

# Transformée en ondelettes monogéniques basée Radon pour l'analyse d'images couleur

Philippe CARRÉ, Raphael SOULARD

Laboratoire XLIM-SIC, UMR CNRS 7252  
Université de Poitiers - Blvd Curie Teleport 2 BP 30179, 86962 Futuroscope, France  
philippe.carre@univ-poitiers.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons dans cet article aux ondelettes analytiques basées sur le signal monogénique. Cette nouvelle approche dans les outils d'analyse d'un signal 2-D permet une lecture géométrique et signal de l'image. Cependant, il existe un bémol, à savoir que la formulation discrète et numérique n'est pas immédiate. Nous proposons ici une approche purement numérique dans un contexte d'analyse d'image couleur. Nous proposons d'introduire un schéma de calcul de la transformée de Riesz utilisant une transformée de Radon finie basée sur la géométrie discrète. De plus, afin d'obtenir un schéma multiéchelle, le calcul de la transformée Riesz basée Radon est couplé avec une transformée en ondelettes en quinconce non-uniforme. Cette nouvelle construction nous permet de définir une transformée en ondelettes Monogénique couleur rapide, restructurable et facilement généralisable à des images multibandes.

**Abstract** – In this article, we propose to review the introduction of a color monogenic wavelet transform. Monogenic wavelets offer a geometric representation of grayscale images through an AM/FM model allowing invariance of coefficients to translations and rotations. After a general description of the background of monogenic concept, we address the numerical aspect by introducing an innovative scheme that uses a discrete Radon transform based on discrete geometry. In this work, we propose a Monogenic Wavelet transform using an undecimated nonseparable decomposition. Then, starting from a link with structure tensors, we discuss an alternative non-trivial extension of the monogenic framework to vector-valued signals.

Comme nous le savons, les images naturelles peuvent être difficiles à représenter à l'aide d'une base classique d'ondelettes, à la fois à cause des contours et des textures. Pour gagner en efficacité pour les images complexes, il est nécessaire soit d'utiliser des représentations rigides mais prenant mieux en compte les particularités d'une image comme la transformée Ridgelet (et son évolution la transformée Curvelet) [2], soit des représentations adaptatives comme celles qui exploitent les libertés qu'offrent les ondelettes dites de seconde génération (le lifting scheme) en utilisant les orientations plus ou moins locales que l'on peut identifier dans l'image. Toutes ces transformées récentes ont pour objectif de prendre en compte le "motif" formé par les singularités du signal. Cette prise en compte se fait au travers de l'ensemble du dictionnaire de fonctions d'analyse.

Le point de départ de la transformée exposée dans cet article est l'extension du signal analytique aux images couleur. En cela, nous sommes complémentaires des approches classiques car l'objectif premier est une généralisation d'un concept issu du signal. Il existe une manière de généraliser la notion de signal analytique 1-D pour les images, c'est le signal monogénique développé notamment en détail par Felsberg [4] reposant sur une généralisation de la transformée de Hilbert appelée transformée

de Riesz. Ce n'est que très récemment que différents travaux sont apparus utilisant cette transformée de Hilbert 2-D isotrope. On peut citer par exemple Larkin et al. [6] qui proposent dans le domaine de l'optique la transformée "spiral phase quadrature". Après le travail de Felsberg, un second apport majeur est venu ces dernières années, de l'équipe de Unser [9], qui a proposé de nombreux développements autour des ondelettes monogènes adaptées pour les images en niveaux de gris. Il a été montré que l'extension des ondelettes à travers le concept monogénique permet d'analyser plus finement la géométrie de l'image.

Dans cet article, nous proposons un schéma de calcul de la transformée de Riesz utilisant une transformée de Radon finie basée sur la géométrie discrète. De plus, afin d'obtenir un schéma multiéchelle, le calcul de la transformée Riesz basée Radon est couplé avec une transformée en ondelettes en quinconce non-uniforme. Nous rappelons tout d'abord le concept monogénique.

## 1 La transformée monogénique

Il existe une manière de généraliser la notion de signal analytique 1-D pour les images, c'est le signal monogénique. La définition du signal monogénique utilise une gé-

néralisation de la transformée de Hilbert appelée transformée de Riesz. Si l'on applique la transformée de Riesz sur une image niveaux de gris  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  alors nous obtenons un signal à valeurs vectorielles dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}) \\ \mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x * s(\mathbf{x}) \\ h_y * s(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec  $h_x$  et  $h_y$  les noyaux de Riesz.

La transformée de Riesz est parfois appelée transformée de Hilbert isotrope. La transformée de Riesz possède des propriétés d'invariance par translation et changement d'échelle.

Tout naturellement, puisque nous avons à disposition une extension de la transformée de Hilbert aux images, nous reprenons le concept du signal analytique en combinant le signal d'origine avec sa transformée de Riesz pour obtenir un signal analytique isotrope, appelé signal monogène. Soit  $s$  une fonction à deux variables  $x_1$  et  $x_2$  et à valeurs réelles, le signal monogène est défini par Felsberg suivant [4] :

$$s_M(\mathbf{x}) = (s(\mathbf{x}) \quad \mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}) \quad \mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x})) \quad (2)$$

Comme dans le cadre du signal analytique nous pouvons définir une notion de phase. Pour cela, nous changeons de système de coordonnées et utilisons les coordonnées sphériques. Ces coordonnées sphériques permettent de définir une norme [4] :

$$|s_M(\mathbf{x})| = \sqrt{s(\mathbf{x})^2 + (\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}))^2 + (\mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x}))^2}. \quad (3)$$

et deux angles[4]. Le premier angle  $\theta$  appelé orientation est défini sur la partie Riesz :

$$\theta(\mathbf{x}) = \arctan \left( \frac{\mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x})}{\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x})} \right). \quad (4)$$

Le second angle  $\varphi$  appelé la phase est défini par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \arctan \left( \frac{\sqrt{\mathbf{TR}_1[s]^2(\mathbf{x}) + \mathbf{TR}_2[s]^2(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})} \right) \quad (5)$$

Le vocabulaire proposé par Felsberg est bien sûr en lien avec l'information portée par ces trois paramètres. Comme à chaque fois, le module va être une mesure d'énergie locale permettant de mettre en évidence la présence d'information. Ensuite l'angle  $\theta$  met en évidence une notion de direction locale dominante de la surface. Enfin  $\varphi$  est équivalent à l'angle existant entre la partie réelle et la partie imaginaire du signal analytique 1-D. C'est pourquoi il est nommé phase et va porter une information géométrique.

Il est tout naturel d'introduire à partir de la construction précédente une transformée en ondelettes qui permet de définir un signal monogénique associé à différentes bandes de fréquence. Le principe consiste à étendre la décomposition en ondelettes en se fixant simplement une fonction d'ondelette isotropique réelle 2-D  $\psi$  et en calculant la transformée de Riesz  $\mathbf{TR}[\psi]$  [7]. Il reste l'épineux

problème de l'écriture numérique de cette décomposition. A notre connaissance, la seule proposition ayant pour vocation un déploiement numérique est la proposition de Unser et al. [9]. Elle repose sur la définition d'une fonction d'échelle Spline, à laquelle on associe une fonction d'ondelette anisotrope par un opérateur Laplacien. L'étape monogénique est amené par une autre fonction d'ondelette complexe liée à la première à travers la transformée de Riesz. Pour chacune des fonctions, Unser et al. proposent les filtres associés, dans le domaine fréquentiel [9].

Dans cet article, nous proposons d'introduire un schéma de calcul utilisant une transformée de Radon finie basée sur la géométrie discrète. Cette stratégie offre une méthode numérique rapide et inversible.

La proposition repose sur le lien fondamental entre le cadre monogénique et la transformée de Radon, que nous illustrons dans la section suivante.

## 2 Le domaine de Radon pour une transformée Monogénique discrète

Il est montré dans [1] que la transformée de Riesz est équivalente à une transformée de Hilbert 1-D appliquée sur chaque projection de Radon, combinée avec une pondération dépendant de l'angle de projection  $\theta$  :

$$\{\mathcal{R}s\}_\theta(t) = \{\mathcal{H}s_\theta\}(t)e^{j\theta} \quad (6)$$

où  $\mathcal{H}s_\theta$  est la transformée de Hilbert de  $s_\theta$ .

La transformée de Hilbert est bien connue et intégrée dans certaines transformée en ondelettes analytique. On en déduit de ces relations que l'analyse monogénique (basée sur la transformée de Riesz) peut se "réduire" à un problème classique dans le domaine de Radon.

### 2.1 La transformée de Radon

La transformée de Radon permet de mettre en évidence les formes linéaires d'un objet 2-D dans une image en intégrant l'intensité de l'image selon toutes les droites possibles de l'image variant d'un angle  $\theta$ . Pour calculer la transformée de Radon, nous pouvons utiliser le théorème de la projection de Radon (Fourier Slice Theorem). Celui-ci indique que la transformée de Radon peut être obtenue en appliquant une transformée de Fourier inverse 1-D le long des lignes radiales passant par l'origine dans le domaine de Fourier 2-D de l'image.

Dans [3], nous avons proposé d'implanter la transformée de Radon en utilisant la stratégie de Fourier. Le calcul repose sur l'extraction des coefficients de Fourier le long des lignes  $L_\theta$  qui sont définies avec l'aide de la théorie de la géométrie analytique discrète. Soit les deux points  $O(0, 0)$  et  $P(p, q)$ , la droite discrète reliant ces deux points est définie par :

$$L_{(p,q)}^\omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |qx_1 - px_2| \leq \frac{\omega}{2} \right\} \quad (7)$$

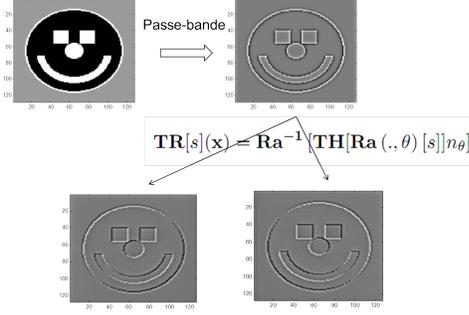


FIGURE 1 – Signal monogénique basé Radon de l'image ‘Smiley’ filtrée passe-bande.

$[p, q] \in \mathbb{Z}^2$  correspondent à la direction  $\theta$  de la droite (direction de la projection de Radon) et  $\omega$ , fonction de  $p$  et  $q$ , est l'épaisseur arithmétique qui contrôle la connectivité des droites discrètes : par exemple si  $\omega_L < \max(|p|, |q|)$ , alors la droite discrète n'est pas connectée.

Les coefficients de Fourier de l'image sont extraits le long des lignes discrètes  $L_{[p,q]}^\omega$  (les points extraits sont ordonnés suivant l'ordre naturel) puis on calcule la transformée de Fourier 1-D inverse pour chaque valeur de la direction  $[p, q]$ . Pour assurer la réversibilité de la transformée de Radon discrète, il faut que les droites discrètes couvrent complètement la grille de Fourier. Pour cela, les droites sont définies pour relier le pixel bordant le spectre fréquentiel et son symétrique par rapport au centre de l'image.

Cette définition implique de la redondance dans les coefficients des projections, c'est-à-dire qu'un coefficient de Fourier peut être élément de plusieurs droites discrètes. Dans cet article nous ne traiterons que les droites naïves fermées couvrent le domaine de Fourier avec peu de redondance ( $\approx 2$ ).

## 2.2 Transformée de Riesz discrète basée Radon

Nous proposons donc d'utiliser la transformée de Radon discrète pour définir une analyse monogénique suivant ces étapes :

- Calcul d'un filtre passe-bande 2-D afin de sélectionner les échelles (un filtrage isotropique) ;
- Calcul de la transformée de Radon discrète du signal filtré  $s$  suivant la stratégie analytique ;
- Calcul de la transformée de Hilbert sur chaque projection  $s_\theta$  ;
- Pondération de chaque projection par  $[\cos \theta \ \sin \theta]$  ;
- Calcul de la transformée de Radon inverse sur les deux projection, nous obtenons alors  $s_{r_1}$  et  $s_{r_2}$ .

Un exemple de décomposition est donnée dans la figure 1. Nous constatons que les résultats sont similaires à une approche basée FFT et avec une approche numérique très simple du fait de l'utilisation de la transformée de Radon analytique.

Nous analysons brièvement la stratégie d'inversion de

notre transformée monogénique car certaines étapes peuvent être sources d'approximation numérique, comme notamment la pondération dans le domaine de Radon suivant  $e^{j\theta}$ . Les données disponibles sont donc la partie réelle et deux parties Riesz. La redondance est donc de  $3 * 2$  si l'on utilise des droites naïves et la reconstruction nécessite donc de fusionner ces informations redondantes :

- Calcul de la transformée de Radon sur la partie réelle  $R^\omega s$  et sur les deux parties de Riesz  $R^\omega \mathbf{TR}_{(1,2)}[s]$ . Pour chaque direction  $\theta = \text{atan}([p, q])$ , nous reconstruisons la version analytique de la projection de Radon suivant :

$$R_a^\omega s(\theta, \cdot) = R^\omega s(\theta, \cdot) + i \left( \begin{array}{l} R^\omega \mathbf{TR}_1[s](\theta, \cdot) \cos(\theta) \\ + R^\omega \mathbf{TR}_2[s](\theta, \cdot) \sin(\theta) \end{array} \right)$$

- On calcule la transformée de Fourier 1-D pour chaque direction.

Il faut alors "estimer" la projection  $P_{[p,q]}^\omega$  à partir de sa version analytique, il suffit de re-créer la symétrie hermitienne à partir de la moitié positive du spectre. Ensuite on inverse la transformée de Radon :

- Pour toutes les directions  $[p, q]$ , on substitue les valeurs échantillonnées de  $\hat{s}$  quand les points sont éléments des lignes  $L_{[p,q]}^\omega$  par les valeurs de  $\hat{s}$  définies sur la grille carrée :

$$\hat{s}^{[p,q]}(f_1^k, f_2^k) = P_{[p,q]}^\omega(k) \text{ tel que } |qf_1^k - pf_2^k| \leq \frac{\omega}{2}$$

pour  $0 < k < \text{longueur de } L_{[p,q]}^\omega$ .

Notons que du fait de la redondance, des coefficients de Fourier sont éléments de plusieurs lignes discrètes. Dans ce cas, le coefficient de Fourier est calculé par une moyenne. Ensuite il ne reste plus qu'à calculer la transformée de Fourier inverse 2-D.

Cette procédure permet d'obtenir une reconstruction très proche du signal de départ. A titre d'exemple, pour une image dont les pixels suivent une distribution Gaussienne (valeurs normalisées entre 0 et 255), nous obtenons après reconstruction une erreur quadratique moyenne de 0.024, et un rapport signal sur bruit de 78 dB.

## 2.3 Transformée en ondelette monogénique basée Radon

Afin de calculer une transformée en ondelettes monogéniques, le principe de filtrage passe-bande isotropique est inséré dans un schéma de décomposition en ondelettes, chaque échelle correspondant ainsi à une bande. Toutefois il faut que chaque échelle d'ondelettes soit définie à travers un filtrage passe-bande isotropique. Ceci nous incite à nous placer dans le cadre des ondelettes 2-D non séparables. De plus, du fait du sous-échantillonnage, la transformée n'est pas invariante par translation, ce qui va à l'encontre de l'objectif d'obtenir une représentation bien adaptée à l'image. Une manière simple d'obtenir un schéma invariant dans le temps est de ne pas appliquer

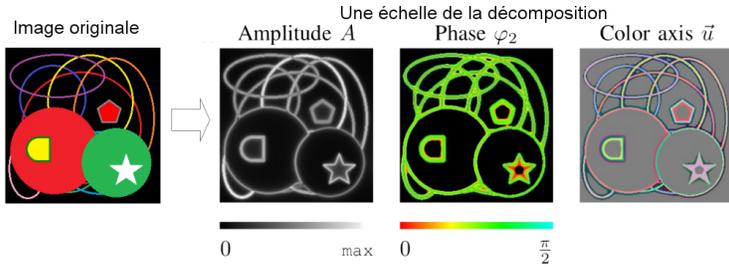


FIGURE 2 – Décomposition en ondelettes monogènes couleur, illustration d’une échelle : norme, phase et axe couleur.

l’étape de sous-échantillonnage mais de dilater le filtre entre chaque échelle. Dans ce travail, nous proposons d’utiliser une décomposition en quinconce non décimée ce qui permet d’associer à chaque échelle un filtrage passe-bande isotropique, de définir une représentation invariante par translation mais avec un choix judicieux des filtres. Nous utilisons dans notre application la base biorthogonale proposée par Kovacevic et Vetterli [5].

Nous obtenons donc une décomposition en ondelettes non séparable avec un facteur de redondance égal à, pour des droites naïves et un nombre  $L$  d’échelle,  $3 * L * 2 + 1$ .

Il est noter que l’estimation de la phase à partir de la transformée monogénique peut présenter une certaine instabilité numérique. Cette instabilité est réduite en seuillant bien évidemment les positions ayant un module très faible, mais aussi en utilisant des transformées non décimées. Ceci renforce le choix exposé ci-dessus.

### 3 Discussion

Nous proposons d’illustrer cette nouvelle décomposition numérique dans le cadre que nous avons introduit récemment concernant l’analyse monogénique d’image couleur [8]. Cette proposition repose sur le lien qui existe entre la transformée de Riesz et le gradient appliqué sur une version lissée du signal. C’est pourquoi nous avons proposé de redéfinir ces mesures pour les images couleur à partir du formalisme du tenseur de structure. De cette construction, nous avons proposé une décomposition en ondelettes monogène couleur tentant de décrire d’une manière multiéchelle l’information couleur [8]. La méthodologie de calcul proposée dans cet article s’insère pleinement dans cette nouvelle représentation de l’information. Nous illustrons sur la figure 2 une échelle de la décomposition en ondelettes monogène d’une image couleur, avec les informations suivantes :

- la *phase* donne une information locale sur le type de contour (notion de ligne, rupture ...),
- l’*axe couleur* porte l’information couleur associée aux discontinuités qui généralise dans le cas de simages la notion d’orientation.

Nous ne pouvons dans le cadre de cet article développer plus en avant l’analyse de la décomposition (voir [8]). L’objectif de ce travail était de proposer une méthode numérique stable et rapide de calcul d’une transformée en ondelettes monogénique qui s’insère simplement dans le formalisme couleur. L’objectif est atteint à travers l’utilisation d’une transformée de Radon finie rapide et parfaitement inversible. Il reste toutefois de nombreuses questions ouvertes, notamment, comme nous l’avons dit, dans le calcul des paramètres de type phase, mais aussi l’interprétation que l’on peut donner à cette traduction riche de l’information couleur. Cette représentation est maintenant la base de différents travaux, nous menons actuellement une étude autour de l’estimation de la fréquence instantanée sur une image couleur pour des problématiques de segmentation.

Remerciement : Etude financée par les fonds de l’Union Européenne et la Région Poitou-Charentes.

### Références

- [1] Fred Brackx, Bram De Knock, and Hennie De Schep- per. On generalized hilbert transforms and their inter- action with the radon transform in clifford analysis. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2007; 30 :1071-1092, Wiley InterScience, 2006.
- [2] E. Candès. *Ridgelets : Theory and Applications*. PhD thesis, Dpt of Statistics, Stanford University, 1998.
- [3] P. Carré and E. Andres. Discrete analytical ridgelet transform. *Signal Processing*, 84(11) :2165–2173, November 2004.
- [4] Michael Felsberg and Gerald Sommer. The monogenic signal. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 3136-3144, 2001.
- [5] Jelena Kovacevic and Martin Vetterli. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for r. *IEEE Transactions on In- formation Theory*, pages 533–555, 1992.
- [6] Kieran G. Larkin, Donald J. Bone, and Michael A. Oldfield. Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. ii. stationary phase analysis of the spiral phase quadrature transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18 :1871–1881, 2001.
- [7] Sofia C. Olhede and Georgios Metikas. The monoge- nic wavelet transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57 :3426–3441, 2009.
- [8] Raphael Souldard, Philippe Carré, and Christine Fer- nandez. Vector extension of monogenic wavelets for geometric representation of color images. *IEEE Tran- sactions on Image Processing*, 22(3), 2013.
- [9] Michael Unser, Daniel Sage, and Dimitri Van De Ville. Multiresolution monogenic signal analysis using the riesz-laplace wavelet transform. *Trans. Img. Proc.*, 18 :2402–2418, November 2009.