

Performances de méthodes à sous-espace pour une géolocalisation directe à l'aide de stations éloignées

Cyrile DELESTRE^{1,2}, Anne FERRÉOL¹, Pascal LARZABAL²

¹Thales Communications & Security
4, Avenue des Louvresses 92230 Gennevilliers Cedex, France

²Laboratoire SATIE - ENS Cachan - CNRS - UniverSud
61 av du President Wilson 94235 CACHAN Cedex, France

cyrile.delestre@ens-cachan.fr, anne.ferreol@thalesgroup.com
pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr

Résumé – Les algorithmes à 1 étape récemment apparus dans la littérature pour la géolocalisation à l'aide de stations éloignées (DPD, LOST) sont très sensibles au nombre K de voies FFT pour le DPD, analogue au nombre de retards spatio-temporels à prendre en compte dans LOST. Cet article montre, à des fins de mise en oeuvre opérationnelle, l'influence de K sur la diminution du contraste entre les lobes principaux et secondaires du critère ainsi que sur le biais d'estimation en donnant une formulation analytique directement exploitable.

Abstract – The one step algorithms recently appeared in the litterature for geolocation with remote stations (DPD, LOST) are highly sensitive to the FFT voice number K for the DPD, similar to the number of the spatio-temporal delays to be taken into account in LOST. For the purpose of operational implementations, this paper shows the influence of K on the contrast decreasing between the main and the secondary lobes of the criterion and on the estimation bias thanks to a directly exploitable analytical formulation.

1 Introduction

Le problème traité concerne la géolocalisation de sources rayonnantes à l'aide de stations éloignées (vérifiant chacune l'hypothèse bande étroite, notée BE, couramment exploitée en traitement d'antenne). Il s'agit d'estimer les coordonnées géographiques des émetteurs grâce à des méthodes haute résolution supposant les signaux en bande étroite. On s'intéresse pour cela aux méthodes récentes à 1 étape car elles sont potentiellement plus performantes que les méthodes conventionnelles à 2 étapes (par exemple la triangulation). Cependant, comme elles travaillent sur l'ensemble des stations simultanément, le problème à traiter devient de fait large bande et elles sont sensibles au non respect de l'hypothèse bande étroite. C'est pour cela que Weiss a introduit récemment le DPD [1] et J. Bosse l'algorithme LOST [2]. L'objectif de cet article est d'évaluer les performances des méthodes de localisation à sous-espace lorsque les retards différentiels entre stations ne sont pas négligeables, ne respectant plus ainsi l'hypothèse bande étroite.

Ces méthodes doivent résoudre un problème maintenant devenu large bande suite à l'éloignement des stations qui rend le front d'onde non cohérent entre elles. L'objectif de cette article est d'évaluer l'influence de l'hypothèse bande étroite sur les performances de ces méthodes en terme de biais. En effet, ce problème n'apparaît pas dans les méthodes traditionnelles en 2 étapes. Il est nécessaire de l'étudier pour mettre en oeuvre, à

faible coût calculatoire, des algorithmes (par exemple DPD et LOST) tenant compte de cette largeur de bande.

On démontrera l'apparition d'un biais ainsi qu'une diminution de la robustesse aux ambiguïtés lorsque l'hypothèse BE n'est pas vérifiée sur l'ensemble des stations. Cette dernière expression donne un outil opérationnel pour choisir le nombre de canaux d'un banc de filtres ramenant un problème large bande à plusieurs problèmes bande étroite (DPD) ou encore le nombre de *shifts* dans un traitement spatio-temporel (par exemple LOST).

Notations : \mathbf{A} ou $(a_{ij})_{1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J} \forall (I, J) \in \mathbb{N}_*^2$ est une matrice de dimension $I \times J$, \mathbf{a} ou $(a_i)_{1 \leq i \leq I} \forall I \in \mathbb{N}_*$ est un vecteur colonne de dimension I , a ou A est un scalaire, \cdot^H est l'auto-adjoint d'une matrice ou d'un vecteur, \cdot^T est la transposée d'une matrice ou d'un vecteur, \cdot^* est le conjugué d'un scalaire, $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'espérance mathématique et \mathbb{O} est une matrice ou un vecteur nul aux dimensions adéquates.

2 Formalisation du problème

Nous considérerons durant cet article Q sources notées $s_q(t) \forall q \in [1; Q]$. Ces sources sont stationnaires, de statistiques données et de moyennes nulles. Elles sont décorrélatées deux à deux et d'émission spectralement blanche. Nous notons $\sigma_{s_q}^2$ la variance

de la q -ième source. Chaque signal source passe par un filtre de mise en forme (ex. Nyquist) noté $h_q(t)$. Nous considérons un canal de transmission parfait. La seule influence de celui-ci sera d'engendrer un retard sur la source dû au temps de propagation.

En réception nous considérons L bases où nous associons à chacune d'entre elles une atténuation complexe associée à chacune des sources notée $\rho_{l,q}$. Chacune de ces bases est composée de $M_l \forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket$ capteurs. Le système est ainsi composé de M capteurs ($\sum_{l=1}^L M_l = M$). Nous considérons également un bruit additif de type gaussien, blanc et circulaire de moyenne nulle et de variance σ_n^2 noté $\mathbf{n}(t)$.

Puis finalement nous considérons que les signaux en réception passent par K filtres d'un banc de filtres nommés $h_{b,f_k} \forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket$. Chaque k -ième filtre est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) possédant J coefficients. Les filtres ont une bande passante de $B = \frac{1}{KT_e}$ où T_e est le temps d'échantillonnage des bases. De même, la fréquence centrale de chacun de ces filtres est donnée par $f_k = \frac{k}{KT_e}$. Il est important de noter que $\frac{1}{T_e} \gg \max_{q \in \llbracket 1; Q \rrbracket} B_{s_q}$ où B_{s_q} est la bande passante du signal $s_q(t)$, ce qui permet d'assurer l'hypothèse bande étroite sur les bases. Nous pouvons voir un schéma représentant le modèle en Fig. 1.

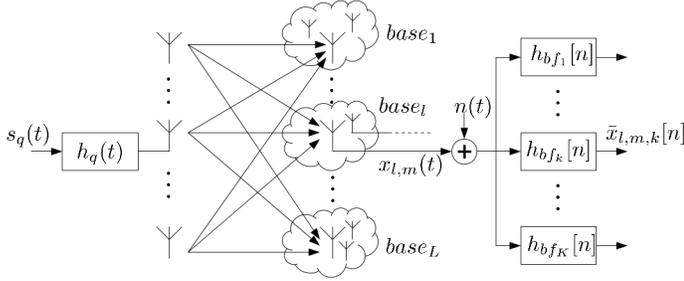


FIGURE 1 – Schéma du système.

2.1 Modélisation du signal

Nous nous intéressons dans ce présent article aux méthodes de géolocalisation multi-bases en une étape. Dans ces méthodes les signaux mesurés par les bases et traités sont concaténés en un vecteur :

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \dots, \mathbf{x}_l^T(t), \dots, \mathbf{x}_L^T(t)]^T \quad (1)$$

Nous ne considérons pas de réflecteur. Donc les M capteurs composant le système observent les trajets directs des sources. Nous pouvons alors écrire que chaque base en sortie du k -ième filtre du banc de filtres observe :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta(\mathbf{p}_q)) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

où $\mathbf{a}_l(\theta(\mathbf{p}_q))$ est le vecteur directionnel de la q -ième source sur la l -ième base, $\theta(\mathbf{p}_q)$ est l'angle d'arrivée de la q -ième source

(DoA pour *Direction of Arrival*) et $\tau_l(\mathbf{p}_q)$ est le temps différentiel entre la l -ième base et la q -ième source (TDoA pour *Time Differential of Arrival*). Nous pouvons réécrire l'équation (2) de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_k(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

où $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k, t) = \left(\rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \right)_{1 \leq l \leq L}$. Ainsi on observe très clairement que le système possède deux types d'inconnues, les atténuations complexes $\boldsymbol{\rho}$ et la position des sources \mathbf{p}_q .

2.2 Une méthode centralisée : le DPD

Nous allons ici nous intéresser à une méthode centralisée, le DPD (pour *Direct Position Determination*). Nous noterons $\bar{s}_{q,k}$ le signal filtré par le k -ième filtre du banc de filtres. Ainsi ce signal est supposé bande étroite. Nous posons l'approximation $\bar{s}_{q,k}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx \bar{s}_{q,k}(t)$. En reprenant l'équation (3), nous pouvons écrire :

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{BE}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \bar{s}_{q,k}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

où $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) = \left(\rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) e^{-2i\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)} \right)_{1 \leq l \leq L}$ et l'exposant BE signifie signaux bande étroite. Ensuite, se basant sur les méthodes à sous-espace, nous estimons la matrice de covariance dans chaque sous-bande fréquentielle :

$$\mathbf{R}_k^{BE} = \mathbb{E} [\bar{\mathbf{x}}_k^{BE}(t) \bar{\mathbf{x}}_k^{BE}(t)^H] \quad \forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket \quad (5)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \sigma_{s_q}^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \mathbf{u}^H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (6)$$

De ces K matrices de covariance nous déduisons K projecteurs estimés vers le sous-espace bruit, nommé $\hat{\Pi}_k^\perp$, orthogonal au sous-espace signal pour chaque sous-bande fréquentielle. Puis, pour finir, la méthode DPD est une somme incohérente des critères MUSIC dans chaque sous-bande :

$$J_{DPD}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{u}^H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, f_k) \hat{\Pi}_k^\perp \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, f_k) \quad (7)$$

La minimisation de ce critère selon $\boldsymbol{\rho}$ revient à chercher la valeur propre minimale suivante [1] :

$$J_{DPD}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ \sum_{k=1}^K \mathbf{u}^H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, f_k) \hat{\Pi}_k^\perp \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, f_k) \right\} \quad (8)$$

où $\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$ est la valeur propre minimale de la matrice \mathbf{A} . Ce critère est le critère DPD que nous considérerons dans cet article.

3 Matrice de covariance théorique

Nous allons étudier dans cette partie la matrice de covariance théorique associée à notre système. Ce dernier nous permettra d'avoir le critère du DPD théorique et permettra d'observer les biais. Nous nous plaçons dans le cas large bande. Donc l'approximation faite à l'équation (4) n'est plus vérifiée. Nous avons donc comme signal filtré par le banc de filtres :

$$\bar{\mathbf{x}}_k(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \left(\bar{s}_{q,k}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \right)_{1 \leq l \leq L} + \bar{\mathbf{n}}_k(t) \quad (9)$$

avec $\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \in M_{M,L}(\mathbb{C})$ une matrice où les vecteurs $\rho_{l,q} \mathbf{a}_l^T(\theta(\mathbf{p}_q)) e^{-2i\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)}$ sont placés sur la diagonale :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) = \begin{pmatrix} \rho_{1,q} \mathbf{z}_1(\mathbf{p}_q, f_k) & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \rho_{L,q} \mathbf{z}_L(\mathbf{p}_q, f_k) \end{pmatrix} \quad (10)$$

avec $\mathbf{z}_l(\mathbf{p}_q, f_k) = \mathbf{a}_l(\theta(\mathbf{p}_q)) e^{-2i\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)}$. Nous rappelons que nous avons des sources décorréliées deux à deux, alors la matrice de covariance théorique large bande s'énonce comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= \mathbb{E} [\bar{\mathbf{x}}_k(t) \bar{\mathbf{x}}_k^H(t)] \quad \forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket \quad (11) \\ &= \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \mathbf{R}_{\bar{s}_k}(\mathbf{p}_q) \mathbf{U}^H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}_q, f_k) \\ &\quad + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (12) \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{R}_{\bar{s}_k}$ est la matrice de covariance des signaux transmis et filtrés par le k -ième filtre du banc de filtres.

$$\mathbf{R}_{\bar{s}_k}(\mathbf{p}_q) = \begin{pmatrix} r(\bar{s}_{q,k}, 0) & \cdots & r(\bar{s}_{q,k}, \Delta\tau_{1,L}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(\bar{s}_{q,k}, \Delta\tau_{1,L}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & r(\bar{s}_{q,k}, 0) \end{pmatrix} \quad (13)$$

avec

$$\begin{cases} r(\bar{s}_{q,k}, \tau) = \mathbb{E} [\bar{s}_{q,k}(t) \bar{s}_{q,k}^*(t - \tau)] \\ \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q) = \tau_l(\mathbf{p}_q) - \tau_v(\mathbf{p}_q) \quad \forall (l, v) \in \llbracket 1; L \rrbracket^2 \end{cases} \quad (14)$$

L'expression de $r(\bar{s}_{q,k}, \tau)$ dépend des coefficients du k -ième filtre du banc de filtres et du filtre de mise en forme :

$$r(\bar{s}_{q,k}, \tau) = \sigma_{\bar{s}_q}^2 \mathbf{h}_{bf_k}^H \boldsymbol{\Gamma}(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) \mathbf{h}_{bf_k} \quad (15)$$

où $\mathbf{h}_{bf_k} \in M_J(\mathbb{C})$ est le vecteur des coefficients du k -ième filtre du banc de filtres et $\boldsymbol{\Gamma} \in M_{J,J}$ la matrice des énergies croisées du filtre de mise en forme.

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) = \begin{pmatrix} \gamma_{\Delta\tau_{l,v}}(1, 1) & \cdots & \gamma_{\Delta\tau_{l,v}}(1, J) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\Delta\tau_{l,v}}(J, 1) & \cdots & \gamma_{\Delta\tau_{l,v}}(J, J) \end{pmatrix} \quad (16)$$

où γ est l'énergie croisée du filtre de mise en forme de la source $s_q(t)$:

$$\gamma_{\Delta\tau_{l,v}}(i, j) = \int_{\mathbb{R}} h_q(iT_e - t) h_q^*(jT_e - \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q) - t) dt \quad (17)$$

Dans la suite de cet article nous nous appuierons sur ce résultat pour observer certaines conséquences dû à l'effet large bande.

4 Biais analytique

Nous allons chercher à donner une expression analytique du biais sur la localisation de sources, nommé $\Delta\mathbf{p}_q = \hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{p}$, engendré *in fine* par l'écart entre la matrice de covariance bande étroite supposée dans le DPD et celle large bande. Nous posons :

$$\Delta\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^{BE} \quad (18)$$

Nous exprimons ici le biais du projecteur, où dans [3], [4] il est montré que la relation au premier ordre entre $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_k$ et $\boldsymbol{\Pi}_k$ est la suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp = \boldsymbol{\Pi}_k^\perp - \Delta\boldsymbol{\Pi}_k^\perp \quad (19)$$

avec

$$\Delta\boldsymbol{\Pi}_k^\perp = \boldsymbol{\Pi}_k^\perp \Delta\mathbf{R}_k (\mathbf{R}_k^{BE})^+ + (\mathbf{R}_k^{BE})^+ \Delta\mathbf{R}_k \boldsymbol{\Pi}_k^\perp \quad (20)$$

où $(\cdot)^+$ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose. L'expression du biais sur les paramètres est donné en effectuant un pas de l'algorithme de descente de Gauss-Newton :

$$\hat{\mathbf{p}}_q = \mathbf{p}_q - \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(J_{DPD}(\mathbf{p}_q)) \nabla J_{DPD}(\mathbf{p}_q) \quad (21)$$

où ∇ est le gradient et $\tilde{\mathbf{H}}$ est l'approximation de la matrice hessienne. Si nous définissons le gradient par $\nabla(\mathbf{p}) = (\nabla J_{DPD}(p_x), \nabla J_{DPD}(p_y))^T$, nous avons donc pour chaque élément du gradient dans le cadre du DPD :

$$\nabla J_{DPD}(p_i) = 2 \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_i} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp \mathbf{u}(\mathbf{p}, f_k) \right\}, \forall i \in \{x, y\} \quad (22)$$

et si nous définissons l'approximation de la hessienne par :

$$\tilde{\mathbf{H}}(J_{DPD}(\mathbf{p}_q)) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11}(p_x) & \tilde{H}_{12}(p_x, p_y) \\ \tilde{H}_{21}(p_x, p_y) & \tilde{H}_{22}(p_y) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Nous avons alors pour chaque élément :

$$\tilde{H}_{ij}(\mathbf{p}) = 2 \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_i} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_j} \right\}, \forall (i, j) \in \{x, y\}^2 \quad (24)$$

En utilisant l'équation (19) du projecteur et effectuant un développement limité d'ordre 1 du biais $\Delta\mathbf{p}_q$ suivant la matrice $\Delta\mathbf{R}_k$ [4], les expressions de $\nabla(p_i)$ et $\tilde{H}_{ij}(\mathbf{p}_i) \forall (i, j) \in \{x, y\}^2$ sont :

$$\begin{cases} \nabla J_{DPD}(p_i) \approx -2 \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}_k^\perp \Delta\mathbf{R}_k (\mathbf{R}_k^{BE})^+ \mathbf{u}(\mathbf{p}, f_k) \right\} \\ \tilde{H}_{ij}(p_i, p_j) \approx 2 \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}_k^\perp \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p}, f_k)}{\partial p_j} \right\} \end{cases}$$

5 Simulations

A présent nous allons considérer une source seule ($L = 1$) avec deux bases ($Q = 2$). Nous allons également considérer un bruit nul ($\sigma_n^2 = 0$), le but étant d'éliminer toute perturbation autre que l'effet large bande.

Dans un repère cartésien, nous placerons la première base à $(-200m, -200m)$, puis la deuxième à $(200m, -200m)$ et nous déplacerons la source sur l'axe des abscisses. Nous appellerons

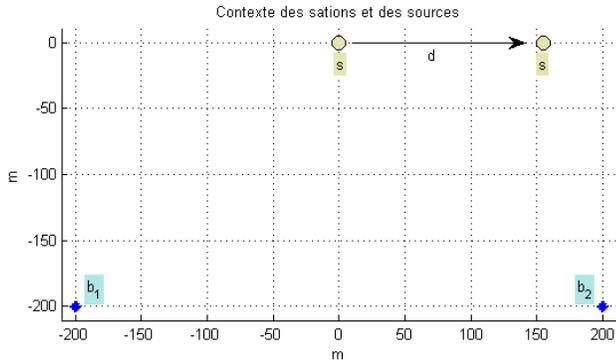


FIGURE 2 – Contexte de simulation.

ce déplacement d . Ce contexte est représenté à la Fig. 2.

La source aura pour filtre de mise en forme le filtre de Nyquist et possède une fréquence porteuse $f_0 = 900GHz$. Les bases sont composées de 6 capteurs dont 5 en formation circulaire autour du sixième placé au centre. Le rayon des bases est de $0.8m$. Les deux bases sont parfaitement synchrones avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 500kHz$.

Nous faisons déplacer la source de $d = 0$ à $d = 300m$ afin de faire apparaître l'effet large bande. A $d = 0$ la source se trouve à équidistance des bases, le signal est donc bande étroite sur le système. Comme on peut le voir à la Fig. 3 pour de petites distances de d , le biais est relativement faible. De même, le minimum du lobe du critère en la source est quasiment nul.

Cependant quand d grandit, on voit que pour $K = 5$ (en bleu) le biais croît à mesure que l'approximation bande étroite devient fautive. Par exemple à $300m$ nous avons une erreur sur la position de $1m$. De même, on peut voir que le lobe de la source monte pour progressivement atteindre le deuxième lobe le plus bas. On constate ici également l'importance du choix du nombre de filtres dans le banc de filtres. En effet, pour $K = 3$ (en rouge), en plus d'une augmentation du biais sur l'estimation de la position de la source on constate que le lobe de la source croît plus rapidement et on constate qu'on ne peut plus estimer la position de la source à $280m$. Tout ceci est d'autant plus vrai dès lors qu'on ajoute du bruit, rendant le niveau des lobes variable.

6 Conclusion

Les résultats obtenus dans cet article devraient sensibiliser les concepteurs de systèmes de géolocalisation travaillant en 1 seule étape à l'influence, sur les performances, du nombre K de voies qu'ils mettent en oeuvre. En effet, les méthodes d'estimation doivent maintenant nécessairement travailler en large bande, et les solutions apparues récemment dans la littérature telles que le DPD reposent sur un découpage de la bande spectrale en K voies. Après avoir établi la matrice théorique dont les algo-

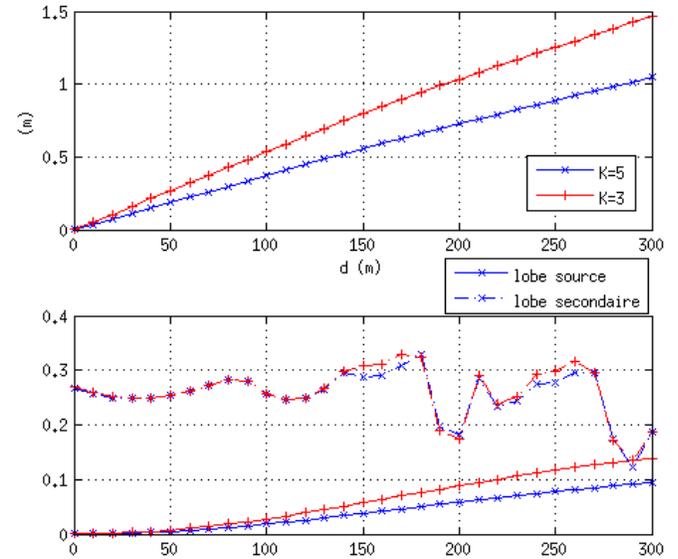


FIGURE 3 – (haut) biais paramétrique, (bas) niveau des lobes.

rithmes exploitent la structure, nous avons montré en simulation que la dynamique entre les lobes principaux et secondaires s'estompait considérablement, nécessitant des tests statistiques sur la valeur de l'optimum lors de l'optimisation pour éviter les points aberrants. Nous avons aussi établi le biais de cette méthode en fonction de K . Cette dernière relation permettra de prédéterminer K relativement à une précision attendue ou encore à une qualité de calibration d'antenne. Ce travail est préliminaire et il doit maintenant être approfondi quant à l'utilisation effective de ces résultats sur une mise en oeuvre opérationnelle.

Références

- [1] Alon Amar & Anthony J. Weiss, *DIRECT POSITION DETERMINATION OF MULTIPLE RADIO SIGNALS*, IEEE ICASP 2004, II-81.
- [2] Jonathan Bosse, *Thèse : Géolocalisation de sources radioélectriques : stratégies, algorithmes et performances*, 2012.
- [3] Hamid Krim, Philippe Forster & John G. Proakis, *Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 40, # 7, 1992.
- [4] Anne Ferréol, Pascal Larzabal & Mats Viberg, *Performance Prediction of Maximum-Likelihood Direction-of-Arrival Estimation in the Presence of Modeling Errors*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, # 10, 2008.