

# Reconstruction de surfaces à partir de nuages de points : Une approche rapide par propagation de fronts sur graphes

Abdallah EL CHAKIK<sup>1</sup>, Xavier DESQUESNES<sup>1</sup>, Abderrahim ELMOATAZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universite de Caen Basse Normandie, ENSICAEN, GREYC - UMR CNRS 6972, 6.Bvd Marechal Juin, 14050 Caen, FRANCE  
aelchak@ensicaen.fr, (xavier.desquesnes, abderrahim.elmoataz-billah)@unicaen.fr)

**Résumé** – Cet article présente une approche de reconstruction de surface basée sur la propagation de fronts sur des graphes pondérés. Le problème de la reconstruction de surface à partir des nuages de points a été largement étudié dans la littérature. La nouveauté de cette approche réside dans l'utilisation de l'équation Eikonal [2] avec le formalisme des équations aux différences partielles (Edps). Notre approche produit un algorithme rapide, ce qui est la principale contribution de cette étude. Nous présentons également plusieurs exemples qui illustrent cette approche.

**Abstract** – This paper proposes a surface reconstruction approach that is based on fronts propagation over weighted graphs of arbitrary structure. The problem of surface reconstruction from a set of points has been extensively studied in the literature so far. The novelty of this approach resides in the use of the Eikonal equation [2] using Partial difference Equation on weighted graph. It produces a fast algorithm, which is the main contribution of this study. It also presents several examples that illustrate this approach.

## 1 Introduction

L'objectif principal de ce travail est de proposer une méthode de reconstruction de surface rapide à partir de nuages de points, basée sur des graphes pondérés. Cette reconstruction est effectuée en utilisant un algorithme de propagation de fronts avec le formalisme d'EdPs et en utilisant la méthode des ensembles de niveau.

La reconstruction de surfaces à partir de nuages de points est un problème important dans la modélisation géométrique. Étant donné un ensemble de points  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  échantillonnés à partir d'une surface inconnue  $S$ , le problème de la reconstruction de surface est de construire une surface  $\hat{S}$  à partir des données observées  $X$  telle que  $\hat{S}$  se rapproche de  $S$ .

Les méthodes de reconstruction de surfaces à partir de nuages de points peuvent être classifiées en deux catégories en terme de la forme de représentation des surfaces, nommées représentation explicite et implicite. La représentation explicite prescrit l'emplacement et la géométrie extérieurs d'une façon explicite, elle est principalement basée sur des triangulations de Delaunay ou diagrammes de Voronoi [6]. La représentation implicite généralement intègre la surface comme un codimension d'un ensemble de niveau d'une fonction scalaire, voire [7] pour plus des détails.

Dans cet article, nous proposons une approche de reconstruction de surface à partir de nuages de points qui permet de réduire le temps de calcul de façon significative sans perte de précision. Pour cela, nous proposons de transposer les méthodes de reconstruction basées sur les ensembles de niveaux sur le do-

main des graphes. Nous proposons de construire un graphe à partir d'un maillage adaptatif obtenu depuis le nuage de points initial. La propagation du front permettant de sélectionner les nouveaux points est alors réalisée grâce aux équations des différences partielles introduites dans [2]. L'intérêt des graphes ici est double. D'une part, le graphe est par nature irrégulier et permet de construire aisément un maillage adaptatif (très dense à proximité des points initiaux et clairsemé loin de ces points) qui colle parfaitement à la forme de l'objet à reconstruire qui permet de ne considérer qu'un nombre de points candidats très faible par rapport aux méthodes classiques utilisant des grilles de  $\mathbb{R}^3$ , et de plus il permet de travailler avec différents types de données (maillage, grille, etc.).

## 2 Équation de Différence Partielle sur Graphes

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques opérateurs sur les graphes précédemment définis dans [3]. Nous considérons que tout ensemble discret peut-être représenté par un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$ , composé de deux ensembles finis:  $V = \{u_1, \dots, u_n\}$  un ensemble de  $n$  sommets et  $E \subset V \times V$  un ensemble d'arêtes pondérées. Une arête  $(u, v) \in E$  connecte deux sommets adjacents  $u$  et  $v$ . Le poids  $w_{uv}$  d'une arête est défini par une fonction  $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  si  $(u, v) \in E$ , et  $w_{uv} = 0$  sinon. On note  $N(u)$ , l'ensemble des noeuds adjacents à  $u$ . Dans cet article, les graphes sont supposés simples, complets et non-orientés.

Soient  $G = (V, E, w)$  un graphe et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction

définie sur ses sommets.

l'opérateur pondéré discret partiel de  $f$  est :

$$(\partial_v f)(u) = \sqrt{w_{uv}}(f(v) - f(u)). \quad (1)$$

Basé sur cette définition, deux opérateurs directionnels pondérés peuvent être définis. Les opérateurs différence extérieur et intérieur sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} (\partial_v^+ f)(u) &= \sqrt{w_{uv}}(f(v) - f(u))^+ \text{ and} \\ (\partial_v^- f)(u) &= \sqrt{w_{uv}}(f(v) - f(u))^- , \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $(x)^+ = \max(0, x)$  et  $(x)^- = \min(0, x)$ .

Les gradients morphologiques *externes* et *internes* sur graphe sont définis par :

$$(\nabla_w^\pm f)(u) = (\sqrt{w_{uv}} |(Df(u))^\pm|^p)_{v \in N(u)}$$

où  $Df(u) = f(v) - f(u)$ ,  $(x)^+ = \max(x, 0)$  et  $(x)^- = -\min(x, 0)$ . Les normes associées à ces gradients sont alors données pour les normes  $\mathcal{L}_p$ ,  $p \in \{1, 2\}$ , respectivement  $\mathcal{L}_\infty$ , par

$$\begin{aligned} \|(\nabla_w^\pm f)(u)\|_p &= \left[ \sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} |(Df(u))^\pm|^p \right]^{1/p} \\ \|(\nabla_w^\pm f)(u)\|_\infty &= \max_{v \sim u} (\sqrt{w_{uv}} |(Df(u))^\pm|), \end{aligned} \quad (3)$$

avec l'égalité suivante:

$$\|(\nabla_w f)(u)\|_p^p = \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p^p + \|(\nabla_w^- f)(u)\|_p^p \quad (4)$$

### 3 Propagation des Fronts sur Graphes

Dans cette section, on va présenter l'approche de propagation des fronts sur des graphes.

Considérons un graphe pondéré  $G(V, E, w)$ . Un front qui propage sur  $G$  en temps initial comme un ensemble  $\Omega_0 \subset V$  est représenté implicitement par une fonction des ensembles de niveau  $\phi_0$  tels que  $\phi_0$  égale 1 dans  $\Omega_0$  et  $-1$  ailleurs.

La propagation des fronts est décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(u) &= \mathcal{F}(u) \|(\nabla_w \phi)(u)\| \\ \phi_0(u) &= \phi_0, \end{cases} \quad (5)$$

avec  $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(V)$  et  $w : V \times V \rightarrow \mathbf{R}^+$  la fonction du poids. Considérons le cas où  $\mathcal{F} \geq 0$ , et avec  $\phi(u, t) = t - f(u)$ , l'équation précédente peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} &= \mathcal{F}(u) \|(\nabla_w^+(t - T))(u)\|_p \\ &= \mathcal{F}(u) \|(\nabla_w^- T)(u)\|_p = 1, \\ \|(\nabla_w^- T)(u)\|_p &= P(u), \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $P(u) = 1/\mathcal{F}(u)$ . Pour plus de détails, voire [2].

Cette equation est la version stationnaire de l'équation des ensembles de niveaux (5) avec  $T : V \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction du temps d'arrivée de  $\Gamma$  à chaque noeud du  $V$ . Cette équation peut être considérée comme une équation de calcul de distance entre chaque noeud  $u$  et  $\Omega_0$ .

## 4 La Méthode de Reconstruction

Notre méthode [1] est construite par analogie avec la méthode des ensembles de niveaux classique, elle consiste à sélectionner un grand nombre de points situés entre les points du nuage initial pour compléter celui-ci (et ainsi en boucher les trous). Contrairement à l'approche classique, nous proposons de sélectionner les nouveaux points à partir d'un graphe adaptatif (avec une densité variant en fonction de la proximité des points initiaux et incluant ces derniers), au lieu d'utiliser une grille régulière de  $\mathbf{R}^3$ . Dans ce cas, les points sont représentés par les sommets du graphe. La sélection des nouveaux points se fait par la propagation simultanée de deux fronts sur le graphe (un depuis l'intérieur de la surface et l'autre depuis l'extérieur) et les nouveaux points sont ceux où les fronts se rejoignent.

Notre méthode de reconstruction de surface consiste à compléter le nuage des points initial avec des points très denses qui feront partie de la surface reconstruite finale. Cette opération est effectuée par la sélection de nouveaux points d'un ensemble très dense de points candidats, généré à partir de points de départ, et incluant les points initiaux. Notre approche considère l'ensemble des points candidats comme un graphe et la surface à reconstruire est un sous-ensemble de noeud de ce dernier. Travailler sur ce graphe, et par analogie avec la méthode d'ensemble de niveaux, la surface à reconstruire est l'interface entre deux fronts intérieure et extérieure propagant sur le graphe. La vitesse de propagation des deux fronts est contrôlée par un potentiel qui est défini sur les noeuds du graphe de telle sorte que les deux fronts collapent sur la frontière de l'objet.

**Construction du graphe.** Soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R}^3$ , l'ensemble des points initiaux. La première étape consiste à étendre cet ensemble avec un grand nombre de sommets candidats et de construire un graphe à partir de ce nouvel ensemble.

Soit  $C$  l'ensemble des points candidats. Ceux-ci sont régulièrement ajoutés au voisinage des points initiaux, tel que la densité des nouveaux points soit très élevée à proximité immédiate des points de  $X$  et décroisse au fur et à mesure que l'on s'éloigne des points de  $X$ . Cette addition, de même que la construction de la structure du graphe est réalisée grâce à la méthode de triangulation adaptative proposée dans [4] et qui produit un maillage triangulaire dont l'ensemble des sommets  $X' = X \cup C$ . On note  $G = (V, E, w)$  le graphe pondéré construit à partir du maillage précédemment obtenu, tel que  $V = X'$ . L'ensemble des arêtes  $E$  est donné par les arêtes d'un maillage triangulaire et la fonction de poids  $w$  définit une similitude entre deux sommets basées sur la distance euclidienne entre les coordonnées des deux points associés.

Finalement, la pondération des arêtes est effectuée à partir d'une fonction de similarité telle que

$$g_0(u, v) = 1, \text{ ou}$$

$$g_2(u, v) = \exp(-\mu(F_u, F_v)/\sigma^2) \text{ avec } \sigma > 0,$$

où  $F_u, u \in V$ .

**Carte de distance.** La carte de distance est une fonction  $D : V \rightarrow \mathbf{R}^+$  qui associe à chaque sommet  $u$  de  $G$  la distance entre l'ensemble des points initiaux  $X$  et  $u$ . Cette carte

non signée est obtenue en résolvant l'équation (6) pour la propagation d'un front unique à partir des points initiaux ( $\Omega_0 = X$ ) et avec une fonction de potentiel constante ( $P = 1$ ) pour une diffusion homogène. Cette carte sera utilisée pour déterminer la position des fronts intérieurs et extérieurs, mais également définir la fonction de potentiel contrôlant l'évolution de ces fronts.

**Initialisation des fronts intérieur et extérieur.** Les fronts intérieur et extérieur sont initialisés à distance égale du nuage de points initiaux, à partir de la fonction distance calculée précédemment  $\mathcal{D}$ . Le front intérieur  $\Gamma_i$  est initialisé par le sous-ensemble des sommets  $\Omega_0^i$  qui sont à l'intérieur de l'objet et à une distance  $d$  des points initiaux. Nous avons ainsi  $\Omega_0^i = \{u \mid \mathcal{D} = d \pm \varepsilon \text{ and } u \text{ inside}\}$ . De même, le front extérieur  $\Gamma_o$  est initialisé par le sous-ensemble  $\Omega_0^o$  des sommets qui sont en dehors de l'objet et à une distance  $d$  des points initiaux. Nous avons ainsi  $\Omega_0^o = \{u \mid \mathcal{D} = k \pm \varepsilon \text{ and } u \text{ outside}\}$ , avec  $k, d$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

**Champ de potentiel.** Dans le cas où l'objet a des parties fines, une diffusion homogène des deux fronts favoriserait le front interne et la rencontre des deux fronts aurait lieu à l'extérieur de l'objet (ce qui détruirait ces parties fines). Pour parer à ce problème, nous introduisons un potentiel qui contrôle la propagation des fronts pour qu'elle soit fortement ralentie à proximité des points initiaux (près des contours de l'objet) et rapide ailleurs.

La meilleure fonction de potentiel est fournie par la carte de distance  $\mathcal{D}$ . En effet, la carte de distance est presque nulle près des points initiaux, ce qui nous garantit que la propagation des fronts est ralentie jusqu'à être stoppée au niveau de la surface à reconstruire. La fonction potentielle est donc définie par  $P = \mathcal{D}$ .

**Reconstruction de surface.** Une fois que les deux fronts intérieur et extérieur sont initialisés, nous labelisons chaque sommets du graphe comme suit: les sommets appartenant à  $\Omega_0^i$  sont labelisées par 1 ( $L = 1$ ) et les sommets appartenant à  $\Omega_0^o$  sont étiquetées par 2 ( $L = 2$ ) et le reste de sommets sont labelisées par 0 ( $L = 0$ ). Nous propageons ces deux fronts sur le graphe en résolvant l'équation stationnaire présentée dans la section 2. L'ensemble initial est donné par  $\Omega_0 = \Omega_0^i \cup \Omega_0^o$ , et la fonction de potentiel est donné par  $P = \mathcal{D}$ . Grace au potentiel qui ralentit les fronts au voisinage de contour de l'objet, les fronts se rejoignent sur ce contour. Ensuite, les sommets qui se trouvent à l'intérieur de l'objet sont marqués par 1 et celles qui se trouvent en dehors de l'objet sont marqués par 2. Finalement, la surface résultante est reconstruite à partir des sommets appartenantes au label intérieur et qui ont au moins un voisin appartenant au label extérieur.

## 5 Expérimentations

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de notre approche sur des graphs avec une fonction de similarité  $g_2(u, v)$  et avec la norme  $\mathcal{L}_2$  pour le calcul du gradient. Les figures 1 et 2 illustrent le fonctionnement et la qualité de

Méthode	Temps	Mémoire utilisé	Triangles
Power Crust	504	2601	1,610,433
Poisson method	188	283	783,127
FFT method	93	1700	1,458,356
Hoppe et al.	82	230	630,345
MPU	78	421	2,121,041
Notre methode	45	980	2,759,146

TAB. 1: Temps de calcul des différentes méthodes de l'état de l'art pour l'exemple du lapin, à partir d'une comparaison fournie par [5]. Temps de calcul (secondes), pic de mémoire utilisée (mega-bytes) et nombre de triangles de l'objet reconstruit.

reconstruction de notre approche, tandis que le tableau 1 montre son efficacité comparé à l'état de l'art. Nous remarquons que notre approche est le plus rapide et n'utilise que peu de mémoire par rapport au nombre de triangles reconstruits.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une approche rapide de reconstruction de surface à partir de nuages de points basée sur la propagation des fronts sur un graphe pondéré. Nous avons montré que notre approche donne des résultats de très bonne qualité, il est rapide et ne nécessite pas beaucoup de mémoire.

## Références

- [1] EL Chakik Abdallah et al.: *Fast 3D surface reconstruction from point clouds using graph-based fronts propagation*. ACCV, 2012.
- [2] X. Desquesnes et al.: *Eikonal equation adaptation on weighted graphs: fast geometric diffusion process for local and non-local image and data processing*. Journal of Mathematical Imaging and Vision.
- [3] ELMOATAZ, A. et al.: *Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: a framework for image and manifold processing*. IEEE Transactions on Image Processing 17, 7 (2008), 1047-1060.
- [4] A. Claisse, P. Frey *A nonlinear PDE model for reconstructing a regular surface from sampled data using a level set formulation on triangular meshes*. Journal of Computational Physics archive, Volume 230 Issue 12, June, 2011, Pages 4636-4656.
- [5] Jalba et al.: *Efficient surface reconstruction using generalized coulomb potentials*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 13, 1512-1519 (November 2007).
- [6] B. Mederos et al.: *Surface reconstruction from noisy point clouds*. In Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing, page 53. Eurographics Association, 2005.
- [7] H.K. Zhao et al.: *Implicit and nonparametric shape reconstruction from unorganized points using variational level set method*. Computer Vision and Image Understanding, 80(3):295319, 2000.

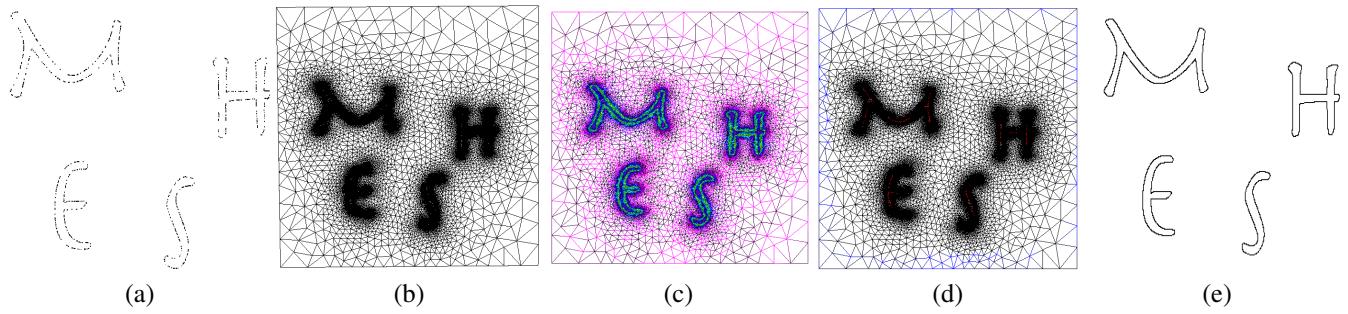


FIG. 1: Reconstruction de surface sur un nuage de points 2D. (a) Nuage de points initiaux, (b) maillage adaptatif [4], (c) carte de distance (les couleurs illustrent l'éloignement à partir des points initiaux), (d) les labels (la couleur bleu désigne les labels extérieurs et la couleur rouge désigne les labels intérieurs), (e) la surface reconstruite en utilisant notre approche.

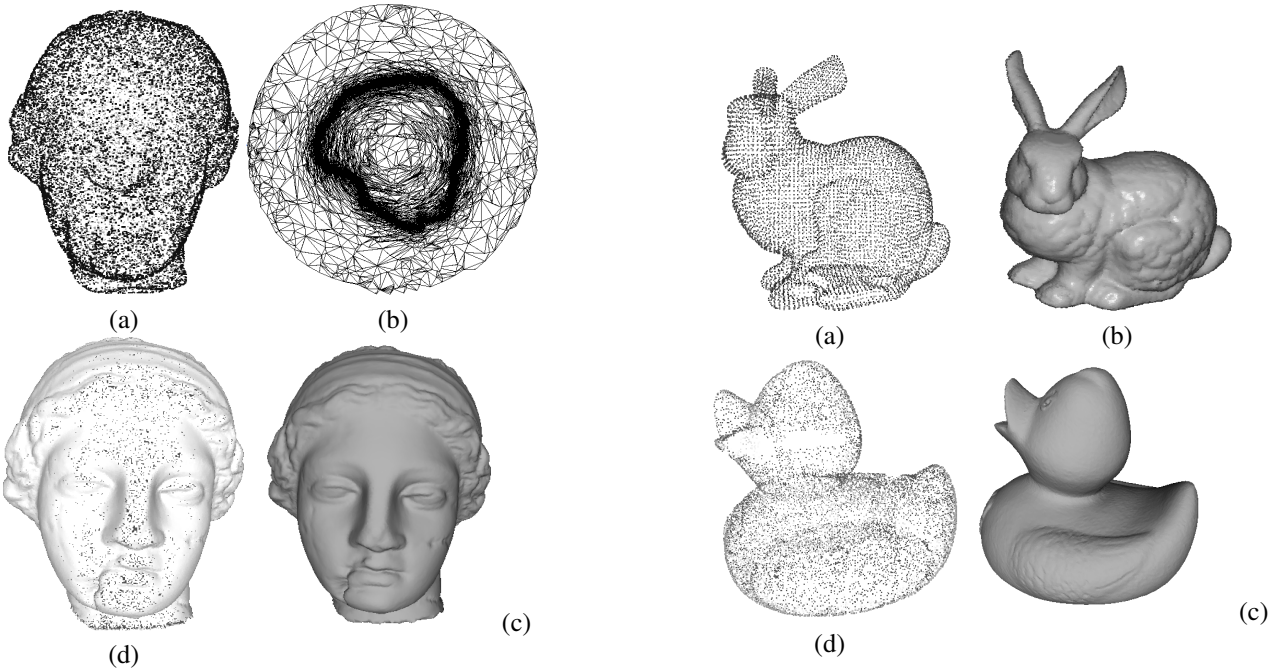


FIG. 2: Reconstruction de surface sur un nuage de points 2D. (a) Nuage de points initiaux, (b) maillage adaptatif, (c) carte de distance (les couleurs illustrent l'éloignement à partir des points initiaux), (d) les labels (la couleur bleu désigne les labels extérieurs et la couleur rouge désigne les labels intérieurs), (e) la surface reconstruite en utilisant notre approche.

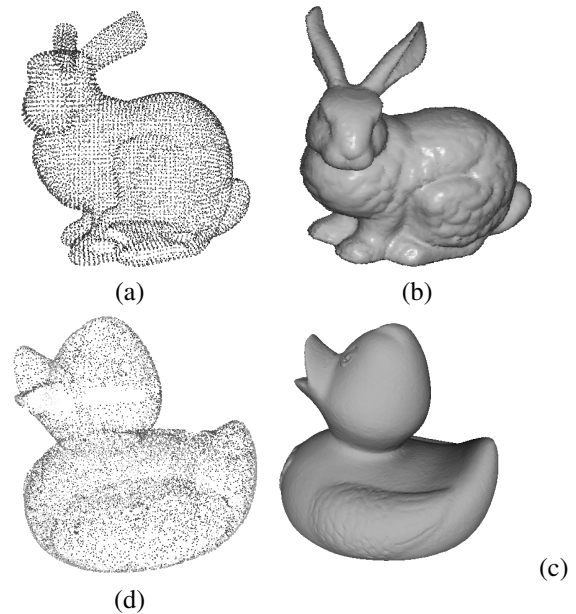


FIG. 3: Reconstruction de surface sur un nuage de points 2D. (a) Nuage de points initiaux, (b) maillage adaptatif, (c) carte de distance (les couleurs illustrent l'éloignement à partir des points initiaux), (d) les labels (la couleur bleu désigne les labels extérieurs et la couleur rouge désigne les labels intérieurs), (e) la surface reconstruite en utilisant notre approche.