

# Théorie des Matrices Aléatoires Appliquée à la Détection STAP Rang Faible

Alice COMBERNOUX<sup>1</sup>, Frédéric PASCAL<sup>1</sup>, Guillaume GINOLHAC<sup>2</sup>, Marc LESTURGIE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire SONDRRA - Supelec, Plateau de Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>2</sup>LISTIC - Polytech Annecy-Chambéry, 5 chemin de Bellevue, 74944 Annecy-le-Vieux Cedex, France

alice.combernoux@supelec.fr, frederic.pascal@supelec.fr  
guillaume.ginolhac@univ-savoie.fr, marc.lesturgie@supelec.fr

**Résumé** – Le papier se place dans le cadre de détection de cible dans un bruit composé d’un fouillis gaussien de rang faible et d’un bruit blanc gaussien. Dans ce contexte, il est intéressant d’utiliser une version adaptative du détecteur *Low Rank Normalized Matched Filter*, noté LR-ANMF qui est fonction de l’estimation du projecteur sur le sous-espace fouillis. On montre dans ce papier que le détecteur LR-ANMF basé sur la SCM est consistant quand le nombre de données secondaires  $K \rightarrow \infty$  pour une dimension des données  $m$  fixe mais n’est pas consistant quand  $m$  et  $K$  tendent vers l’infini au même ratio, i.e.  $m/K \rightarrow c \in (0, \infty)$ . En utilisant les résultats de la théorie des matrices aléatoires, on propose alors une nouvelle version du détecteur LR-ANMF consistante dans les deux cas. L’application du nouveau détecteur sur des données STAP montre l’intérêt de notre approche.

**Abstract** – The paper addresses the problem of target detection embedded in a disturbance composed of a low rank Gaussian clutter and a white Gaussian noise. In this context, it is interesting to use an adaptive version of the Low Rank Normalized Matched Filter detector (LR-ANMF) which is a function of the estimation of the projector onto the clutter subspace. In this paper, we show that the LR-ANMF detector is consistent when the number of secondary data  $K \rightarrow \infty$  for a fixed data dimension  $m$  but is not consistent when  $m$  and  $K$  both tend to infinity at the same rate, i.e.  $m/K \rightarrow c \in (0, \infty)$ . Based on random matrix theory, we then propose a new version of the LR-ANMF detector which is consistent in both cases. The application of our new detector on STAP data shows the interest of our approach.

## 1 Introduction

Dans le contexte de détection de cible dans un bruit composé d’un fouillis gaussien de rang faible et d’un bruit blanc additif gaussien, on peut utiliser le détecteur *Low Rank Normalized Matched Filter* (LR-NMF) [1] afin d’exploiter la structure rang faible du fouillis. Bien que sa version non rang faible (détecteur NMF [2]) dépend de la matrice de covariance, le détecteur LR-NMF ne nécessite que le projecteur sur le sous-espace fouillis. En pratique, ce projecteur et la matrice de covariance sont inconnus et il est nécessaire de les estimer grâce à  $K$  données secondaires, données qui partagent les mêmes propriétés que les données sous test. Il est connu que la version rang faible adaptatif du détecteur nécessite beaucoup moins de données secondaires que sa version classique (détecteur ANMF [3]) pour des performances équivalentes [4, 5].

Cependant, pour des données à grandes dimensions, les performances du détecteur LR-ANMF peuvent être entachées par ces grandes dimensions. De plus, le détecteur LR-ANMF est composé de 3 formes quadratiques et, d’après [6], il est connu que, bien que ces formes quadratiques soient consistantes quand le nombre de données secondaires  $K \rightarrow \infty$  pour une taille des données  $m$  fixée, elles ne sont plus consistantes quand la taille des données  $m$  tend aussi vers l’infini. De ce fait, on montrera dans ce papier que le détecteur LR-ANMF est consistant

quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé mais ne l’est plus quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio, i.e.  $m/K \rightarrow c \in (0, \infty)$ . Grâce à la théorie des matrices aléatoires et aux estimateurs de Girko [7], on propose de développer un nouveau détecteur rang faible adaptatif basé sur d’autres estimateurs des formes quadratiques. Ces estimateurs correspondent à l’estimateur G-MUSIC [8] qui a été construit pour être consistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio. On étudiera dans ce papier la consistance du nouveau détecteur LR-ANMF proposé.

Afin d’illustrer l’intérêt du détecteur proposé, on étudiera l’application STAP [9] car la perturbation du signal à détecter est alors composée d’un fouillis gaussien rang faible et d’un bruit blanc gaussien. De plus, la dimension des données est toujours grande devant le nombre de données secondaires.

*Notations* : Une lettre en italique est une quantité scalaire, les caractères gras en minuscule (majuscule) sont des vecteurs (matrices) et  $(\cdot)^H$  correspond au transposé conjugué.  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité de taille  $N \times N$ ,  $\text{tr}(\cdot)$  est l’opérateur trace et  $\text{diag}(\cdot)$  est l’opérateur diagonalisation tel que  $(\mathbf{A})_{i,i} = (\text{diag}(\mathbf{a}))_{i,i} = (\mathbf{a})_{i,i}$  et égal à 0 sinon.

## 2 Détection rang faible (LR)

### 2.1 Formulation du problème

L’objectif du problème est de détecter un signal complexe  $d$  dans bruit additif  $c + n$  dans le vecteur d’observation  $x \in$

$\mathbb{C}^{m \times 1}$ . On peut alors écrire le problème de détection sous la forme du test d'hypothèses binaires suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (1)$$

où  $K$  est le nombre de données secondaires,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  sont les données secondaires et  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  (ou  $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ ) est le vecteur bruit blanc additif complexe gaussien.  $\mathbf{d}$  est la réponse de la cible et est égale à  $\alpha \mathbf{a}(\Theta)$  où  $\alpha$  est un paramètre inconnu déterministe et  $\Theta$  est un vecteur déterministe inconnu contenant les paramètres de localisation de la cible. Le fouillis  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  est modélisé par un vecteur aléatoire complexe gaussien centré et de matrice de covariance  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{c}$  ou  $\mathbf{c}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{C})$ ). La matrice de covariance est normalisée selon  $\text{tr}(\mathbf{C}) = m$ . Par conséquent, la matrice de covariance des données secondaires peut s'écrire  $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . De plus, le fouillis est considéré de rang faible  $r$  (comme dans l'application STAP d'après la formule de Brennan [10]). Notons  $\text{rang}(\mathbf{C}) = r \ll m$  et on peut écrire la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{C}$  comme suit  $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ , où  $\gamma_i$  et  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  sont respectivement les valeurs propres non nulles et les vecteurs propres associés de  $\mathbf{C}$ . La matrice de covariance  $\mathbf{R}$  des données secondaires se décompose alors :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{U}_r \ \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\Delta}_0 = \sigma^2 \mathbf{I}_{m-r} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_r \ \mathbf{U}_0]^H \quad (2)$$

où  $\hat{\Delta}_r$  et  $\hat{\Delta}_0$  sont les matrices diagonales composées respectivement des valeurs propres du fouillis et du bruit,  $\lambda_1 = \gamma_1 + \sigma^2 > \dots > \lambda_r = \gamma_r + \sigma^2 > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = \sigma^2$ . On définit ensuite le projecteur sur le sous-espace fouillis  $\hat{\Pi}_c$  et le projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace du fouillis  $\hat{\Pi}_c^\perp$  :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_c &= \mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^H = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \\ \hat{\Pi}_c^\perp &= \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H = \mathbf{I}_m - \hat{\Pi}_c = \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.2 Le détecteur LR-NMF

Tout d'abord, on effectue un pré-traitement du vecteur d'observation afin d'enlever le fouillis, et un problème de détection de signal complexe est retrouvé et défini par le test d'hypothèses binaires suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{r} = \mathbf{U}_0^H \mathbf{x} = \mathbf{n}_0 \\ H_1 : \mathbf{r} = \mathbf{U}_0^H \mathbf{x} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{n}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Le problème de détection est résolu en considérant la puissance du bruit blanc  $\mathbf{n}_0$  inconnue. Le test de détection utilisé correspond au *Normalized Matched Filter* dans sa version rang faible, notée LR-NMF (*Low Rank Normalized Matched Filter* [1]) :

$$\Lambda_{\text{LR-NMF}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \delta_{\text{NMF}} \quad (5)$$

où  $\underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \delta_{\text{NMF}}$  signifie que l'hypothèse  $H_1$  (resp.  $H_0$ ) est décidée si le test  $\Lambda_{\text{LR-NMF}}(\Theta)$  est supérieur (resp. inférieur) au seuil  $\delta_{\text{NMF}}$ .

## 3 Détecteur rang faible issu de la théorie des matrices aléatoires

### 3.1 Inconsistance du détecteur LR-SCM

L'estimation traditionnelle de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  du bruit total et du projecteur  $\hat{\Pi}_c^\perp$  orthogonal au sous-espace du fouillis est premièrement présentée. L'estimation est basée sur la *Sample Covariance Matrix* (SCM) qui est calculée à partir des  $K$  données secondaires et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H = \sum_{i=1}^r \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H + \sum_{i=r+1}^m \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \\ &= [\hat{\mathbf{U}}_r \ \hat{\mathbf{U}}_0] \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\Delta}_0 \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}_r \ \hat{\mathbf{U}}_0]^H \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\hat{\lambda}_i$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_i$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_0$ ,  $\hat{\Delta}_r$  and  $\hat{\Delta}_0$  sont respectivement les valeurs propres, les vecteurs propres, le sous-espace fouillis, le sous-espace bruit et les matrices diagonales des valeurs propres estimées associées. Finalement, les projecteurs estimés sont :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}} &= \hat{\mathbf{U}}_r \hat{\mathbf{U}}_r^H = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \\ \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}}^\perp &= \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H = \mathbf{I}_m - \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}} = \sum_{i=r+1}^m \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \end{aligned} \quad (7)$$

En utilisant la SCM, le détecteur estimé LR-SCM s'écrit :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR-SCM}}(\Theta) = \Lambda_{\text{LR-NMF}}(\Theta) |_{\hat{\Pi}_c^\perp = \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}}^\perp} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \delta_{\text{SCM}} \quad (8)$$

En observant le détecteur LR-ANMF à l'Eq. (8) et (5), on peut noter que chaque élément est une forme quadratique ( $\mathbf{s}_1^H \mathbf{A} \mathbf{s}_2$ ) dont nous étudierons sa consistance asymptotique quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé et quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio  $m/K \rightarrow c$ .

Les résultats de convergence sont présentés sous les hypothèses suivantes :

**(Hyp1)** La norme spectrale de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  est uniformément bornée pour tout  $m$ .

**(Hyp2)** La norme des deux vecteurs déterministes  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  est uniformément bornée pour tout  $m$ <sup>1</sup>.

**(Hyp3)** La SCM peut prendre la forme  $\hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{R}^{1/2}$ , où  $\mathbf{R}^{1/2}$  est une matrice hermitienne  $m \times m$  définie positive et racine carrée de la vraie matrice de covariance, et  $\mathbf{V}$  est une matrice  $m \times K$  dont les éléments sont des variables aléatoires i.i.d. absolument continues, avec les parties réelles et imaginaires i.i.d., centrées, de variance  $1/(2K)$ , et de moment 8 fini.

**(Hyp4)** Le ratio  $m/K$  est choisi tel que  $m/K < \xi$  où  $\xi$  est défini à l'Eq.(20) de [6].

D'après [6]-[8] et sous les hypothèses **(Hyp1-Hyp4)** :

$$\begin{cases} \eta_{\text{trad}} = \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \eta_{\text{th}} = \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \\ \eta_{\text{trad}} = \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c, \text{SCM}}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \bar{\eta} = \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \neq \eta_{\text{th}} \end{cases} \quad (9)$$

De plus,  $\bar{\Pi}_c^\perp = \sum_{i=1}^m w(i) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  [6], avec :

1. Dans ce papier,  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  prennent les valeurs de  $\mathbf{a}(\Theta)$  ou  $\mathbf{x}$  (combinaison linéaire de vecteurs directionnels  $\mathbf{a}(\Theta)$  plus un bruit blanc) qui sont indépendants des données secondaires et donc considérées comme des vecteurs déterministes.

$$w(i) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m-r-1} \sum_{n=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_n - \sigma^2} - \frac{\mu_m}{\lambda_n - \mu_m} \right), & \text{si } i > r \\ \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} - \frac{\mu_m}{\lambda_i - \mu_m}, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (10)$$

où  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{m} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}^T$  et  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ . Par conséquent, chaque élément du détecteur est consistant quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé et inconsistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio  $\frac{m}{K} \rightarrow c$ . De plus, d'après le théorème de Slutsky, le ratio de ces quantités et le détecteur LR-SCM sont consistant quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé mais inconsistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio.

### 3.2 Forme quadratique dérivée des matrices aléatoires

Afin de résoudre ce problème, on suggère d'utiliser un estimateur de nos formes quadratiques consistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio. Il se nomme G-MUSIC [8] et on a, sous les hypothèses (**Hyp1-Hyp4**) :

$$\boldsymbol{\eta}_{\text{GSCM}} = \mathbf{s}_1^H \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m, K \rightarrow \infty, m/K \rightarrow c]{\text{p.s.}} \eta_{\text{th}} \quad (11)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp$  est un pseudo-projecteur prenant en compte tout les vecteurs propres estimés de la SCM et menant à une meilleure estimation de la forme quadratique  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{A} \mathbf{s}_2$ . Il s'écrit

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi(i) \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad [6], \text{ avec :} \quad (12)$$

$$\phi(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{n=1}^r \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\mu}_n} \right), & \text{si } i > r \\ - \sum_{n=r+1}^m \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\mu}_n} \right), & \text{si } i \leq r \end{cases}$$

où  $\hat{\mu}_1 \geq \dots \geq \hat{\mu}_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) - \frac{1}{m} \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}^T$  et  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m]^T$ . Si  $c > 1$ ,  $\hat{\mu}_m = \dots = \hat{\mu}_K = 0$ .

### 3.3 Le détecteur LR-GSCM

Le détecteur LR-GSCM est défini via la SCM et la théorie des matrices aléatoires :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR-GSCM}}(\boldsymbol{\Theta}) = \Lambda_{\text{LR-NMF}}(\boldsymbol{\Theta}) \Big|_{\boldsymbol{\Pi}_c^\perp = \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp}^{\substack{H_1 \\ \geq \\ H_0}} \delta_{\text{GSCM}} \quad (13)$$

L'expression de  $\delta_{\text{GSCM}}$  n'est pas déterminée. Il est à noter que la notation  $\boldsymbol{\Pi}_c^\perp = \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp$  n'est pas totalement rigoureuse. En effet,  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp$  n'est pas un projecteur mais un pseudo-projecteur. On remplace  $\boldsymbol{\Pi}_c^\perp$  par  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{c, \text{GSCM}}^\perp$  avec l'intention de bénéficier d'une meilleure estimation des formes quadratiques. Puis, suivant le même raisonnement que pour le détecteur LR-SCM, on conclut de la partie 3.2 que chaque élément est consistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio. Par conséquent, d'après le théorème de Slutsky, le ratio de ces quantités et le détecteur LR-GSCM sont consistant quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même ratio :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR-GSCM}}(\boldsymbol{\Theta}) \xrightarrow[m, K \rightarrow \infty, m/K \rightarrow c < \infty]{\text{P}} \Lambda_{\text{LR-NMF}}(\boldsymbol{\Theta}) \quad (14)$$

## 4 Application au traitement STAP

Afin d'illustrer l'intérêt du détecteur LR-GSCM (issu de la théorie des matrices aléatoires), on s'intéresse à l'application de traitement STAP. L'objet du STAP est de détecter une cible en mouvement grâce à une antenne linéaire uniforme composée de  $N$  capteurs recevant  $M$  impulsions. Dans cette partie,  $N = 4$  et  $M = 16$  pour que la dimension des données soit élevée  $m = NM = 64$ . En application STAP,  $\boldsymbol{\Theta} = (\theta, v)$  où  $\theta$  est l'angle d'arrivée (DoA) et  $v$  la vitesse relative de l'objet. Le DoA de la cible et sa vitesse relative par rapport à l'avion (la plateforme radar) sont  $\theta_d = 0^\circ$  et  $v_d = 35 \text{m.s}^{-1}$ . D'après la formule de Brennan, le rang du fouillis est  $r = N + (M-1)\beta = 19$ , avec  $\beta = 1$  dans notre configuration. La longueur d'onde du signal est  $l_0 = 0.667 \text{m}$ , la puissance du bruit blanc additif est  $\sigma^2 = 1$ , le rapport signal sur bruit est  $RSB = 20 \text{dB}$  et le rapport fouillis sur bruit est  $RFB = 40 \text{dB}$ .

On compare en premier lieu en Fig. 1 et Fig. 2 deux cartes typiques des détecteurs LR-SCM et LR-GSCM en fonction du DoA et de la vitesse relative, pour un nombre fixé à  $K = 2r$  de données secondaires. On observe que la cible est bien détectée pour les deux détecteurs. Cependant, on remarque aussi une forte diagonale sur la carte du détecteur LR-GSCM. Ceci correspond à la crête de fouillis et à la meilleure estimation de la forme quadratique  $(\mathbf{a}(\theta, f)^H \boldsymbol{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\theta, f))$ . Ce phénomène est aussi présent sur le détecteur LR-SCM, comme illustré en Fig. 3, représentant une coupe des détecteurs pour  $\theta = \theta_d$  et  $K = 2r$ . Ce phénomène peut donc entacher la détection car les valeurs de cette diagonale peuvent être supérieures à celles de la cible. Par conséquent, puisqu'on ne peut pas détecter une cible immobile dans le fouillis, une solution alternative est proposée. On force les éléments du détecteur correspondant au fouillis à 0 :

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_{\text{LR-SCM}}(\theta, f(\beta) \sin(\theta)) = 0 \\ \hat{\Lambda}_{\text{LR-GSCM}}(\theta, f(\beta) \sin(\theta)) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

où  $\beta$  est un paramètre du système radar. On applique aussi le même procédé au détecteur LR-SCM pour pouvoir comparer les détecteurs.

Les résultats avec la solution proposée à l'Eq. (15) sont maintenant présentés. On observe en Fig. 4 un gain sur le lobe principal sur la coupe des cartes des détecteurs pour  $\theta = \theta_d$  et  $K = 2r$ . On remarque en Fig. 4 un gain de 0.15 sur la valeur du détecteur LR-GSCM sur le lobe principal et des valeurs similaires des deux détecteurs en dehors du lobe principal.

On illustre ensuite le gain d'estimation grâce à l'EQM entre le détecteur LR-NMF et le détecteur estimé (LR-SCM ou LR-GSCM) en  $\theta = \theta_d$  et  $v = v_d$ . Pour ceci, on observe en Fig. 5 l'EQM en fonction du nombre de données secondaires  $K$ , mesurée sur 10.000 réalisations. On note que l'EQM entre le détecteur LR-NMF et le détecteur LR-GSCM est inférieure à celle entre le détecteur LR-NMF et le détecteur LR-SCM, pour tout  $K$ . Le détecteur LR-NMF est donc mieux estimé via l'estimateur proposé à l'Eq. (13) qu'avec l'estimateur traditionnel.

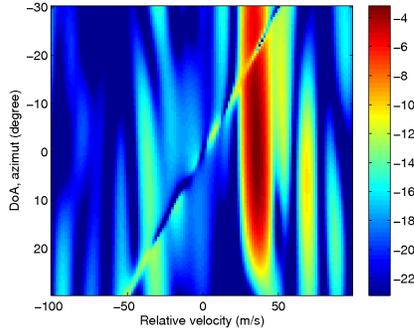


FIGURE 1 – Détecteur LR-SCM (dB) en fonction du DoA et de la vitesse relative de l'objet réflecteur.

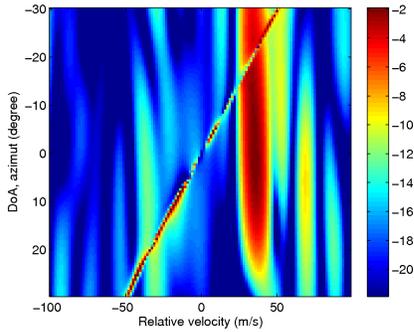


FIGURE 2 – Détecteur LR-GSCM (dB) en fonction du DoA et de la vitesse relative de l'objet réflecteur.

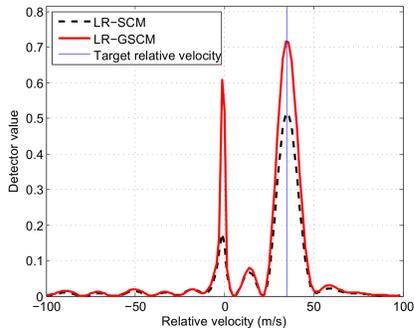


FIGURE 3 – Valeur des détecteurs LR-SCM et LR-GSCM pour  $\theta = \theta_d$  en fonction de la vitesse relative de l'objet réflecteur.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, un nouveau détecteur adaptatif rang faible a été développé basé sur la théorie des matrices aléatoires et plus précisément sur l'estimateur G-MUSIC. En effet, le détecteur rang faible traditionnel (LR-SCM), basé sur une simple décomposition en valeurs propres vecteurs propres de la SCM pour l'estimation du projecteur sur le sous-espace orthogonal au fouillis est inconsistant quand le nombre de données secondaires  $K$  et la dimension des données  $m$  tendent vers l'infini au même ratio. Au contraire, notre nouveau détecteur est consistant dans ce régime asymptotique. De plus, on a montré l'intérêt de notre approche à travers le traitement STAP, en terme d'EQM du détecteur en les paramètres de la cible.

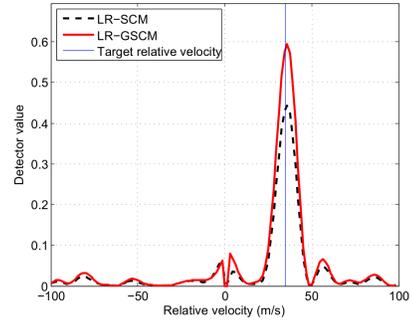


FIGURE 4 – Valeur des détecteurs LR-SCM et LR-GSCM modifiés pour  $\theta = \theta_d$  en fonction de la vitesse relative de l'objet réflecteur.

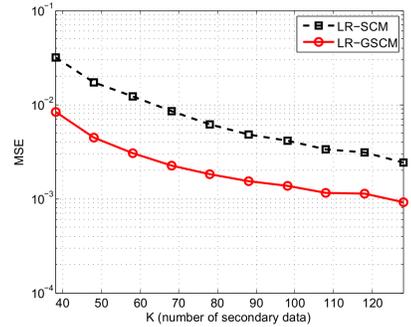


FIGURE 5 – EQM entre le détecteur LR-NMF et les détecteurs estimés pour le DoA et la vitesse relative de la cible.

## Références

- [1] M. Rangaswamy and F.C. Lin and K.R. Gerlach, "Robust Adaptive Signal Processing Methods for Heterogeneous Radar Clutter Scenarios", *Signal Processing*, vol. 84, pp. 1653 – 1665, 2004.
- [2] L.L. Scharf and B. Friedlander, "Matched Subspace Detectors", *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 42, pp. 2146 – 2157, 1994.
- [3] L.L. Scharf and L.T. Mac Worther, "Adaptive matched subspace detector and adaptive coherence", *Proc. of 30th Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.*, 1996.
- [4] I. Kirstein and D. Tufts, "Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix", *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 30, pp. 55 – 67, 1994.
- [5] A. Haimovich, "Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in an eigenanalysis-based adaptive array", *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 33, pp. 988 – 997, 1997.
- [6] X. Mestre, "Improved Estimation of Eigenvalues and Eigenvectors of Covariance Matrices Using Their Sample Estimates", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, no. 11, pp. 5113 – 5129, Nov. 2008.
- [7] V.L. Girko, *An Introduction to Statistical Analysis of Random Arrays*, chapter 14 - Ten years of general statistical analysis, VSP International Science Publishers, 1998, <http://www.general-statistical-analysis.girko.freewebspace.com/chapter14.pdf>.
- [8] X. Mestre and M.A. Lagunas, "Modified Subspace Algorithms for DoA Estimation With Large Arrays", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 2, pp. 598 – 614, Feb 2008.
- [9] J. Ward, "Space-Time Adaptive Processing for Airborne Radar", Tech. Rep., Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA, Dec. 1994.
- [10] L. E. Brennan and F.M. Staudaher, "SubClutter Visibility Demonstration", Tech. Rep., RL-TR-92-21, Adaptive Sensors Incorporated, Mar. 1992.