. Ensuite, nous développons des résultats permettant de garantir une reconstruction stable de x_0 à partir des mesures bruitées y en résolvant (1). Nous montrons que l'erreur d'approximation ℓ_2 est de l'ordre du niveau du bruit ε. Ces résultats vont au delà de ceux présentés dans [1] qui traitent de l'identifiabilité sans bruit avec $L = \mathrm{Id}$. La stabilité ℓ_2 pour une classe de normes décomposables, proche de celle donnée dans la définition 1, est étudiée dans [7] pour $L = \mathrm{Id}$ et un terme d'attache aux données général suffisamment lisse. Leurs résultats de stabilité requièrent toutefois des hypothèses plus fortes que les nôtres. Pour une classe générique de régularisation par normes atomiques, [2] donnent des bornes fines sur le nombre de mesures requises pour l'identifiabilité et la reconstruction stable à partir de mesures aléatoires en résolvant une formulation contrainte de (1). Ils restent toutefois confinés essentiellement au cadre de l'échantillonnage compressé. Nos résultats généralisent les garanties de stabilité de [6] qui traite le cas où $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est la norme ℓ_1 et L^* est l'opérateur d'analyse d'une trame. Un résultat de stabilité général pour des fonctions sous-linéaires fermées R est donné dans [5]. La stabilité est toutefois mesurée uniquement en termes de R, et la stabilité ℓ_2 ne peut être obtenue que si R est coercive, *i.e.,* L^* est injectif.

A ce stade, nous voudrions attirer l'attention du lecteur sur le fait, que bien que notre analyse porte sur la forme pénalisée (1), nos résultats restent vrais pour la version du même problème où l'attache aux données est en contrainte. Les constantes dans les bornes stabilité sont bien évidemment différentes. Ces résultats sont omis pour des raisons d'espace évidentes.

2 Unicité

2.1 Hypothèses principales

Les hypothèses suivantes joueront un rôle essentiel dans la suite.

Hypothèse (SC_x) Il existe $\eta \in \mathbb{R}^M$ et $\alpha \in \partial\| \cdot \|_{\mathcal{A}}(L^* x)$ tels que la condition source suivante soit vérifiée :

$$\Phi^* \eta = L\alpha \in \partial R(x) \ .$$

Hypothèse (INJ_T) Pour un sous-espace $T \subset \mathbb{R}^P$, Φ est injectif sur $\ker(L^*_{T^\perp})$.

Il est immédiat de voir, par un argument de coercivité, que puisque $\ker(L^*) \subseteq \ker(L^*_{T^\perp})$, ($\mathrm{INJ}_T$) implique que l'ensemble des minimiseurs (globaux) est non-vide et compact.

2.2 Unicité et propriété du noyau

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante forte sous laquelle le problème (1) admet exactement un unique minimiseur.

Théorème 1. *Pour $x^\star$ un minimiseur de* (1)*, soient T et e le sous-espace et le vecteur dans la définition 1 associés à $u^\star = L^* x^\star$, et notons $S = T^\perp$. $x^\star$ est minimiseur unique de* (1) *si, et seulement si*

$$\langle L_T^* h,\, e\rangle < \|L_S^* h\|_{\mathcal{A}}^*, \qquad \forall h \in \ker(\Phi) \setminus \{0\} \ .$$

Ce résultat peut être interprété comme une généralisation forte de la propriété du noyau (*Null Space Property*) très répandue en minimisation ℓ_1 [3].

2.3 Conditions suffisantes d'unicité

2.3.1 Cas général

Une conséquence directe du théorème précédent est résumée dans le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soient T et e le sous-espace et le vecteur dans la définition 1 associés à $u^\star = L^* x^\star$, et notons $S = T^\perp$. Supposons que* ($\mathrm{SC}_{x^\star}$) *est vérifiée avec $\|\alpha_S\|_{\mathcal{A}}^* < 1$, et que* ($\mathrm{INJ}_T$) *est satisfaire. Alors, $x^\star$ est unique minimiseur de* (1).

Il est important de mentionner que le théorème 1 et le corollaire 1 sont prouvés sans certaines restrictions impliquées par la propriété (ii) de la définition 1 des normes décomposables. Ces résultats sont donc valides pour une bien plus grande classe de régularisations.

2.3.2 Cas séparable

Définition 2. *Une norme décomposable $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ est séparable sur le sous-espace $T^\perp = S = V \oplus W \subset \mathbb{R}^P$ si pour tout $u \in \mathbb{R}^P$, $\|u_{T^\perp}\|_{\mathcal{A}} = \|u_V\|_{\mathcal{A}} + \|u_W\|_{\mathcal{A}}$.*

La séparabilité s'avère vraie pour plusieurs normes décomposables telles que les normes ℓ_1 et $\ell_1 - \ell_p$, $1 \leqslant p < +\infty$.

La condition de non-saturation sur le certificat dual requise dans le corollaire 1 peut être relâchée pour n'être vérifiée que sur un sous-espace strict $V \subset S$ et les conclusions du corollaire restent valides, mais au prix d'une hypothèse d'injectivité restreinte plus forte. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Supposons que $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ est aussi séparable avec $S = V \oplus W$. Supposons que* ($\mathrm{SC}_{x^\star}$) *est vérifiée avec $\|\alpha_V\|_{\mathcal{A}}^* < 1$, et que* ($\mathrm{INJ}_V$) *est satisfaire. Alors, $x^\star$ est unique minimiseur de* (1).

3 Stabilité au bruit

3.1 Résultat principal

3.1.1 Cas général

Nous somme en position d'énoncer notre résultat de stabilité.

Théorème 2. *Soient T_0 et e_0 le sous-espace et le vecteur de la définition 1 associés à $u_0 = L^* x_0$, et notons $S_0 = {T_0}^\perp$. Supposons que* (SC_{x_0}) *est vérifiée avec $\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^* < 1$, et que* ($\mathrm{INJ}_{T_0}$) *est satisfaire. Alors, en prenant $\lambda = c\varepsilon$, $c > 0$, on a pour tout minimiseur $x^\star$ de* (1)

$$\|x^\star - x_0\|_2 \leqslant C\varepsilon \ ,$$

où $C = C_1\,(2 + c\|\eta\|_2) + C_2 \frac{(1+c\|\eta\|_2/2)^2}{c\left(1-\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*\right)}$, avec $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ des constantes indépendantes de η et α.

Remarque 1 (Cas séparable)**.** *Lorsque la norme décomposable est aussi séparable (voir corollaire 2), le résultat de stabilité du théorème 2 reste valide en supposant cette fois-ci que $\|\alpha_V\|_{\mathcal{A}}^* < 1$ pour $V \subset S_0$. Ceci vient en revanche au prix d'une hypothèse d'inventivité* (INJ_V) *plus contraignante. La preuve de cette assertion nécessite de modifier légèrement celle du lemme 2 en adoptant les mêmes arguments que dans la preuve du corollaire 2.*

3.1.2 Cas des trames

On se place maintenant dans le cas où L^* est l'opérateur d'analyse associé à une trame de $\mathbb{R}^N$ (*i.e.*, $\ker(L^*) = \{0\}$), de borne inférieure $a > 0$, et $\tilde{L}$ une trame duale. Le résultat de stabilité suivant est montré.

Proposition 1. *Soient T_0 et e_0 le sous-espace et le vecteur de la définition 1 associés à $u_0 = L^* x_0$, et notons $S_0 = {T_0}^\perp$. Supposons que* (SC_{x_0}) *est vérifiée avec $\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^* < 1$, et que Φ est injectif sur $\mathrm{Im}(\tilde{L}_{T_0})$. Alors, en prenant $\lambda = c\varepsilon$, $c > 0$, on a pour tout minimiseur $x^\star$ de* (1)

$$\|x^\star - x_0\|_2 \leqslant C'\varepsilon \ ,$$

où $C = C_1\,(2 + c\|\eta\|_2) + C_2' \frac{(1+c\|\eta\|_2/2)^2}{c\left(1-\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*\right)}$, avec $C_1 > 0$ et $C_2' > 0$ des constantes indépendantes de η et α.

Puisque $\ker(L^*_{S_0}) \subseteq \mathrm{Im}(\tilde{L}_{T_0})$, l'injectivité restreinte requise est plus contraignante que (INJ_{T_0}). En revanche, il s'avère que la constante C_2' est en général meilleure que C_2. On peut noter aussi que la coercivité de R dans ce cas permet de déduire une borne similaire à la nôtre à partir des résultats de [5]. Son hypothèse d'injectivité est toutefois différente et ses constantes moins fines.

3.2 Condition d'irreprésentabilité généralisée

Dans le corollaire suivant, nous fournissons une condition suffisante de stabilité plus forte qui peut être vue comme généralisation de la condition d'irreprésentabilité (ou condition de Fuchs) introduite par [4] pour l'identifiabilité lorsque R est la norme ℓ_1. Elle consiste à construire deux vecteurs duaux η et α qui sont calculables et qui remplissent la condition source et la condition de non-saturation. Ceci permet d'obtenir la stabilité avec des constantes explicites dans la borne.

Définition 3. *Soient $T \subset \mathbb{R}^P$ et $e \in \mathbb{R}^P$, et notons $S = T^\perp$. Supposons que* (INJ_T) *est vérifiée. Quel que soit $u \in \ker(L_S)$ et $z \in \mathbb{R}^M$ tel que $\Phi^* z \in \mathrm{Im}(L_S)$, on définit le critère*

$$\mathrm{IC}_{u,z}(T,e) \;=\; \|\Gamma e + u_S + (L_S)^+ \Phi^* z\|_{\mathcal{A}}^*$$

où

$$\begin{aligned}\Gamma &= (L_S)^+(\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0}\\ \Xi : h \mapsto \Xi h &= \underset{x\in\ker(L_S^*)}{\mathrm{argmin}}\ \tfrac{1}{2}\|\Phi x\|_2^2 - \langle h,\, x\rangle\ ,\end{aligned}$$

et M^+ la pseudo-inverse de Moore-Penrose de M. Soient $\bar{u}$, $\bar{z}$ et $\underline{u}$ les minimiseurs (uniques) respectifs de

$$\begin{aligned}(\bar{u},\bar{z}) &= \underset{u\in\ker(L_S),\{z \,\setminus\, \Phi^* z\in\mathrm{Im}(L_S)\}}{\mathrm{argmin}} \mathrm{IC}_{u,z}(T,e)\\ \text{et}\qquad \underline{u} &= \underset{u\in\ker(L_S)}{\mathrm{argmin}}\ \mathrm{IC}_{u,0}(T,e)\ .\end{aligned}$$

On remarque immédiatement que l'on a

$$\mathrm{IC}_{\bar{u},\bar{z}}(T,e) \leqslant \mathrm{IC}_{\underline{u},0}(T,e) \leqslant \mathrm{IC}_{0,0}(T,e)\ .$$

Le critère $\mathrm{IC}_{\underline{u},0}(T,e)$ devient celui proposé dans [9] lorsque $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est la norme ℓ_1. $\mathrm{IC}_{0,0}(T,e)$ est une généralisation du critère introduit dans [4] lorsque R est la norme ℓ_1, et se spécialise à celui de [1] pour les norme décomposables avec $L = \mathrm{Id}$.

Corollaire 3. *Supposons que* (INJ_{T_0}) *est vérifiée et que* $\mathrm{IC}_{\bar{u},\bar{z}}(T_0,e_0) < 1$. *Alors, en prenant $\eta = \Phi\Xi L_{T_0} e_0 + \bar{z}$, on peut construire α tel que* (SC_{x_0}) *est satisfaite et $\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^* < 1$. De plus, la conclusion du théorème 2 reste vraie en remplaçant $1 - \mathrm{IC}_{\bar{u},\bar{z}}(T_0,e_0)$ par $1 - \|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*$.*

4 Preuves

4.1 Preuve du théorème 1

Une observation clé est que par stricte convexité, en fait forte, de $\mu \mapsto \|y - \mu\|_2^2$, tous les minimiseurs de (1) partagent la même image sous Φ. Ainsi, tout minimiseur s'écrit $x^\star + h$ where $h \in \ker(\Phi)$. De plus, on peut montrer qu'une fonction propre et convexe R a un minimiser unique si sa dérivée directionnelle satisfait

$$R'(x^\star; x - x^\star) > 0, \quad x \in C, x \neq x^\star\ .$$

En appliquant ceci à (1) avec $C = x^\star + \ker(\Phi)$, and en utilisant le fait que dérivée directionnelle est la fonction d'appui de la sous-différentielle, on obtient que $x^\star$ est minimiseur unique de (1) si $\forall\, h \in \ker(\Phi) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}0 < R'(x^\star; h) &= \sup_{v\in\partial R(x^\star)} \langle v,\, h\rangle\\ &= \sup_{\alpha\in\partial\|\cdot\|_{\mathcal{A}}(L^* x^\star)} \langle \alpha,\, L^* h\rangle\\ &= \langle e,\, L_T^* h\rangle + \sup_{\|\alpha_S\|_{\mathcal{A}}^*\leqslant 1} \langle \alpha_S,\, L_S^* h\rangle\\ &= \langle e,\, L_T^* h\rangle + \|L_S^* h\|_{\mathcal{A}}\ .\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la symétrie de la norme et le fait que $\ker(\Phi)$ est un sous-espace.

4.2 Preuve du corollaire 1

La condition source implique que $\forall\, h \in \ker(\Phi) \setminus \{0\}$

$$\langle h,\, L\alpha\rangle = \langle h,\, \Phi^*\eta\rangle = \langle \Phi h,\, \eta\rangle = 0\ .$$

De plus

$$\langle h,\, L\alpha\rangle = \langle L^* h,\, \alpha\rangle = \langle L_T^* h,\, e\rangle + \langle L_S^* h,\, \alpha_S\rangle\ .$$

Par conséquent, en appliquant l'inégalité de dualité

$$\langle L_T^* h,\, e\rangle \leqslant \|L_S^* h\|_{\mathcal{A}} \|\alpha_S\|_{\mathcal{A}}^* < \|L_S^* h\|_{\mathcal{A}}\ ,$$

où la dernière inégalité est stricte puisque $L_S^* h \neq 0$ grâce à (INJ_T), et $\|\alpha_S\|_{\mathcal{A}}^* < 1$ par hypothèse.

4.3 Preuve du corollaire 2

On suit la même démarche que pour le Corollary 1 pour obtenir

$$\langle L^* h,\, \alpha\rangle = \langle L_T^* h,\, e\rangle + \langle L_V^* h,\, \alpha_V\rangle + \langle L_W^* h,\, \alpha_W\rangle\ .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle L_T^* h,\, e\rangle &\leqslant \|L_V^* h\|_{\mathcal{A}} \|\alpha_V\|_{\mathcal{A}}^* + \|L_W^* h\|_{\mathcal{A}} \|\alpha_W\|_{\mathcal{A}}^*\\ &< \|L_V^* h\|_{\mathcal{A}} + \|L_W^* h\|_{\mathcal{A}} = \|L_S^* h\|_{\mathcal{A}}^*\ ,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $h \notin \ker(L_V^*)$, $\|\alpha_V\|_{\mathcal{A}}^* < 1$, la séparabilité et $\|\alpha_W\|_{\mathcal{A}}^* \leqslant \|\alpha_V\|_{\mathcal{A}}^* + \|\alpha_W\|_{\mathcal{A}}^* = \|\alpha_S\|_{\mathcal{A}}^* \leqslant 1$.

4.4 Preuve du théorème 2

On définit tout d'abord la divergence de Bregman.

Définition 4. *$D_s^R(x, x_0)$ est la divergence de Bregman associée à R par rapport à $s \in \partial R(x_0)$,*

$$D_s^R(x, x_0) = R(x) - R(x_0) - \langle s,\, x - x_0\rangle\ .$$

Soit $D_\alpha^{\mathcal{A}}(u, u_0)$ la divergence de Bregman associée à $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ par rapport à $\alpha \in \partial\|\cdot\|_{\mathcal{A}}(u_0)$.

Par convexité, la divergence de Bregman est toujours positive.

Lemmes préparatoires

Lemme 1 (Convergence en prédiction et en divergence de Bregman). *Supposons que* (SC_{x_0}) *est vérifiée. Alors, pour tout minimiseur $x^\star$ de* (1)*, et avec $\lambda = c\varepsilon$ pour $c > 0$, on a*

$$\begin{aligned}D_{\Phi^*\eta}^R(x^\star, x_0) = D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^* x^\star, L^* x_0) &\leqslant \varepsilon\frac{(1 + c\|\eta\|_2/2)^2}{c}\ ,\\ \|\Phi x^\star - \Phi x_0\|_2 &\leqslant \varepsilon(2 + c\|\eta\|_2)\ .\end{aligned}$$

La preuve suit de celle valable pour toute fonction sous-linéaire, voir e.g. [8], où on utilise en plus la condition source (SC_{x_0}) et $D_{\Phi^*\eta}^R(x, x_0) = D_{L\alpha}^R(x, x_0) = D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^* x, L^* x_0)$.

Puisque $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est une norme, elle est coercive, et ainsi

$$\exists\, C_{\mathcal{A}} > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^P,\ \|x\|_{\mathcal{A}} \geqslant C_{\mathcal{A}} \|x\|_2.$$

Nous obtenons alors la borne suivante.

Lemme 2 (De Bregman à l'erreur ℓ_2)**.** *Supposons que* (SC_{x_0}) *est vérifiée avec* $\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^* < 1$. *Alors,*

$$\|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_2 \leqslant \frac{D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^*x^\star, L^*x_0)}{C_{\mathcal{A}}\,(1 - \|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*)} ,$$

Démonstration. La décomposabilité de $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ implique que $\exists v \in S_0$ tel que $\|v\|_{\mathcal{A}}^* \leqslant 1$ et $\|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_{\mathcal{A}} = \langle L_{S_0}^*(x^\star - x_0),\, v\rangle$. De plus, $v + e_0 \in \partial\|\cdot\|_{\mathcal{A}}(L^*x_0)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^*x^\star, L^*x_0) &\geqslant D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^*x^\star, L^*x_0) \\
&\quad - D_{v+e_0}^{\mathcal{A}}(L^*x^\star, L^*x_0) \\
&= \langle v + e_0 - \alpha,\, L^*(x^\star - x_0)\rangle \\
&= \langle v - \alpha_{S_0},\, L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\rangle \\
&= \|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_{\mathcal{A}} \\
&\quad - \langle \alpha_{S_0},\, L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\rangle \\
&\geqslant \|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_{\mathcal{A}}(1 - \|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*) \\
&\geqslant C_{\mathcal{A}}\|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_2(1 - \|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*) .
\end{aligned}$$

□

Preuve du résultat principal

$$\begin{aligned}
\|x^\star - x_0\|_2 &\leqslant \|\mathcal{P}_{\ker(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\quad + \|\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\leqslant {C_\Phi}^{-1}\|\Phi\mathcal{P}_{\ker(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\quad + \|\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\leqslant {C_\Phi}^{-1}\|\Phi(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\quad + (1 + {C_\Phi}^{-1}\|\Phi\|_{2,2})\|\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 ,
\end{aligned}$$

où l'on utilisé l'hypothèse (INJ_{T_0}), *i.e.,*

$$\exists\, C_\Phi > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|\Phi x\|_2 \geqslant C_\Phi\|x\|_2, \quad \forall x \in \ker(L_{S_0}^*) .$$

Puisque $L_{S_0}^*$ est injectif sur l'orthogonal de son noyau, il existe $C_L > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\|x^\star - x_0\|_2 &\leqslant {C_\Phi}^{-1}\|\Phi(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\quad + \tfrac{\|\Phi\|_{2,2} + C_\Phi}{C_L C_\Phi}\|L_{S_0}^*\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2 .
\end{aligned}$$

En observant que

$$\|L_{S_0}^*(x^\star - x_0)\|_2 = \|L_{S_0}^*\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0}^*)}(x^\star - x_0)\|_2,$$

on applique le lemme 2 pour arriver à

$$\begin{aligned}
\|x^\star - x_0\|_2 &\leqslant {C_\Phi}^{-1}\|\Phi(x^\star - x_0)\|_2 \\
&\quad + \tfrac{\|\Phi\|_{2,2} + C_\Phi}{C_L C_\Phi\left(1 - \|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^*\right)} D_\alpha^{\mathcal{A}}(L^*x^\star, L^*x_0) .
\end{aligned}$$

Du lemme 1, on déduit le résultat attendu.

4.5 Preuve du corollaire 3

Prenons $\alpha = e_0 + \Gamma e_0 + \bar{u}_{S_0} + (L_{S_0})^+\Phi^*\bar{z}$. Tout d'abord, $\alpha_{T_0} = e_0$ puisque $e_0 \in T_0$ and $\mathrm{Im}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Im}((L_{S_0})^+) = \mathrm{Im}(L_{S_0}^*)$. Par ailleurs, $\|\alpha_{S_0}\|_{\mathcal{A}}^* = \mathrm{IC}_{\bar{u},\bar{z}}(T_0, e_0) < 1$, duquel on obtient $\alpha \in \partial\|\cdot\|_{\mathcal{A}}(L^*x_0)$.

Maintenant, on observe que par définition de Ξ, $\mathcal{P}_{\ker(L_{S_0}^*)}(\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0} = 0$, ce qui implique que $\mathrm{Im}((\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0})) \subseteq \mathrm{Im}(L_{S_0})$. De plus, $L_{S_0}\Gamma = L_{S_0}(L_{S_0})^+\left((\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0}\right) = \mathcal{P}_{\mathrm{Im}(L_{S_0})}\left((\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0}\right) = (\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0}$. En combinant ceci avec $\bar{u} \in \ker(L_{S_0})$ et $\bar{u} \in \ker(L_{S_0})$, on déduit que

$$\begin{aligned}
L_{S_0}\alpha &= (\Phi^*\Phi\Xi - \mathrm{Id})L_{T_0}e_0 + \Phi^*\bar{z} \\
&= \Phi^*\eta - L_{T_0}\alpha \iff \Phi^*\eta = L\alpha ,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Phi^*\eta = L\alpha \in \partial R(x_0)$. Nous avons donc montré que les vecteurs α et η construits ci-dessus satisfont la condition source (SC_{x_0}) and la condition de non-saturation. On conclut en invoquant théorème 2 avec (INJ_{T_0}).

5 Conclusion

Nous avons proposé une analysé unifiée des propriétés de régularisation des semi-normes décomposables. Nous avons en particulier établit des conditions assurant l'unicité et la stabilité des minimiseurs issus de problèmes de minimisation impliquant une telle classe de régularisations. La borne de stabilité est établie sans requérir la reconstruction (même partielle) du sous-espace sous-jacent T_0 et vecteur e_0. Plusieurs perspectives peuvent être envisagées à partir de ces résultats, comme l'extension à une classe plus large de régularisations, la stabilité ℓ_2 en dimension infinie, ou encore l'identifiabilité de T_0 et e_0.

Références

[1] E. J. Candès and B. Recht. Simple bounds for recovering low-complexity models. *Mathematical Programming*, pages 1–13, 2012.

[2] V. Chandrasekaran, B. Recht, P. Parrilo, and A. Willsky. The convex geometry of linear inverse problems. *Foundations of Computational Mathematics*, 12 :805–849, 2012.

[3] D. L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(7) :2845–2862, 2001.

[4] J.-J. Fuchs. On sparse representations in arbitrary redundant bases. *IEEE Trans. Info. Theory*, 50(6) :1341–1344, 2004.

[5] M. Grasmair. Linear convergence rates for tikhonov regularization with positively homogeneous functionals. *Inverse Problems*, 27 :075014, 2011.

[6] M. Haltmeier. Stable signal reconstruction via ℓ^1-minimization in redundant, non-tight frames. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 2012. to appear.

[7] S. Negahban, P. Ravikumar, M. J. Wainwright, and B. Yu. A unified framework for high-dimensional analysis of M-estimators with decomposable regularizers. *Statistical Science*, 27(4) :538–557, December 2012.

[8] O. Scherzer, M. Grasmair, H. Grossauer, M. Haltmeier, and F. Lenzen. *Variational Methods in Imaging*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1st edition, 2009.

[9] S. Vaiter, G. Peyré, C. Dossal, and M.J. Fadili. Robust sparse analysis regularization. *to appear in IEEE Trans. Inf. Theo.*, 2012.