

Evaluation de l'apport des précodeurs MIMO au codage LDPC

TAREK CHEHADE¹, LUDOVIC COLLIN¹, PHILIPPE ROSTAING¹, OUSSAMA BAZZI², EMANUEL RADOI¹

¹ Université Européenne de Bretagne, Université de Brest ; CNRS, UMR 6285 LabSTICC
6 avenue Victor le Gorgeu, 29200 Brest, France

² Département de Physique et Electronique, Faculté des Sciences I, Université Libanaise
Hadath, Beyrouth, Liban

¹tarek.chehade@univ-brest.fr, ludovic.collin@univ-brest.fr, philippe.rostaing@univ-brest.fr, emanuel.radoi@univ-brest.fr,
²obazzi@ul.edu.lb

Résumé - Dans les systèmes de transmission MIMO disposant d'une connaissance du canal (CSI) à l'émetteur, l'utilisation d'un précodeur linéaire permet d'améliorer les performances dans le sens de l'optimisation d'un certain critère. D'autre part, l'application des codes correcteurs d'erreurs (entre autres les codes LDPC) renforce la fiabilité et améliore les performances de la transmission. Nous proposons dans cet article d'associer un précodeur MIMO avec un code LDPC construit sur un corps de Galois non binaire $GF(q)$ et décodé par l'algorithme de propagation de croyance. Les résultats de simulations de différentes associations précodeurs-LDPC ont permis d'évaluer l'apport de cette association et de comparer les performances de plusieurs précodeurs, différentes configurations MIMO et des codes LDPC ayant diverses structures.

Abstract – In order to improve the performance of multiple-input multiple-output (MIMO) systems, linear precoders can be used whenever the channel state information (CSI) at the transmitter is available. On the other hand, error correcting codes (among which are LDPC codes) provides improved transmission reliability and performance. We present, in this paper, a combination of linear precoding with non-binary LDPC coding that uses the Belief Propagation algorithm for decoding. The advantages of the combination are shown through the simulations results and the performance improvement is studied depending on different precoders, several MIMO configurations and variously constructed LDPC codes.

1 Introduction

Les systèmes de transmission multi-antennes (MIMO) permettent d'augmenter considérablement la capacité du canal de transmission, comparés aux systèmes SISO. Il existe de nombreuses techniques MIMO permettant d'exploiter la diversité spatio-temporelle du canal pour rendre la transmission robuste vis à vis des évanouissements du canal qui sont la principale cause d'erreurs lors d'une transmission. Ces techniques se font généralement au prix d'une réduction du taux de transmission mais ne supposent pas la connaissance de l'état du canal à l'émission (T-CSI), on les appelle les méthodes « open-loop. » Dans cet article, nous nous intéressons aux méthodes « close-loop » qui supposent la connaissance de la T-CSI mais qui permettent d'obtenir un bon compromis entre la performance et le taux de transmission. Le principe général est d'appliquer une matrice de précodage (à l'émission) et de décodage (à la réception) permettant d'optimiser globalement le système de transmission MIMO. Il existe de nombreux critères d'optimisation (parfois antinomique) pour le design des précodeurs. L'idée de cet article est d'étudier la bonne et/ou la mauvaise adéquation de ces précodeurs lorsqu'ils sont associés avec des techniques de codage canal performantes.

Les codes LDPC (Low Density Parity Check) binaires et non-binaires sont parmi les codes les plus performants de la littérature. Nous proposons dans cet

article, d'associer une technique de correction d'erreurs, les codes LDPC non binaires définis sur un corps de Galois $GF(q)$, avec un précodage linéaire MIMO, en prenant en compte une adéquation précise : l'ordre q du code correspond à la taille de la constellation en réception.

Cet article ne cherche pas à faire une étude théorique pour le design de matrices de parité non-régulières de code LDPC non-binaires adaptés au précodage MIMO. L'objectif ici est moins ambitieux mais néanmoins très pratique en choisissant des matrices de parité régulières de petites tailles (mots de code de $192 \times q$ ou $384 \times q$ bits) avec un nombre de connexions par nœud de variable ($d_v = 2$) et pour plusieurs rendements. Nous allons étudier l'impact de ses matrices parités avec l'algorithme de propagation de croyance, et cela pour différents précodeurs linéaires connus. Plusieurs configurations MIMO seront aussi étudiées et les performances des différentes combinaisons seront comparées.

La suite de cet article est organisée de la manière suivante. La section 2 présente le modèle du signal, la section 3 introduit brièvement les codes LDPC tandis que la section 4 présente les différents précodeurs linéaires étudiés. Dans la section 5, le schéma de l'association est décrit, et les résultats des simulations sont présentés et commentés dans la section 6. La section 7 résume les conclusions et quelques perspectives.

2 Modèle du signal avec précodage MIMO

On considère un système MIMO avec n_T antennes à l'émission, n_R antennes à la réception et b flux de symboles QAM indépendants ($b \leq \min(n_T, n_R)$). Sous l'hypothèse T-CSI, on peut diagonaliser la matrice canal [1] par décomposition en valeur singulières (SVD), le système avec précodage MIMO s'écrit alors de manière équivalente :

$$y = H_v F_d s + n \quad (1)$$

avec y le vecteur des observations, $H_v = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$ la matrice diagonale du canal « virtuel », F_d la matrice de précodage de taille $b \times b$, s le vecteur des symboles de taille $b \times 1$ et n le bruit AWGN de taille $b \times 1$. Les b principales valeurs singulières σ_i pour $i = 1, \dots, b$ sont rangées par ordre décroissant ($\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_b$).

Les hypothèses sur les matrices d'autocorrélation du bruit et du signal sont : $E[ss^H] = E_s I_b$ et $E[nn^H] = N_0 I_b$. La matrice de précodage est déterminée sous la condition de normalisation $\text{trace}(F_d F_d^H) = 1$ pour garantir une puissance totale moyenne transmise égale à E_s . Le rapport signal-sur-bruit sera défini comme la puissance totale transmise sur la puissance du bruit sur chaque récepteur : $SNR = E_s/N_0$.

3 Les précodeurs linéaires

La connaissance du canal à l'émetteur permet l'utilisation d'un précodeur linéaire sous la forme d'une matrice qui combine les symboles sur les antennes et répartit les puissances suivant une stratégie bien déterminée par un critère à optimiser [1]. Il existe deux grandes familles de précodeurs linéaires : les précodeurs diagonaux permettant d'obtenir b systèmes SISO indépendants en parallèles et les précodeurs non-diagonaux.

3.1 Les précodeurs diagonaux

La matrice de précodage F_d est diagonale :

$$F_d = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_b}) \quad (2)$$

avec p_i ($i = 1, \dots, b$) la répartition de la puissance sur chaque voie. La contrainte de puissance devient : $\sum_{i=1}^b p_i = 1$. Les précodeurs diagonaux consistent à faire de l'allocation de puissances suivant les modes propres de canal (i.e. $\sigma_1, \dots, \sigma_b$).

Les optimisations des critères de la capacité du canal (solution WF), de l'erreur quadratique moyenne (solution MMSE) et du RSB en réception conduisent à une structure diagonale du précodeur.

3.1.1 Précodeur max-SNR

La maximisation du RSB en réception conduit à transmettre les données sur un seul canal σ_1 , le plus favorable [2]. En utilisant la contrainte de puissance, on obtient : $p_1 = 1$ et $p_i = 0$ pour $i = 2, \dots, b$. La solution max-SNR simplifiée (1) en utilisant qu'une seule voie ($b = 1$) : $y = E_s \sigma_1 s + n$.

Nous utiliserons une modulation 16QAM en vue de l'association avec le code LDPC dans GF(16). Nous noterons le précodeur « max-SNR-1×16QAM ».

3.1.2 Précodeur Water-Filling (WF)

Le critère à optimiser est la capacité du canal :

$$C = \sum_{i=1}^b \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} p_i \sigma_i^2 \right) \quad (3)$$

En posant $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}$, on obtient la stratégie d'allocation de puissance du précodeur WF suivante :

$$p_i = \begin{cases} \Psi - \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} & \text{si } \Psi > \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, b \quad (4)$$

où le seuil Ψ est défini par :

$$\Psi = \frac{E_s + \gamma_\Psi}{b_\Psi} \quad \text{avec } \gamma_\Psi = \sum_{i=1}^{b_\Psi} \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} \quad (5)$$

et $b_\Psi = i$ la plus grande valeur dans $\{1, \dots, b\}$ telle que $\Psi > \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2}$.

La stratégie d'allocation de puissance du WF dépend du SNR. Ce précodeur donne la possibilité de supprimer les voies les plus faibles. La puissance totale E_s est alors répartie sur les b_Ψ premières voies (les plus favorables).

Dans le cas $b = 2$, il y a deux possibilités : soit les deux voies sont utilisées, soit une seule voie est utilisée (i.e. précodeur max-SNR-1×16QAM). Pour garder un taux binaire de transmission constant de 4 bits/symbole, nous utiliserons 2 flux 4QAM dans le premier cas ($b = 2$) et un flux 16QAM dans le deuxième cas ($b = 1$). Nous noterons ce précodeur « WF-2×4QAM/1×16QAM ».

3.1.3 Précodeur Minimum Mean Square Error (MMSE)

Le critère à optimiser est l'erreur quadratique moyenne :

$$MSE = E[\|y - s\|^2] = \sum_{i=1}^b E[|(\sigma_i f_i - 1)s_i + n_i|^2] \quad (6)$$

La stratégie d'allocation de puissance du MMSE est donnée dans [3] et dépend du SNR. La solution MMSE donne aussi la possibilité de supprimer des voies de données. Comme pour le cas du WF, nous noterons ce précodeur « MMSE-2×4QAM/1×16QAM » pour $b = 2$ et pour garder un taux de transmission constant de 4 bits/symbole.

3.1.4 Précodeurs Equal-Error (EE) et Quality of Service (QoS)

La stratégie QoS permet de fixer des rapports entre les RSB de chaque voie. Le RSB en réception γ_i sur la voie i s'écrit :

$$\gamma_i = p_i \sigma_i^2 = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^b w_k / \sigma_k^2} \quad \text{pour } i = 1, \dots, b \quad (7)$$

avec $w_1 = 1 > w_2 > \dots > w_b$ les rapports des RSB fixés entre la voie $i \neq 1$ et la voie 1 (i.e. $w_i = \gamma_i / \gamma_1$). Le précodeur EE garantit le même RSB en réception γ_i sur chaque voie en prenant : $w_1 = w_2 = \dots = w_b = 1$.

Pour $b = 2$ et 4 bits/symbole, nous noterons ces précodeurs : « EE-2×4QAM » et « QoS-2×4QAM-WdB » avec $W = 10 \log_{10} w_2$.

3.2 Les précodeurs non-diagonaux

Contrairement aux précodeurs diagonaux, la matrice de précodage F_d est non-diagonale. Parmi les précodeurs linéaires non-diagonaux de la littérature, nous allons étudier deux des plus performants qui sont basés sur l'optimisation de la distance minimale : le précodeur max- d_{min} et le précodeur DFT- d_{min} (Discrete Fourier Transform).

3.2.1 Précodeur max- d_{min}

Le critère d'optimisation est la distance minimale (d_{min}) entre deux vecteurs symboles reçus (après le canal) [1] :

$$d_{min} = \min_{\epsilon \in \mathcal{E}} \|H_v F_d \epsilon\| \quad (8)$$

avec $\epsilon = s_k - s_l$ vecteur différence pour $k \neq l$ et \mathcal{E} l'ensemble de tous les vecteurs différence.

Dans le cas $b = 2$, le précodeur peut s'écrire sous la forme paramétrique suivante :

$$F_d = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\phi} \end{pmatrix} \quad (9)$$

La matrice H_v peut aussi s'écrire sous la forme :

$$H_v = \rho \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (10)$$

en posant $\rho^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ et $\tan \gamma = \sigma_2 / \sigma_1$.

Les valeurs du triplet (ψ, θ, ϕ) qui maximise d_{min} pour $b = 2$ avec une modulation 4QAM dépend du paramètre γ du canal. On obtient 2 formes distinctes :

- pour $\gamma < \gamma_0 \sim 17.28^\circ$, on obtient : $\psi = 0$, $\theta = \text{atan}(2/(\sqrt{6} + \sqrt{2})) \sim 27.36^\circ$ et $\phi = 15^\circ$.
- pour $\gamma \geq \gamma_0$, on obtient : $\theta = 45^\circ$, $\phi = 45^\circ$ et $\psi = \text{atan}((\sqrt{2} - 1)/\tan \gamma)$.

3.2.2 Précodeur DFT- d_{min}

La forme générale du précodeur s'écrit [4]:

$$F_d = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_b}) W_b \quad (11)$$

avec W_b la matrice DFT : $W_b = (w^{kl})_{k,l=0,\dots,b-1}$ avec $w = e^{j2\pi/b}$. Pour respecter la contrainte de puissance, on doit satisfaire : $\sum_i p_i = 1$.

Dans le cas $b = 2$, on obtient la matrice DFT suivante :

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

En reprenant la forme paramétrique (9), l'optimisation de la distance minimale pour une modulation correspond aux valeurs $\theta = 45^\circ$, $\phi = 0$ et $\psi = \text{atan}(1/(\sqrt{3} \tan \gamma))$.

La forme de ce précodeur ne permet pas de transmettre les symboles sur une seule voie, la plus favorable (i.e. σ_1 seulement) comme cela est fait par précodeur max- d_{min} lorsque $\sigma_1 \gg \sigma_2$. Pour obtenir un comportement similaire, on peut basculer sur le précodeur max-SNR-1×16QAM à partir d'un certain seuil. Le seuil de basculement s'obtient en égalisant les distances minimales des précodeurs DFT- d_{min} - 2×4QAM et max-SNR-1×16QAM. On obtient le seuil : $\sigma_1/\sigma_2 = \sqrt{7}$ ou $\gamma = \text{atan}(1/\sqrt{7}) = 20.70^\circ$.

On notera ce précodeur DFT-2×4QAM/1×16QAM :

- pour $\gamma < 20.70^\circ$, on utilise une modulation 16QAM sur une seule voie (solution max-SNR-1×16QAM)
- sinon, on utilise deux modulations 4QAM ($b = 2$) avec F_d en (9) avec $\theta = 45^\circ$, $\phi = 0$ et $\psi = \text{atan}(1/(\sqrt{3} \tan \gamma))$.

4 Association précodeur-LDPC

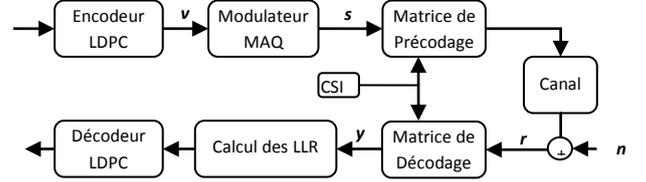


Figure 1 Schéma-bloc du système de transmission

Un code LDPC est caractérisé par une matrice de parité H de taille $(M \times N)$ avec $M = N - K$, K étant la longueur du mot d'information et N étant la longueur du mot de code. Cette matrice peut être représentée par un graphe dit de Tanner. Le décodage est effectué en appliquant un algorithme sous-optimal de propagation de croyance [5] [6].

L'association s'avère prometteuse du fait de l'adéquation des alphabets du code LDPC et de la constellation en réception. La conservation des mêmes symboles tout au long de la chaîne de réception augmente la rapidité de convergence du décodeur LDPC non-binaire et évite une corrélation entre les erreurs de décodage.

La structure du schéma de transmission est présentée sur la Figure 1. Les données sont encodées par l'encodeur LDPC dans GF(16), un mot de code \mathbf{v} de taille $(1, N)$ est réparti en 2 flux de symboles 4QAM représenté par \mathbf{s} de taille $(2, N)$. La matrice de précodage de taille $(n_T, 2)$ est appliquée $F = U_2 F_d$ avec U_2 matrice unitaire « à droite » de la SVD de la matrice canal. U_2 de taille $(n_T, 2)$ correspond en réalité aux 2 premières colonnes de la matrice unitaire. Après le passage dans le canal (matrice canal) et l'ajout du bruit \mathbf{n} , on applique la matrice de décodage $G = V_2^H$ de taille $(n_R, 2)$, avec V_2^H les 2 premières lignes de la matrice unitaire « à gauche » de la SVD.

Les matrices de précodage et de décodage sont calculées grâce à la connaissance du canal à l'émission et à la réception (CSI). L'hypothèse de la connaissance parfaite du CSI est adoptée, par ailleurs, il a été vu que les précodeurs étudiés se montrent robustes vis-à-vis des erreurs d'estimation du canal [1][4]. Les observations \mathbf{y} de taille (n_R, N) sont utilisées pour le calcul des LLRV (Log Likelihood Ratio Vectors) qui serviront à l'algorithme de décodage itératif de propagation de croyance [5][6].

5 Résultats des simulations

Le SNR par bit est défini par : $\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0 4R}$. Le canal est décrit par le modèle de Rayleigh et une matrice canal

est tirée aléatoirement pour chaque mot de code. Les éléments de la matrice canal suivent une loi $\mathcal{CN}(0,1)$.

Les matrices de parité employées ici sont construites suivant [7] avec des rendements allant de 1/2 à 5/6. Elles sont de taille (96,192) à (64,384) et avec 2 éléments non-nuls par colonne et de 4 à 12 par ligne. Tous les précodeurs présentés ont été testés avec un nombre d'antennes variant de 2 à 4 à l'émission et en réception. Nous présentons ici 2 simulations représentatives (Figures 2 et 3) mais nos remarques tiennent compte de toutes les configurations.

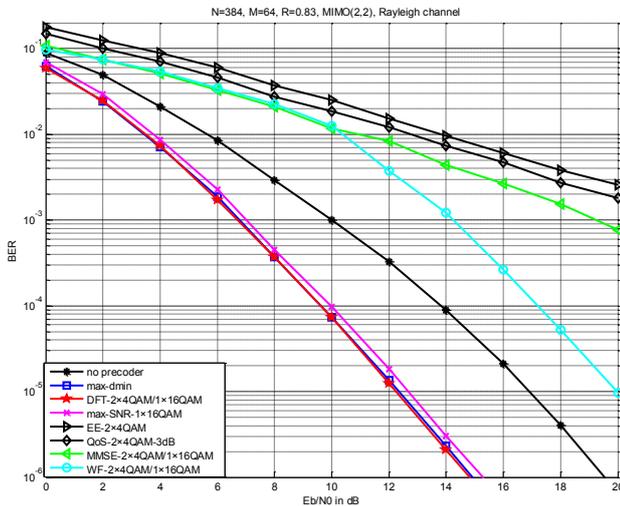


Figure 2 TEB correspondant aux associations des différents précodeurs au codage LDPC ayant un rendement $R=5/6$ pour un système MIMO (2,2)

Tous les précodeurs ne sont pas bénéfiques aux systèmes MIMO LDPC, seuls les DFT- 2×4 QAM/1 \times 16QAM, max- d_{min} et dans certains cas le max-SNR-1 \times 16QAM améliorent les performances. Les précodeurs basés sur la distance minimale ont des performances équivalentes et pour un BER de 10^{-5} le gain en E_b/N_0 est de 2 à 4,5 dB suivant le rendement du code. Lorsque l'on fait varier le rendement du code les systèmes utilisant les précodeurs basés sur d_{min} conservent un écart constant, par exemple de 1,5 dB entre $R=1/2$ et $R=5/6$, pour toutes les configurations d'antennes testées. Le précodeur max-SNR-1 \times 16QAM est un cas particulier qui obtient de très bonnes performances pour $R=0,5$ ou $n_T = n_R = 2$. Sa simplicité en fait une très bonne solution dans ces configurations.

Nous avons aussi vérifié avec les précodeurs diagonaux que l'utilisation d'un LDPC dans GF(4) sur chaque voie donne de moins bons résultats, variables selon le précodeur, allant jusqu'à une perte de plus de 3 dB avec le MMSE.

Les précodeurs sont encore plus intéressants dans le cas d'un système MIMO asymétrique comme sur la figure 3. Avec 2 antennes à l'émission et 4 en réception l'apport des précodeurs DFT- 2×4 QAM/1 \times 16QAM et max- d_{min} est de 2 dB environ. Si l'on permute les antennes (4 à l'émission) les performances des systèmes précodés restent les mêmes alors que le LDPC seul ne pourra émettre que sur 2 antennes et tombera au niveau d'un MIMO(2,2) soit une perte de 12 dB. Dans ce type

de configuration l'utilisation d'un précodeur permettant d'utiliser toutes les antennes semble s'imposer.

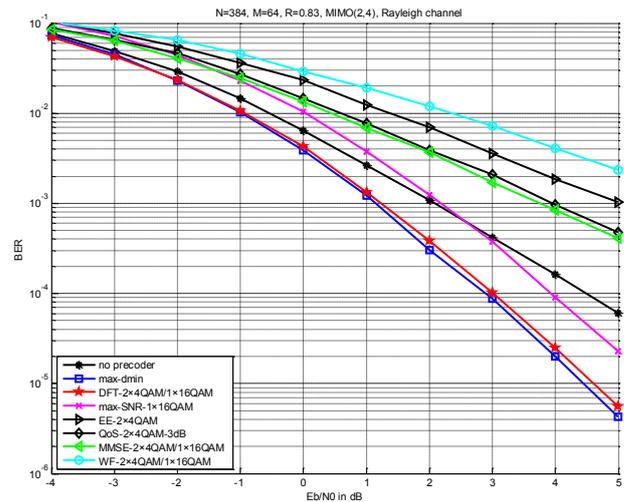


Figure 3 TEB correspondant aux associations des différents précodeurs au codage LDPC ayant un rendement $R=5/6$ pour un système MIMO (2,4)

6 Conclusions et perspectives

En conclusion, l'apport des précodeurs au codage LDPC n'est pas systématique et n'est bénéfique que pour certains précodeurs. Les associations performantes utilisent les précodeurs max- d_{min} et DFT- 2×4 QAM/1 \times 16QAM. Sur la base de ces premiers résultats encourageants, il serait intéressant de mener une étude théorique de type EXIT Chart permettant d'optimiser les codes LDPC pour les systèmes MIMO précodés.

7 Références

- [1] L. Collin, O. Berder, P. Rostaing and G. Burel, "Optimal minimum distance-based precoder for MIMO spatial multiplexing systems" IEEE Trans. on Signal Processing, pp. 617-627, Mar. 2004.
- [2] P. Stoica and G. A. Ganesan, "Maximum-SNR spatial-temporal formatting designs for MIMO channels," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 50, pp. 3036–3042, Dec. 2002.
- [3] H. Sampath, P. Stoica, and A. J. Paulraj, "Generalized linear precoder and decoder design for MIMO channels using the weighted MMSE criterion," IEEE Trans. Commun., vol. 49, pp. 2198–2206, Dec. 2001.
- [4] Q.-T. Ngo, Berder, P. Scalart, "General minimum Euclidean distance-based precoder for MIMO wireless systems" EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Volume 2013, Issue 1, pp.1-12
- [5] R. Gallager, "Low-density parity-check codes" IRE Trans. on Information Theory, pp. 21-28, Jan. 1962.
- [6] M.C. Davey, D. MacKay, "Low density parity check codes over GF(q)" IEEE Communications Letters, vol 2 (6), pp. 165-167, June 1998.
- [7] M. F. C. Poulliat, M. Fossorier, and D. Declercq: "Design of regular (2,dc)-LDPC codes over GF(q) using their binary images", IEEE Trans. On Commun., vol. 56, pp. 1626-1635, October 2008